



DIE

MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN

THEORIEEN

DER

HÖHEREN GEODÄSIE.



DIE MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN THEORIEEN DER HÖHEREN GEODÄSIE.

EINLEITUNG UND I. TEIL:
DIE MATHEMATISCHEN THEORIEEN.

VON

DR. F. R. HELMERT,
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1880

UNVERÄNDERTER NACHDRUCK

MINERVA G.M.B.H. FRANKFURT/MAIN
1962

MIT GENEHMIGUNG DER B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT

STUTTGART

Vorwort.

Das vorliegende Buch enthält den mathematischen Teil einer umfassenden, auf praktische Anwendung zielenden Darstellung der wissenschaftlichen Grundlagen der Landesvermessungen und Erdmessungen. Meine ursprüngliche Absicht war, in organischer Entwicklung den physikalischen Teil vorausgehen zu lassen; nachdem ich jedoch das gesamte Material einer ersten Bearbeitung unterzogen hatte, fand ich, dafs die bewährte Methode des Aufsteigens vom Einfachen zum Komplizierteren sich besser mit der nunmehr gewählten Reihenfolge der Teile würde vereinigen lassen. Für die allgemeine Orientierung sorgen jetzt die beiden ersten Kapitel der Einleitung.

Bei den mathematischen Entwicklungen ist alles beiseite gelassen, was in keiner Beziehung zur Geodäsie auf der wirklichen Erdoberfläche steht; innerhalb dieses Rahmens aber habe ich versucht Ausführlichkeit und Strenge mit Einfachheit zu vereinigen.

Der Wunsch nach Ausführlichkeit veranlafste mich u. a. der Rechnung mit Sehnen einen Platz einzuräumen, obgleich sich herausstellte, dafs im allgemeinen die Sehne weniger bequem zur Anwendung ist, als die geodätische Linie. Immerhin ergaben sich aufser theoretisch interessanten Resultaten auch einige zur Anwendung geeignete Formeln.

Was die Strenge der mathematischen Darstellung anlangt, so scheint es mir, dafs sie namentlich bei Reihenentwicklungen in geodätischen Werken meistens zu sehr als selbstverständlich angesehen wird. Nicht immer aber hat man es mit dem einfachen Fall der Entwicklung trigonometrischer Funktionen kleiner Winkel in Potenzreihen zu thun und es bedarf u. a. bei der Ableitung des *Legendre*schen Theorems einer besonderen Untersuchung der Gültigkeit für spitze Dreiecke, die jedoch mittelst des Restes der *Taylor*schen Reihe leicht zu führen ist.

In Hinsicht der Einfachheit beschränkte ich mich zunächst auf die Geodäsie für die Kugel und das schwach abgeplattete Rotationsellipsoid, schlofs an die letztere aber die Geodäsie auf der wirklichen Erdoberfläche mittelst des Begriffes der Lotabweichung an. Dieses schon von *Bessel* angegebene Verfahren ist nach dem gegenwärtigen

Stande unserer Kenntnis der Erdgestalt nicht nur ein ganz berechtigtes, sondern nach meiner Ansicht das einzig praktische. Ich halte es namentlich für ganz nutzlos, als Projektionsfläche eine andere Fläche als das schwachabgeplattete Rotationsellipsoid mit zur Erdaxe paralleler kleiner Axe zu wählen und habe mich demgemäfs darauf beschränkt, alle Theorieen nur für diese Fläche oder die noch einfachere Kugelfläche aufzustellen. Ist es auch mathematisch interessant, in jedem Falle das Gültigkeitsgebiet eines Satzes in vollem Umfange zu erkennen, so verliert doch diese Kenntnis jede Bedeutung für die geodätische Anwendung. Die Beschränkung aber gewährte mir die Möglichkeit einer, wie ich hoffe, in erweitertem Kreise verständlichen Darstellung. Insbesondere habe ich die Fundamentalgleichung der geodätischen Linie ganz elementar ohne Variationsrechnung hergeleitet, sowie mich bemüht, zur Theorie der geodätischen Dreiecke in dem für die Praxis ausreichenden Umfange auf direkten, dem allgemeineren Verständnis naheliegenden Wegen zu gelangen. Zu dem Zwecke wurde von den Integralformeln für die geodätische Linie zunächst zu den Differentialformeln übergegangen und aus diesen die Lehre vom geodätischen Kreise gewonnen, wonach es nur einfacher Integrationen zur Erreichung jenes Zieles bedurfte. Zu gröfserer Anschaulichkeit ist die Theorie der geodätischen Dreiecke auf der Kugel ähnlich behandelt worden, wie jene fürs Ellipsoid; dabei konnte zugleich ohne Schwierigkeit die Gültigkeit der Formeln der sphärischen Trigonometrie in dem für die Geodäsie wichtigen Umfange bewiesen werden.

Es versteht sich wohl von selbst, dafs die vorhandenen Arbeiten über Geodäsie berücksichtigt wurden, wie zahlreiche Citate bezeugen: formell bin ich jedoch entsprechend meinen Absichten in den meisten Fällen selbständig vorgegangen.

Auch materiell dürfte sich manches Neue finden. In dieser Beziehung nenne ich u. a. die Rechnung mit Sehnen auf dem Ellipsoid (4. Kap.), die Differentialformeln für die geodätische Linie (6. Kap.), die Reihenentwicklungen zur Berechnung von Entfernung und Azimuten aus geographischen Positionen (S. 314), die Betrachtung für geodätische Linien zwischen nahezu diametralen Punkten (7. Kap.), die Untersuchung über die Maximalwerte der höheren Glieder des *Legendre*schen Theorems (S. 94, 359 u. 384), die Untersuchung über die sphärische Berechnung der Dreiecksketten (S. 400), die Beziehungen zwischen rechtwinkligen und geographischen Koordinaten (9. Kap.), die Ausgleichung geodätisch-astronomischer Messungen mit Rücksicht auf Lotabweichungen (12. Kap.) und die Entwicklungen bezüglich der Beweiskraft der Gradmessungen für eine rotationsellipsoidische Erdgestalt (13. Kap.).

Die wichtige Angelegenheit der Ausgleichung geodätisch-astronomischer Messungen mit Rücksicht auf Lotabweichungen ist zwar nicht bis in alle Details erledigt, aber es ist wenigstens die Grundlage vollständig entwickelt. Als ein Hauptresultat der Untersuchung mufs ich für mich die Überzeugung betrachten, dafs bei den Ausgleichungen grofser Dreiecksnetze nicht nur die von den verschiedenen Grundlinien gegebenen Bedingungsgleichungen zu berücksichtigen sind, sondern auch die bei dem jetzigen Stande der Beobachtungskunst völlig ebenbürtigen Gleichungen, welche mittelst des Theorems von *Laplace* aus Azimutbestimmungen und geographischen Längenbestimmungen abgeleitet werden können (S. 537). Eine ohne diese Rücksichtnahme ausgeführte gemeinsame Ausgleichung eines gröfseren Komplexes von Dreiecksketten würde ich für Gradmessungszwecke als wertlos erachten, für Landesvermessungszwecke aber wenigstens als unvollständig ansehen.

Um die Übersichtlichkeit zu erleichtern, sind in den Formeln möglichst wenig abkürzende Bezeichnungen eingeführt. Die Symbolik ergab sich durch eine Reihe von Kompromissen aus den üblichen Bezeichnungsweisen. Es ist dabei möglichst bedacht genommen, dasselbe Symbol nur insoweit zur Bezeichnung verschiedener Gröfsen zu verwenden, als ein Irrtum daraus nicht entstehen kann.

Tabellen sind dem Buche bis auf eine solche für den Logarithmus einer häufig auftretenden Funktion der Excentricität der Meridianellipse und der geographischen Breite nicht beigefügt, es ist vielmehr auf *Albrechts* bewährte Tafelsammlung verwiesen (S. 34). Zur Prüfung der Brauchbarkeit der Formeln, namentlich derjenigen für die Aufgabe der Übertragung geographischer Koordinaten und ihrer Umkehrung, welche je besonders für beliebige Distanzen, für Distanzen bis zu 640 Kilometer und für Seiten mefsbarer Dreiecke entwickelt sind, wurden Zahlenbeispiele berechnet, z. T. unter Anwendung von Logarithmen mit 10 Decimalen. Die so erzielte Schärfe der Rechnung ist zwar in mehreren Fällen weit gröfser als in der Praxis erforderlich wird, sie war aber gleichwohl des speziellen Zweckes wegen erwünscht. Eine Gebrauchsanweisung sollte mit diesen Beispielen ebensowenig gegeben werden, wie eine völlig gebrauchsfertige Gestalt der Formeln im Sinne der praktischen Routine beabsichtigt ist.

Aachen, Oktober 1880.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

1. Kapitel. Gegenstand der Geodäsie.

2. Kapitel. Historische Entwicklung der Kenntnisse von der mathematischen Erdoberfläche.

3. Kapitel. Allgemeine mathematische Notizen, insbesondere Reihenentwicklungen.

1. Teil.

Die mathematischen Theorieen der höhern Geodäsie.

1. Kapitel. Das abgeplattete Rotationsellipsoid.

2. Kapitel. Dreiecke und Dreiecksnetze auf der Kugel.

3. Kapitel. Rechtwinklige und geographische Koordinaten auf der Kugel.

4. Kapitel. Der vertikale Schnitt und das Sehnendreieck für das abgeplattete Rotationsellipsoid.

5. Kapitel. Fundamentalformeln für die geodätische Linie.

8. Kapitel. Das geodätische Dreieck; Dreiecksnetze.

9. Kapitel. Rechtwinklige geodätische Koordinaten und Übertragung geographischer Koordinaten mittelst derselben.

13. Kapitel. **Bestimmung des Erdellipsoids aus Gradmessungen.**

Berichtigungen.

S. 8 Z. 23 v. o. sind die Worte *mit anderen* vor *paarweise* einzuschalten.
S. 28 Z. 10 und 11 v. u. ist $\varkappa$ in den Quotienten zu streichen.
S. 65 Z. 11 v. u. ist § 17 anstatt § 18 zu lesen.
S. 93 Z. 3 v. u. ist sin B anstatt sin : B zu lesen.
S. 115 Z. 7 v. o. lies y_1 anstatt y.
S. 116 Formel (3) lies $\eta_1{}^3$ anstatt η^3.
S. 173 2 Z. rechts fehlt im Zähler vor k das Minuszeichen.
S. 191 2 Z. o. fehlt am Anfange das Wörtchen *dafs*.
S. 192 (9) fehlt rechter Hand $+ Gl_3$.
S. 206 (8) ist in der ersten eckigen Parenthese der Zähler 5 im Bruche $\frac{5}{6}$ ausgefallen.
S. 267 inmitten ist zu lesen $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_2' = \sin \varDelta\varphi\ \delta\alpha_{1.2}$.
S. 277 (8) ist der Faktor a_1 vor der geschlungenen Parenthese zu tilgen und an der 1. runden Parenthese wieder anzubringen.
S. 287 (11) ist die untere Integralgrenze φ_1.
S. 338 Z. 3 v. o. fehlt an P der Index n.
S. 356 (14) lies $6b^2c^2$ anstatt $6b_2c_2$.
S. 378 inmitten ist 3,9675889.6 in eine eckige, den Logarithmus anzeigende Parenthese einzuschliefsen.
S. 383 Z. 9 v. o. lies sin $2\beta_1$ anstatt $\sin^2\beta_1$.
S. 386 Z. 15 v. o. lies $b \cos \mathfrak{X}_b$ anstatt $b \cos \mathfrak{X}_c$.
S. 387 (21) lies $\pm$ anstatt $\mp$.
S. 437 2. Z. v. o. lies m^2 anstatt m^4.
S. 451 ist in (1), (2) und (3) $W_0{}^4$ für $W_0{}^2$ zu setzen.
S. 472 lies Z. 6 und 7 rechter Hand: 27,24″ 0,454′ 0,34′.
S. 482 ist die Nummer (5) eine Zeile höher zu rücken.
S. 496 (3) ist cos B_k anstatt cos B zu lesen.
S. 522 Anm. ist gleichmäfsiges Gefälle des Profils $P_1 P_2$ vorausgesetzt.
S. 579 u. 581 ist in den Fehlergleichungen für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zu setzen $\lambda_1 - \lambda_\sigma$, $\lambda_2 - \lambda_\sigma, \ldots$ und demgemäfs (nach Ausgleichungsrechnung S. 143) die Bildung der Normalgleichungen abzuändern, falls auch für die Münchener Lotrichtung eine interpolatorische Abweichung zulässig erscheint.

Einleitung.



1. Kapitel.

Gegenstand der Geodäsie.

§ 1. **Die Geodäsie** ist die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche.

Die Erdoberfläche hat näherungsweise die Gestalt einer Kugel von 6370^{km} Radius. Die Abweichungen von der Kugelform halten sich völlig innerhalb $^1/_2$ Prozent in radialer Richtung, indem die Differenz zwischen dem gröfsten und kleinsten Abstand der Oberfläche vom Schwerpunkt der Erde noch nicht den Betrag von 32^{km} erreicht. Die Abweichungen sind also in manchen Fällen, wo die Erde als Ganzes aufgefafst wird, verschwindend klein, wie z. B. bei einer räumlich bildlichen Darstellung der Erde als Globus.

Andrerseits sind gerade sie ein wesentliches Objekt der Messungen. Dabei kommt in betracht, dafs der unmittelbar sichtbare Teil der Abweichungen: Berg und Thal, wegen seines verwickelten Bildungsgesetzes als regellos behandelt werden mufs. Weil aber ein Schlufs von einzelnen Teilen auf das Ganze nur bei regelmäfsiger Beschaffenheit möglich ist, so mufs überall da, wo die Gestalt der physischen Erdoberfläche im Detail erkannt werden soll, sie direkt durch Messungen bestimmt werden.

Dafs wir nun gleichwohl auch Kenntnisse über die Erdgestalt im allgemeinen erlangt haben, trotzdem die Erdoberfläche nicht überall zugänglich ist, wurde ermöglicht durch die Existenz eines in erster Annäherung sehr einfachen Bildungsgesetzes der Gestalt des gesamten Erdkörpers: eines Bildungsgesetzes, dessen Faktoren die Gravitation der Massenteile und die durch die Rotation um eine Axe erzeugte Zentrifugalkraft sind.

§ 2. **Ausmessung kleiner Teile der Erdoberfläche.** Die Aufnahme irgend eines Flächenstücks ist eine relativ vollständige, wenn man die räumlichen Koordinaten von so vielen Punkten desselben ermittelt hat, als zur Herstellung eines für einen bestimmten Zweck ausreichend genauen Bildes erforderlich sind. Die Punkte sind als *charakteristische* auszuwählen d. h. als solche, zwischen denen die Linien- und Flächenelemente hinreichend gerade bezw. eben sind.

Auf *eine* Koordinatenrichtung ist man durch *die Richtung der Schwerkraft*, derjenigen Kraft, die sich als Resultante der obengenannten Kräfte ergiebt, hingewiesen; denn der Umstand, dafs der Schwerpunkt eines in einem Punkte ruhend aufgehängten Körpers stets in Richtung der Schwerkraft unterhalb des Aufhängepunktes liegt, und dafs ferner ein ruhender Flüssigkeitsspiegel sich immer rechtwinklig zur Richtung der Schwerkraft stellt, gestattet geodätische Mefsinstrumente gegen diese Hauptrichtung zu orientieren. Dieselbe wird kurz als *Lotrichtung* oder *vertikale* Richtung bezeichnet, eine Normale zu ihr als *horizontale* Richtung und der geometrische Ort aller Horizontalen eines Punktes als seine Horizontalebene.

Die Lotrichtungen verschiedener Punkte konvergieren näherungsweise nach dem Erdschwerpunkte; sie sind also nicht parallel. Nichtsdestoweniger darf man für hinlänglich benachbarte Punkte ihnen diese Eigenschaft beilegen, weil alsdann wegen des grofsen Abstandes des Schwerpunktes der Erde von ihrer Oberfläche die Konvergenz gering ist. Selbstverständlich mufs untersucht werden, wann die Konvergenz der Lotrichtungen vernachlässigt werden darf.

Sehen wir die Lotrichtungen der charakteristischen Punkte eines Teiles der Erdoberfläche als parallel an, so projicieren sie dieselben zu identischen Figuren auf beliebig über einander liegende Horizontalebenen. In Bezug auf *die Horizontalprojektion* ist daher die Wahl der als Projektionsebene gedachten Horizontalebene gleichgültig. Dagegen hängen die Vertikalabstände, *die Höhen über dem angenommenen Horizont*, davon ab.

Horizontalprojektion und Höhen genügen völlig zur Beantwortung aller Fragen über die Figur des Terrains. Man kann aus ihnen nicht nur die wirklichen Entfernungen und Flächen ableiten — im Gegensatz zu den *horizontalen*, in der Projektion gemessenen, *schiefe* genannt — man erhält auch bequem nächst den Höhenunterschieden die Gefälle der Linienelemente des Terrains. Diese Gröfsen sind so bedeutungsvoll, dafs eine Aufnahme, welche die Figur des Terrains ohne Bezug zur Richtung des Lotes gäbe, schon darum geringe Bedeutung hätte. Gerade die Existenz dieser fundamentalen Richtung erleichtert aber die Aufnahme sehr, wie man erkennt, wenn man diese letztere ohne ihre Mitwirkung ausführen will.

In der Horizontalprojektion fehlt leider eine fixe, mit immer hinreichender Genauigkeit rasch herzustellende Richtung; eine fundamentale Richtung ist zwar als Nordsüdrichtung vorhanden, aber man kann sie meist mit erforderlicher Schärfe nur durch zeitraubende astronomische Messungen erlangen, so dafs man in der Regel auf ihre unmittelbare Benutzung verzichtet. Immerhin ist die direkte Bezug-

nahme auf diese Richtung in einigen Fällen vorteilhaft, ja unentbehrlich, wobei die Magnetnadel dazu dient, die Beziehung herzustellen.

Die Art und Weise, in welcher die soeben ganz im allgemeinen besprochenen Aufnahmen ausgeführt werden, ausführlich wissenschaftlich zu beschreiben, ist Gegenstand der *niedern* Geodäsie (Feldmessen und Nivellieren).

§ 3. Aufnahme im grofsen. Projiciert man die Punkte eines beliebig grofsen Teils der Erdoberfläche auf eine Fläche, die überall zur projicierenden Linie normal steht, so zeigt sich im Vergleiche zu § 2 zweierlei.

1. Folgt man der Lotrichtung eines Punktes, so hört sie mit Verlassen desselben streng genommen im allgemeinen sofort auf, Lotrichtung zu sein. Es ändert sich vielmehr die Lotrichtung von Ort zu Ort und ein beweglicher Punkt, der in jedem Augenblick derjenigen Lotrichtung folgt, die seiner jedesmaligen Lage entspricht, beschreibt eine schwach gekrümmte Linie: die *Lotlinie* (Kraftlinie). Hiernach ist in jedem Punkte der Lotlinie die Tangente Lotrichtung.

2. An Stelle der Horizontalebene, auf welche projiciert wurde, tritt eine krumme Fläche, welche die Lotlinien normal schneidet: eine *Niveaufläche.*

Besonders hervorzuheben unter den Niveauflächen ist die Meeresfläche, welche man sich aber hierbei nur der Schwerkraft der Erde unterworfen und also ruhend denkt, so dafs von der Bewegung durch Ebbe und Flut, durch Winde und andere, Meeresströmungen erzeugende Ursachen abgesehen wird. Diese ideelle Meeresfläche würde den sichtbaren Teil einer Niveaufläche bilden. Man nennt sie die *mathematische Erdoberfläche* oder (nach Listing 1872) das *Geoid*, im Gegensatz zur reellen, der *physischen* Erdoberfläche. Durch ein System von Kanälen, die von der Meeresküste aus ins Innere der Kontinente geführt würden, könnte man sich auch dort das Geoid sichtbar gemacht denken.*) Die ruhenden Spiegel der Teiche und Seeen sind dagegen in der Regel Teile anderer Niveauflächen.

Denken wir uns nunmehr die Lotlinien als projicierende Linien, so ist jetzt im Gegensatz zu § 2 die Auswahl einer bestimmten Niveaufläche als Projektionsfläche notwendig, weil die Projektionen auf verschiedene Niveauflächen nicht identisch sind und namentlich in

---

*) Hierbei ist vorausgesetzt, dafs die mathematiche Erdoberfläche eine kugelartig geschlossene Fläche ist. In der That pflegen wir die Möglichkeit der Tracierung von Kanälen quer durch die Kontinente (abgesehen von technischen Schwierigkeiten) für selbstverständlich zu halten. Die wissenschaftliche Erörterung dieser Frage mufs aber dem zweiten, physikalischen Teil des Buches vorbehalten bleiben.

der Gröfse sich unterscheiden. Fafst man insbesondere zwei Niveauflächen ins Auge, die von zwei benachbarten Punkten einer Lotlinie ausgehen, so bilden beide geschlossene, näherungsweise parallele Flächen, die sich nicht schneiden, sondern von denen die eine die andre vollständig umschliefst. Im allgemeinen hat hiernach die Projektion auf die höher gelegene Niveaufläche den gröfsern Inhalt.

Betrachten wir die Niveauflächen als konzentrische Kugelflächen, so sind die Projektionen einander ähnliche Figuren, deren Seiten im Verhältnis $\varrho : (\varrho + h)$ oder $1 : (1 + \frac{h}{\varrho})$ stehen, wenn ϱ den innern Kugelradius und h den Abstand beider Flächen bezeichnen. Das Verhältnis der Flächen ist

$$\varrho^2 : (\varrho + h)^2 \text{ oder } 1 : \left(1 + \frac{2h}{\varrho}\right)$$

genähert. Die horizontale Entfernung zweier Punkte ist ein Kreisbogen, dessen Länge von der Höhenlage der Niveaufläche abhängt.

Nach dem Vorstehenden würde eine vollständige Aufnahme der physischen Erdoberfläche bewirkt werden können durch die Bestimmung ihrer Projektion auf eine ihrer Gestalt nach bekannte Niveaufläche nebst den Abständen der projicierten Punkte von der letztern, gemessen in den Lotlinien. In der Praxis modificiert sich dies etwas.

Die *höhere* Geodäsie lehrt die Methoden zur Ermittlung der Gestalt der Niveauflächen und die Aufnahme beliebig grofser Teile der Erdoberfläche durch Horizontalprojektion und Höhen mit Rücksicht auf die Gestalt der Niveauflächen.

Die Lösung der erstgenannten Aufgabe ist durch die Thatsache erleichtert worden, dafs den Niveauflächen in grofser Annäherung die Gestalt eines an den Polen schwach abgeplatteten Rotationsellipsoids zukommt. Hierdurch wurde es möglich, aus Messungen an einer beschränkten Anzahl Orten eine genäherte Kenntnis zu erlangen — die genaue Lösung erfordert dagegen ein fast ähnlich detailliertes Studium, wie es für die physische Erdoberfläche nötig ist und da $\frac{8}{11}$ der letzteren Meer und nur $\frac{3}{11}$ Land sind, so ist dieses Studium nur für die kleinere Hälfte der Erdoberfläche durchführbar, aber auch für diese kaum begonnen.

Das genannte Ellipsoid legt man auch bei der 2. Aufgabe zu Grunde, nicht nur, weil die genaue Gestalt der Niveauflächen in der Regel unbekannt bleibt, sondern auch wegen des einfachern Kalküls.

§ 4. **Geographische Begriffe, die von der Gestalt der Niveauflächen unabhängig sind.** Obgleich wir hier die Lehren der mathematischen Geographie und niedern Geodäsie voraussetzen, so ist es doch notwendig, einige im Folgenden erforderliche Begriffe, soweit

nicht schon geschehen, mit Berücksichtigung der wirklichen Gestalt der Niveauflächen scharf zu fassen und zusammenzustellen.

Als unmittelbar gegeben treten die Lotrichtungen und die Rotationsaxe der Erde, die *Erdaxe,* auf. Diese enthält, wie später zu erläutern vorbehalten bleibt, den Erdschwerpunkt, in welchem die Äquatorebene normal zu ihr steht, und sie schneidet die Oberfläche und jede Niveaufläche in einem *Nordpol* und *Südpol.*

An einem Punkte, wo sich astronomische Beobachtungen anstellen lassen, kann aufser der Lotrichtung auch die Richtung nach demjenigen Himmelspole angegeben werden, der über der Horizontalebene des Punktes liegt. Da der Himmelspol nichts anderes ist, als derjenige Punkt des scheinbaren Himmelsgewölbes, der durch die tägliche Rotation keine Ortsveränderung erleidet, so ist er der unendlich entfernte Punkt der Erdaxe und die Richtung nach ihm parallel zur Erdaxe. Die Ebene durch diese Parallele und die Lotrichtung heifst die *Meridianebene* des Punktes.

Sie schneidet die Horizontalebene in der *Nordsüdlinie,* zu welcher die *Ostwestlinie* rechtwinklig gezogen wird. Von oben gesehen ist die Reihenfolge der 4 Himmelsrichtungen im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers Nord, Ost, Süd, West (nach Übereinkunft der Meteorologen mit *N, E, S, W* zu bezeichnen).

Das astronomische Azimut einer Vertikalebene ist ihr Winkel mit der Meridianebene; er wird also in der Horizontalebene gemessen und zwar von der Meridianebene aus südwestlich oder nordöstlich.

Die geographische Breite eines Punktes ist der Winkel zwischen der Lotrichtung des Punktes und der Äquatorebene; *die geographische Länge* derjenige zwischen der Meridianebene des Punktes und einer als Ausgang der Zählung angenommenen Meridianebene. Die Breiten zählt man nördlich und südlich oder positiv und negativ bis 90°; die Längen westlich oder östlich bis 180° oder auch bis 360°, wobei in der Wissenschaft der Astronomie und Geodäsie meist der Meridian (eines markierten Punktes) der Sternwarten zu Greenwich bei London oder zu Paris als Ausgang der Zählung dient.

§ 5. Geographische Begriffe für ein Rotationsellipsoid. Nehmen wir an, dafs sowohl die mathematische als auch die physische Erdoberfläche *ein* abgeplattetes Rotationsellipsoid bilden, so *schneidet* die Lotrichtung jedes Oberflächenpunktes die Erdaxe; demnach wird diese die gemeinsame Durchschnittslinie aller Meridianebenen, und alle Punkte gleicher geographischer Länge liegen in ein und derselben Meridianebene und bilden die als geographischer Meridian benannte ebene, durch beide Pole führende Kurve.

Auch alle Punkte gleicher geographischer Breite liegen auf einer

ebenen Kurve, deren Ebene parallel zur Äquatorebene ist; sie heifst geographischer Parallelkreis, bei null Grad Breite insbesondere geographischer Äquator.

Als *Abplattung* bezeichnet man das Verhältnis des Unterschieds des äquatorialen und polaren Durchmessers zu dem äquatorialen Durchmesser.

§ 6. Geographische Begriffe für den thatsächlichen Zustand. In Wirklichkeit liegt ein Punkt der physischen Erdoberfläche im allgemeinen nicht auch auf der mathematischen Erdoberfläche und diese weicht vom Rotationsellipsoid etwas ab.

Der Abstand eines Punktes vom Geoid, gemessen in der Lotlinie, heifst *Meereshöhe.* Diese ist hiernach nicht die Länge einer geraden, sondern krummen Linie; indefs ist diese Krümmung so gering, dafs sie nur bei den feinsten Untersuchungen Bedeutung erlangt. Sie bewirkt, da die Niveauflächen die Lotlinien normal schneiden, eine Abweichung der Niveauflächen vom Parallelismus.

Die Lotrichtung irgend eines Punktes schneidet in der Regel die Erdaxe *nicht;* daher laufen die Meridianebenen im allgemeinen nur parallel zur Erdaxe, ohne sie zu enthalten. Der Abstand ist jedoch stets gering. Hiernach besitzen nun Punkte gleicher geographischer Länge ebenfalls Meridianebenen, die im allgemeinen nicht zusammenfallen, sondern einander in kleinen Abständen parallel laufen und die sich, wie überhaupt alle Meridianebenen, paarweise in zur Erdaxe parallelen Linien schneiden.

Der geographische Meridian, welcher Punkte gleicher geographischer Länge auf der Geoidfläche verbindet, ist im allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung.*) Dies gilt auch vom *geographischen Parallel* und *geographischen Äquator.* Nur näherungsweise läfst sich durch diese Kurven eine Ebene legen. Müssen wir also mit den letztgenannten geographischen Begriffen bei strenger Auffassung andere räumliche Vorstellungen verbinden, als man es meist gewöhnt ist, so ändert sich doch nichts an den entsprechenden Begriffen für das scheinbare Himmelsgewölbe, wenn wir darunter eine die Erde umschliefsende Kugel von unendlichgrofsem Radius verstehen. Die cölestischen Meridiane und Parallelkreise sind jedenfalls ebene Kurven und zwar Kreise im eigentlichen Sinne des Worts.

Die Begriffe für den thatsächlichen Zustand entwickelte bereits 1860 General *von Schubert* im 52. Band der Astronomischen Nachrichten No. 1245 S. 321.

---

*) Wäre das Geoid ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit zur Erdaxe *schief*liegender kleiner Axe, so würden die geographischen Meridiane auch ebene Kurven sein. (Vergleiche *Fergola, Sulla Posizione dell' Asse di Rotazione etc.* oder das Referat in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft 1876 S. 94.)

Man vergleiche auch die Entwicklungen von *Laplace, Mécanique céleste* t. II l. III p. 109 u. s. w. für eine nahezu kugelförmige aber sonst beliebige Meeresfläche (publiziert im Jahr 1799).

§ 7. **Geozentrische Breite, Länge und Radiusvektor.** Legt man durch die Verbindungslinie eines Punktes der Erde mit deren Schwerpunkt, also durch den Radiusvektor des Punktes, eine die Erdaxe enthaltende Ebene, so ist die geozentrische Länge der Winkel dieser Ebene mit einer andern Ebene durch die Erdaxe, die als Ausgang der Zählung dient; die *geozentrische* oder *verbesserte* Breite aber ist der Neigungswinkel des Radiusvektors zur Äquatorebene.

Die geozentrische Breite ist im Maximum nur etwa $11^1/_2$ Min. kleiner als die geographische; noch weit kleiner ist*) der Unterschied der geozentrischen und geographischen Längen, welcher nur von den Abweichungen des Geoids von einer Rotationsfläche abhängt, während der ersterwähnte namentlich aus der an den Polen abgeplatteten Gestalt hervorgeht.

Der Radiusvektor der Geoidfläche ist im allgemeinen für den Äquator am gröfsten und verjüngt sich nach den Polen allmählich um circa $\frac{1}{300}$. Der Radiusvektor der physischen Erdoberfläche ist näherungsweise um die Meereshöhe von dem gleichgerichteten Radiusvektor des Geoids verschieden; genauer (jedoch noch nicht ganz streng) ist der Unterschied gleich Meereshöhe mal Sekante des Winkels zwischen Lotrichtung und Radiusvektor. Man bemerkt aber leicht, dafs hiermit selbst für 10000^m Höhe nur Centimeter gewonnen werden, weil der Cosinus von $11^1/_2$ Minute von der Einheit nur um $\frac{1}{180000}$ abweicht.

§ 8. **Koordinatensysteme.** Zur gegenseitigen Beziehung der Punkte der Erdoberfläche bieten sich nach dem Vorhergehenden drei Wege.

Geozentrische Breite und Länge und der Radiusvektor bilden ein für *astronomische* Zwecke wichtiges System; geographische Breite und Länge und die Meereshöhe eignen sich zur Beschreibung der gegenseitigen Lage irgend zweier Punkte und bilden so recht eigentlich die *geographischen* Koordinaten; die Elemente des *geodätischen* Koordinatensystems sind Höhen und Horizontalprojektion in Bezug auf eine Niveaufläche, mit Anwendung geometrischer Koordinaten in dieser letzteren, welche unter andern als rechtwinklige Koordinaten oder Polarkoordinaten für die Ebene allgemein geläufig sind. Die höhere Geodäsie bedient sich zur Lösung ihrer Aufgaben namentlich direkter Bestimmungen geodätischer *und* geographischer Koordinaten.

---

*) Abgesehen von Punkten in der Nähe der Pole.

2. Kapitel.

Historische Entwicklung der Kenntnisse von der mathematischen Erdoberfläche.

§ 1. Historische Notizen bis zur Zeit Newtons. Schon im Altertume konnte den seefahrenden Nationen die Krümmung des Meeresspiegels nicht unbemerkt bleiben, womit der erste Schritt zur Annahme der Kugelgestalt geschehen war. Bei den Griechen taucht die Kenntnis von dieser Annäherungsform für die Erdoberfläche vor etwa zwei und ein halb Jahrtausenden auf; *Aristoteles* stellt bereits die beweisenden Erfahrungen zusammen. Soviel bekannt gelangte aber erst (um 220 vor Chr.) der alexandrinische Gelehrte *Eratosthenes* zu einem wissenschaftlich begründeten Wert für den Umfang (und damit für den Krümmungsradius) der als Kugel betrachteten Erde; er berechnete ihn aus der geschätzten horizontalen Entfernung von Alexandria und Syene, und der astronomisch bestimmten Konvergenz der Lotrichtungen an den Endpunkten der Strecke, schlofs also von Kreisbogen und Zentriwinkel auf den Umfang oder Radius des Kreises.

Die folgenden achtzehn Jahrhunderte brachten keinen bemerkenswerten Fortschritt, wenn auch durch einige der wenigen nachfolgenden Messungen in diesem Zeitraume die Sicherheit des von *Eratosthenes* erhaltenen Wertes weit übertroffen worden ist. Die Einsicht, dafs die Kugelform nur eine rohe Annäherung und durch die Form des schwach abgeplatteten Rotationsellipsoids als einer weit besseren Annäherung zu ersetzen sei, brachte erst das siebzehnte Jahrhundert unter dem Einflufs von *Copernicus'*, *Galileis*, *Keplers*, *Huygens'* und *Newtons* reformatorischen Lehren. Was diese Männer leisteten und schufen, dürfte im allgemeinen dem Leser bekannt sein; hier ist nur an das, was die Geodäsie speziell betrifft, zu erinnern.

So heben wir hervor, dafs *Copernicus* in Verbindung mit der Aufstellung seines Planetensystems (1543) auch auf die Notwendigkeit der Annahme eines täglichen Umschwunges der Erde hinwies.

Zu beinahe denselben Anschauungen war zwar schon, ohne dafs hiervon *Copernicus* Kenntnis gehabt zu haben scheint, (um 270 vor Chr.) der Grieche *Aristarch* gelangt. Aber *Aristarchs* Lehre blieb ohne Einflufs: denn die Astronomie konnte sich eben noch lange mit Theorieen behelfen, die dem Augenschein besser als jene entsprachen. Erst nach fast zwei Jahrtausenden lernte man die Vereinfachungen schätzen, welche sie der theoretischen Astronomie gab. Ein *Kepler* und *Galilei* nahmen die Lehre jetzt auf und während der eine sie

direkt mit Benutzung von *Tycho Brahes* langjährigen, sorgfältigen Beobachtungen sowie älterer astronomischer Erfahrungen, die jene Jahrtausende zur Reife bedurften, weiter ausbildete (*Astronomia nova de motibus stellae Martis etc.* 1609), stellte der andere die Gesetze der Fall- und Pendelbewegung fest (1602) und schuf dadurch die Grundlage einer Mechanik der Körper.

Huygens untersuchte bereits das physikalische Pendel und die Zentralbewegung (1673) und erkannte auch den Einflufs der Schwerkraft auf die Gestalt der Erde. Vollendet wurde die Reform durch *Newtons* Theorie der allgemeinen Gravitation (1666 gefunden, 1686 in dem Werke: *Philosophiae naturalis principia mathematica* auf die Bewegung der Himmelskörper u. s. w. angewandt).

Huygens, der grofse Zeitgenosse *Newtons*, hatte bezüglich der Gravitation seine eignen Ansichten und trug Bedenken, *Newtons* Theorie zu acceptieren; er nahm an, dafs die Anziehungskraft der Erde nicht von ihren einzelnen Massentheilen, sondern gewissermafsen von einem Zentralpunkt ausgehe und beschränkte den Bereich ihrer Wirksamkeit auf die Erde selbst, während *Newton* blofs aus Vorsicht wegen mangelnden Beweises die Gültigkeit des Gravitationsgesetzes nicht auch über das Sonnensystem hinaus ausdehnte.*) Die Verbindung der Anziehungskraft mit der Zentrifugalkraft (die er zuerst aufgefunden) zu einer Resultante normal zur Oberfläche führte nun *Huygens* unter Annahme von $\frac{1}{289}$ als Verhältnis der Schwungkraft zur Schwere am Äquator zu $\frac{1}{578}$ als Abplattung, der Hälfte jenes Wertes (1688).

Newton dagegen legte den Betrachtungen ein homogenes Ellipsoid zu Grunde, berücksichtigte die Anziehung aller Teile und fand als Abplattung $\frac{1}{230}$ unter Annahme derselben relativen Gröfse der Zentrifugalkraft (1686). Er bemerkte bereits, dafs die Abplattung kleiner werden müfste, falls die Dichte nach dem Zentrum zunähme, und wir wissen jetzt, dafs in der That das Rechte in der Mitte liegt, denn die Erddichte ist weder konstant, noch hat sie solche Gröfse und Richtung als wäre die ganze Masse in *einem* Punkte konzentriert; die Dichtigkeit wächst vielmehr von 2,6 an der Oberfläche bis ungefähr 11 im Zentrum (Durchschnitt 5,6). Immerhin genügten die theoretischen Betrachtungen von *Huygens* und *Newton* zur Erklärung der Erfahrung *Richers*, welcher 1672 bei einer astronomischen Expedition von Paris nach Cayenne sich genötigt sah, das Pendel seiner astronomischen Uhr, um wieder Sekundenschwingungen zu erhalten, $1\frac{3}{4}$ Linie zu verkürzen, was auf eine Verminderung der Schwerkraft gegen Paris

*) Vergl. hierzu: *Isenkrahe,* das Rätsel der Schwerkraft. 1879. S. 87 ff.

hinwies. Allein obwohl er bei der Rückkehr wieder die erste Pendellänge herstellen mufste, war man doch geneigt, Beobachtungsfehler oder lokale Verhältnisse als Grund zu vermuten. Denn auch neuen zustimmenden Beobachtungen, die in den nächsten zehn Jahren gemacht wurden, widersprachen wieder andere. Man konnte daher auf diesem Wege keine Bestätigung erwarten und die neuen Theorieen, diejenige von der Rotation der Erde nicht ausgeschlossen, bedurften derselben um so mehr, je eingreifender sie waren. Selbst die Entdeckung der Axendrehung des Planeten Mars durch *Huygens* (1659) und die der Abplattung des Planeten Jupiter ($\frac{1}{14}$) durch *Cassini* den Älteren (1666; 1691 publiziert) beseitigten die Zweifel nicht, weil direkte Bestimmungen der Erdkrümmung nach demselben Princip, das schon *Eratosthenes* anwandte, eine Verlängerung der Erde in Richtung ihrer Axe anzudeuten schienen.

§ 2. **Von Newton bis Laplace.** Setzt man voraus, dafs die Erde eine Kugel sei, so genügt eine einzelne Bestimmung des Krümmungsradius wenigstens vom theoretischen Standpunkte. Für die rotationsellipsoidische Gestalt aber sind zwei solche Messungen nötig, weil die Ellipse von 2 Parametern abhängt. Nimmt man Meridianbögen (wie schon *Eratosthenes*), so ist es am vorteilhaftesten, den einen thunlichst am Äquator, den andern möglichst nahe dem einen der Pole zu legen. Solche Messungen nun nennt man jetzt *Breitengradmessungen*, welcher Gebrauch anscheinend aus dem 17. Jahrhundert stammt, aus der Zeit, wo man anfing die elliptische Gestalt zu untersuchen und daher aus einer Messung nicht den ganzen Umfang der Erde, sondern nur etwa die Länge des elliptischen Bogens für 1° Breitendifferenz ableiten konnte.

1669 begann der Astronom *Picard* auf Veranlassung der 1666 gegründeten Akademie der Wissenschaften eine Messung in Frankreich und bereits er vermutete Abweichungen von der Kugelgestalt. Seine Messung verdient zunächst darum hier Erwähnung, weil sie die erste derjenigen ist, bei welchen die zahlreichen und wichtigen Erfindungen des genannten Jahrhunderts auf dem Gebiete der Konstruktion mathematischer Instrumente (wir nennen Pendeluhren und Federuhren, Fernrohr und Mikroskop, Röhrenlibelle, Vernier) Einflufs gewannen. Insbesondere haben *Picard* und *Azout* das mit Fadenkreuz versehene Fernrohr zuerst bei den astronomischen und geodätischen Messungen benutzt.

Aufserdem kam bei dieser Messung zum ersten Male die Methode der *Triangulation* zu gröfserer Verwendung, welche Methode der Niederländer *Snellius* um 1615 in die geodätische Praxis eingeführt hatte. Dieses Verfahren gestattete die Entfernung zweier Punkte

weit genauer indirekt zu finden, als mittelst bisher beliebter direkter Messungen, indem man nämlich eine Reihe an einander hängender Dreiecke zwischen jene einschaltete, die Winkel der Dreiecke und für eins der Dreiecke auch eine Seite maſs und daraus die unbekannte Entfernung berechnete. (Noch in den Jahren 1633—1635 maſs indes *Norwood* mit Kette und Bussole, auf Wegen u. s. w., direkt einen circa 40 geographische Meilen langen Bogen von London bis York!)

Die von *Picard* begonnene Messung wurde ganz Frankreich durchsetzend in Unterbrechungen bis 1718 durch verschiedene Gelehrte fortgesetzt. Das darüber von *J. Cassini* 1720 publizierte Werk zeigte nun, daſs innerhalb Frankreichs die gemessene Bogenlänge der Meridiangrade nach Norden etwas abnahm, was auf längliche (citronenförmige) Erdgestalt anstatt auf abgeplattete (orangenförmige) hindeutete.

Der Widerspruch mit den Theorieen von *Newton* und *Huygens* wurde anfangs von einigen dazu benutzt, diese letzteren anzugreifen, weil man jene Messungen für sehr genau hielt. Sie waren auch weit genauer als die früherer Zeit, aber man erkannte doch bald, daſs immerhin die Beobachtungsfehler noch groſs genug sein konnten, um den Einfluſs der Abplattung für einen so kleinen Abstand der Meridiangrade, wie ihn Messungen innerhalb Frankreichs nur aufweisen, ganz zu verdecken.

Die Sache entschied sich in einem den dynamischen Theorieen günstigen Sinne durch die nunmehr von Frankreich aus unternommenen Breitengradmessungen in Peru (1735—1743) und Lappland (1736—1737). Die erstere genauere von beiden gab mit dem revidierten französischen Bogen eine Abplattung gleich $\frac{1}{304}$.

Seit dieser Zeit nun und besonders seit Ende des 18. Jahrhunderts sind zahlreiche Breitengradmessungen mit immer mehr verfeinerten Hilfsmitteln ausgeführt worden.

Auch *Längengradmessungen*, bei denen je ein Parallelbogen geodätisch und die Längendifferenz astronomisch bestimmt werden, wurden versucht, doch begegnete man bei ihnen anfänglich Schwierigkeiten in Bezug auf die genaue und bequeme Ausführung der astronomischen Arbeiten, welche erst neuerdings durch die elektrische Telegraphie ganz gehoben worden sind.

Zu der rein geometrischen Methode der Gradmessungen gesellten sich im Laufe des 18. Jahrhunderts durch die Ausbildung der Mechanik des Himmels noch andere Methoden zur Berechnung der Abplattung. *Clairaut* zeigte 1743, wie man mittels einer einfachen Formel aus dem Unterschied der Schwerkraft am Äquator und an den Polen der Erde die Abplattung berechnen könne; *d'Alembert* untersuchte (1749)

den Zusammenhang zwischen der Figur und Massenanordnung der von Mond und Sonne angezogenen Erde und der Bewegung der Erdaxe im Raume, welche einesteils sich als eine stetige Bewegung der Durchschnittslinie von Äquator und Ekliptik auf dieser äufsert (Präzession der Tag- und Nachtgleichenpunkte, von *Hipparch* [150 vor Chr.] entdeckt), andernteils aber als kleine periodische Veränderungen der Lage der Himmelspole gegen die Fixsterne (Nutation, von *Bradley* entdeckt und 1748 publiziert) bemerkt wird; endlich wies *Laplace* am Schlusse des Jahrhunderts auch in der Theorie des Mondlaufs diejenigen bereits empirisch gefundenen periodischen Glieder nach, welche von der Figur und Massenanordnung der Erde herrühren.

Nach allen diesen Methoden leitete *Laplace* im 2. Teile seiner Himmelsmechanik die Abplattung der Erde ab (die *Gröfse* kann nur aus den Gradmessungen und etwa noch aus der Mondparallaxe in Verbindung mit Schweremessungen gefunden werden) und er erhielt in ziemlich guter Übereinstimmung dieselbe aus allen etwas *kleiner* als $\frac{1}{300}$, während jetzt alle diese Methoden, nachdem zahlreichere Beobachtungen vorliegen, auf einen nicht unerheblich gröfsern Wert hindeuten.

Laplace konnte hierbei bereits eine gröfsere Anzahl Breitengradmessungen, sowie Pendelbeobachtungen verwerten und es gab ihm dies Veranlassung zu interessanten Lösungen des Problems der Ausgleichung der Beobachtungsfehler, welche allerdings bald darnach durch die praktikablere Methode der kleinsten Quadrate ersetzt worden sind. Er bemerkte bei diesen Ausgleichungsrechnungen unzweifelhaft, dafs die mathematische Erdoberfläche nicht genau mit der Form des abgeplatteten Rotationsellipsoids übereinstimmt, weil die übrigbleibenden (berechneten) Fehler der Messungen — auch Azimutmessungen zeigten grofse Abweichungen — bei weitem das zulässige Mafs von Beobachtungsfehlern überschritten, dafs aber immerhin diese Form eine gute Annäherung bietet.

Eine eingehende Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Theorieen, sowie auch der Grad- und Pendelmessungen zum Teil, von *Newton* bis *Laplace*, giebt

Todhunter, A History of the mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth. 2 Bde. in 8° mit 476 und 508 S. London 1873.

Nächstdem benutzten wir hauptsächlich noch:

Mädler, Geschichte der Himmelskunde von der ältesten bis auf die neueste Zeit. 2 Bde. in 8°. Braunschweig 1873.

Rud. Wolff, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 2 Bde. in 8°. Zürich 1870 und 72.

Laplace, Traité de Mécanique céleste. Bd. 1 u. 2 in 4°. 1799. Insbesondere ist Buch 3 S. 126 ff. und der Überblick Buch 5 S. 353—355 zu vergleichen, sowie in Bezug auf *Laplaces* Bemerkungen über die Ursache der Anomalieen

Buch 3 S. 139 ff. — Bd. 5 (1825) S. 2—22 giebt einen geschichtlichen Überblick der dynamischen Untersuchungen in Bezug auf Figur und Rotation der Erde.

Zur *Ergänzung* kann dienen:

E. Mayer, Über die Gestalt und Gröfse der Erde; eine historisch geodätische Studie. Fiume 1876. 74 S. in 8° mit einer Übersichtskarte (Separat-Abdruck aus den *Mitteilungen im Gebiete des Seewesens*). Preis 1,8 Mark.

Poggendorff, Bibliographisch-litterarisches Handwörterbuch. 2 Bde. Leipzig 1863.

§ 3. **Das 19. Jahrhundert** brachte, weil man die Unzulänglichkeit der Bestimmung der Abplattung der Erde aus wenigen Gradmessungen erkannt hatte, schon in seiner ersten Hälfte eine gröfsere Anzahl solcher Operationen an verschiedenen Orten der Erde. Nach *Laplace* war es namentlich *Bessel*, der (in kritischer Diskussion der Resultate der bis dahin ausgeführten Messungen) 1837 ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ableitete, welches er 1841 mit Bezug auf einen bekannt gewordenen Fehler einer der benutzten Gradmessungen verbesserte. Als Abplattung fand er $\frac{1}{299}$. Verschiedene nachfolgende Berechnungen haben aber mit Zuziehung des immer mehr anwachsenden Materials es wahrscheinlich gemacht, dafs eine Vergröfserung dieses Wertes der Erde im ganzen besser entsprechen würde. Die Ansichten über das Mafs dieser Vergröfserung sind noch verschieden; viele sind geneigt, die Zahl $\frac{1}{289}$, dieselbe Zahl, welche das Verhältnis von Zentrifugal- und Schwerkraft am Äquator ausdrückt, für die angemessenste zu halten, da sie namentlich zahlreiche Schweremessungen gut befriedigt.

Die Dimensionen, welche *Bessel* 1841 erhielt, sind jedenfalls eine noch immer sehr brauchbare Annäherung, deren man sich um so lieber vielfach bedient, als zahlreiche Tafeln für Funktionen der Dimensionen des Erdkörpers darnach berechnet sind. Wir kommen weiterhin auf sie zurück.

Unter den neuern Berechnungen finden sich auch solche, welche versuchen, die Ergebnisse der Gradmessungen durch Annahme einer andern Hypothese als der des abgeplatteten Rotationsellipsoids zu besserer Übereinstimmung zu bringen. *Bowditch*, *Clarke*, *Paucker*, *Ritter* legten der Rechnung eine Rotationsfläche mit einem nicht elliptischen Meridianschnitt zu Grunde; *Schubert* und auch *Clarke* wiederum verfolgten die Hypothese des dreiaxigen Ellipsoids; neuerdings endlich ging *Fergola* von der Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoids mit zur Erdaxe schiefliegender kleiner Axe aus. Der Erfolg aller dieser Bemühungen ist als ein negativer zu bezeichnen, denn es gelang weder die Elemente solcher Körperformen mit hinlänglicher Sicherheit zu bestimmen, noch einen wesentlich bessern Anschlufs an die Beobachtungen zu erzielen.

Überdies ist man jetzt allgemein überzeugt, dafs Gradmessungen allein nicht genügen, um die Gestalt der mathematischen Erdoberfläche, im ganzen genommen, sicher zu erkennen; namentlich weil sie nur auf dem Festlande ausgeführt werden können und weil dieses nur $\frac{3}{11}$ der Oberfläche bedeckt. Glücklicher Weise lassen sich Schweremessungen mit dem Pendel auch auf den zahlreichen Inseln des Oceans ausführen und wenn zur Zeit auch noch nicht eine alle Anforderungen befriedigende Anzahl solcher Messungen vorliegt, so genügen sie doch bereits dazu, die Wahrscheinlichkeit *der* Vermutung beträchtlich zu verstärken, dafs man im abgeplatteten Rotationsellipsoid*) eine gute Annäherung hat. Sie zeigen nämlich, dafs das Geoid mit einem solchen bis auf Bruchteile des Radiusvektors von der Ordnung des Quadrats der Abplattung zusammenfällt und weder ein dreiaxiges Ellipsoid ist, noch einen erheblichen Unterschied der nördlichen und südlichen Hälfte aufweist.

Die vorhandenen Abweichungen lassen sich durch Unregelmäfsigkeiten in der Massenlagerung der Erdrinde erklären und man ist bis jetzt auf eine unregelmäfsige Massenlagerung im Erdinnern nicht hingewiesen worden. Es treten mithin die Abweichungen entweder als *lokale* auf, als eine Folge der lokalen Terraingestaltung, der verschiedenen Gesteinsdichten und der Existenz unterirdischer Hohlräume; oder sie haben eine kontinentale Verbreitung, als eine Folge der Erhebung des Festlandes über das mittlere Niveau des Meeresgrundes und der Ungleichheit der Meerestiefen.

Fafst man die Abweichungen gegen eine gewisse ideelle Massenlagerung, welche ein sich dem Geoid anschliefsendes Rotationsellipsoid ergeben würde, als positive und negative Störungen auf, so ist deren unmittelbar ersichtliche Wirkung eine positive oder negative Anziehung, die sich mit der normalen Schwere kombiniert und deren Richtung, die Lotrichtung des ideellen Ellipsoids, in die reelle des Geoids überführt. Der Richtungsunterschied beider, die *Lotablenkung*, beträgt durchschnittlich einige Sekunden; in der Nähe von Bergen, Gebirgen und an den Meeresküsten steigert sie sich aber leicht auf 10″ und mehr, ohne indes einen Maximalwert von etwa $1\frac{1}{2}'$ zu überschreiten.

Die weitere geometrische Konsequenz der Lotablenkungen sind Erhebungen und Senkungen des Geoids gegen das Ellipsoid, welche indessen nach ihrem Gesamtbetrage sicherer aus Schweremessungen

*) Manche Autoren bezeichnen dasselbe als *Sphäroid;* wir heben diesen Ausdruck aber zur Bezeichnung der näherungsweise kugelförmigen Flächen im allgemeinen auf und werden häufig, wo Verwechslung nicht möglich ist, das abgeplattete Rotationsellipsoid einfach *Ellipsoid* nennen.

als aus Lotablenkungen erkannt werden. Diejenigen von mehr kontinentalem als lokalem Charakter mögen durchschnittlich gegen 200^m Maximalabstand vom Geoid erreichen; ob irgendwo auch 1000^m vorkommen, wie einige annehmen, ist noch nicht genügend untersucht. Dagegen ist z. B. unterhalb des Harzes die lokale Erhebung im Maximum noch nicht 2^m (es ist dies also nicht die überhaupt daselbst vorhandene Abweichung vom Geoid, sondern nur derjenige Teil, welcher durch die lokalen Verhältnisse der Massenlagerung erzeugt wird).

Einen beträchtlichen Einfluſs haben die Lotablenkungen auf die Gröſse des Krümmungsradius, weil hierbei nicht ihr Betrag selbst, sondern dessen Änderung mit dem Orte auf dem Geoid in betracht kommt. Trotz der Kleinheit des Ablenkungsbetrages ist diese Änderung meist verhältnismäſsig groſs, sodaſs Abweichungen des Krümmungsradius um mehrere Prozent als Regel angesehen werden können und noch weit gröſsere nicht selten sind. Jedoch ist nirgends ein Krümmungswechsel konstatiert worden, und nach der Gestaltung der physischen Erdoberfläche und der geognostischen Beschaffenheit auch an keiner Stelle zu erwarten. Das Geoid zeigt also nirgends wie die physische Erdoberfläche Berge und Thäler, sondern nur Abnahmen und Zunahmen der nach dem Erdinnern zu *immer konkaven* Krümmung.

Eine Übersicht der meisten neuern Rechnungsergebnisse für die Erdgestalt enthält nachstehende Schrift:

Listing, Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Gröſse der Erde (Nachr. der Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen). 1872. 66 S. in 16°. Als Separatabdruck für 0,8 Mark.

Zum Teil dient auch *Mayer* a. a. O. S. 65 zur Ergänzung; ferner für *E. Ritters* Sphäroid *Wolff* a. a. O. Bd. 2, S. 141; für *Schuberts* Rechnungen *Listing* a. a. O. S. 32 und im Auszug auch Astronom. Nachr., Bd. 51 u. 52. (Nr. 1201 u. 1231). Über *Fergolas* bereits S. 8 erwähnte Abhandlung vergl. Vierteljahrsschr. der Astronom. Ges. Bd. 11, S. 94 u. 280.

Formeln für den nichtelliptischen Meridian eines Rotationssphäroids giebt bereits *Legendre* in einem Memoire, welches der Schrift *Delambres, Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien.* 1799. 4°, vorgedruckt ist.

Paucker berechnet in einer Abhandlung über *die Gestalt der Erde* aus 11 Gradmessungen (dieselben, welche *Encke* im Berl. Astronom. Jahrb. 1852, S. 340 aufführt) für den Radiusvektor der Erde den Ausdruck:

$$3272553{,}2083^t\,(1 - 0{,}003399065 \sin^2 - 0{,}000051868 \sin^4$$
$$+ 0{,}000001775 \sin^6 - 0{,}000000002 \sin^8)\,,$$

wobei sin den Sinus der geozentrischen Breite bedeutet. Die Abplattung

wird also $\frac{1}{289,9256}$, der Aquatorialradius 6378325,0^m *), die Abweichung von der Ellipse gleicher Abplattung in 45° geozentrischer Breite 107,0^m nach aufsen. (Bulletin de la Classe physico-mathém. de l'Ac. imp. des sciences de St. Pétersbourg. Bd. 12 und 13. 1854 und 55. S. 97—119 und 225 ff.).

Die Berechnungen von *Bowditch* und *Clarke* sind im Hauptwerke der englischen Vermessung *Ordnance Trigonometrical Survey, Principal Triangulation,* 1858, (vergl. *Listing* a. a. O. S. 29) aufgeführt; der erstere gab sie als Note zu seiner Übersetzung der Méc. cél., Boston 1832. Diese Rechner setzen den Krümmungsradius im Meridian gleich $A + Bs_1^2 + Cs_1^4$, wo s_1 der Sinus der geographischen Breite, ABC zu bestimmende Konstanten sind. Die Abweichung in 45° Breite ist 18^m nach innen bei *Bowditch* (5 Bögen), 115^m nach aufsen bei einer ersten Rechnung von *Clarke* ohne die russische Gradmessung und 54^m nach aufsen bei vollständigerer Rechnung (wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 22^m). Alle diese Rechnungen zeigen also im Verhältnis zum mittlern Erdradius sowohl als auch im Vergleich zu den kontinentalen Erhebungen und Senkungen nur eine geringe Abweichung von der Ellipse an, deren Realität aber dabei zweifelhaft bleibt und gegenwärtig noch gar nicht konstatiert werden kann.

In einer sehr klaren Weise äufsern sich *Gaufs* (1828 in der Schrift über den Breitenunterschied von Göttingen und Altona S. 73) und *Bessel* (1837 in der Abhandlung über den Einflufs der Unregelmäfsigkeiten der Erde auf geodätische Messungen) über die Definition des Geoids und über seine Abweichungen vom Ellipsoid. Überdies untersucht schon *Laplace* Niveauflächen in verschiedenen Höhen (Méc. cél. Buch 3, Kap. 7) und Lotabweichungen.

Die Bedeutung der Schweremessungen für die Bestimmung der Erdgestalt kannte man bereits zu Anfang des Jahrhunderts. Dafür sprechen die zahlreichen Expeditionen zur Ausführung solcher und unter andern auch der Artikel *Erde* in *Gehlers* physikalischem Wörterbuch 3. Bd. S. 825—1141; 1827 von *Muncke* (nach *Ph. Fischer*) verfafst. Neuerdings wurde wiederholt darauf hingewiesen; vergleiche unter andern nachstehende Schriften:

Ph. Fischer, Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868. 318 S. in 8°. Hier werden auch die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid mittelst geschätzter Lotablenkungen berechnet. Vergleiche insbesondere S. 84, 92 u. 275. — Ähnlich wie *Fischer* bei der Berechnung der Dimensionen des Erdellipsoids (vergleiche *Listing* a. a. O. S. 47) verfuhr gleichzeitig *H. J. Klein* in seinem Werke: *Das Sonnensystem* u. s. w., Braunschweig 1869. Er nahm nämlich entsprechend den Schweremessungen als Abplattung $\frac{1}{288}$ und fand hiermit (S. 87) aus den Gradmessungen den Äquatorialradius gleich 3272766,1^t oder 6378739,9^m, mithin 402^m mehr als nach *Fischers* Rechnung aus der französisch-englischen Messung allein.

G. G. Stokes, On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth. Transactions of the Cambridge Phil. Society. VIII, Part V, p. 672—695 (Jahrgang 1849). Diese Schrift zeigt unter andern die Verwendung der Schweremessungen zur Bestimmung der Abstände von Geoid und Ellipsoid.

---

*) Es ist 1 Toise gleich 864 Par. Linien und gesetzlich 1 Meter genau gleich 443,296 Par. Linien; daher:

$$1^t = 1{,}9490363098^m \ldots, \qquad 1^m = 0{,}513074074^t \ldots$$

Über die geodätischen Mafseinheiten vergl. *Mayer* a. a. O. S. 34 u. 48.

§ 4. Gegenwärtige und zukünftige Untersuchungen. Insofern die Messungen zur Zeit über die Erdgestalt im allgemeinen schon einen recht befriedigenden Aufschlufs gegeben haben, ist es begreiflich, dafs man sich jetzt besonders dem Studium spezieller Krümmungsverhältnisse widmet. Doch werden auch immer mehr Daten gewonnen, die Kenntnis der allgemeinen Gestalt zu verbessern.

Die umfangreichsten Arbeiten sind gegenwärtig in Europa im Gange. Aus leicht ersichtlichen Gründen war dieses von jeher das best bearbeitete Operationsfeld der Geodäten. Bis um die Mitte des laufenden Jahrhunderts hatte man hier die französische Breitengradmessung durch ganz England verlängert und auf 22° 10′ Ausdehnung in Breitendifferenz (Amplitude) gebracht; dazu war im Osten die 25° 20′ in Amplitude haltende russische Breitengradmessung gekommen. Jedoch fehlte es zu dieser Zeit an einer entsprechend ausgedehnten Operation zwischen jenen beiden, wozu nur erst Anfänge sich fanden. Dafs auch diese jetzt im Gange ist, hat Generallieutenant *Baeyer*, der Mitarbeiter *Bessels* bei der ostpreufsischen Gradmessung, bewirkt (1861). Zunächst war nur Mitteleuropa ins Auge gefafst, aber schon nach einem Lustrum erweiterte sich die Operation zur *europäischen Gradmessung*.

Hierbei werden aufser den rein geodätischen Messungen nicht nur Breiten-, sondern auch geographische Längen- und Azimutmessungen vorgenommen — jene haben durch die Verwendung der elektrischen Telegraphie eine hinlängliche Genauigkeit gewonnen, um neben den Breitenmessungen gleichwertige Elemente der Untersuchung zu bilden, und die Azimutmessungen geben für Spezialstudien einen wertvollen Ersatz der Längenbestimmungen. Je genauer sich die astronomischen Messungen ausführen lassen werden, um so tiefer wird man auch ins Detail eindringen können.

Nächstdem werden die Schwerkraft und die Meereshöhe (durch präzise geometrische Nivellements) an vielen Orten gemessen, wodurch Anhaltspunkte einesteils für die Erforschung von Ursachen lokaler Lotanziehungen, andernteils für die etwa eintretende allmähliche Hebung oder Senkung der Kontinente und für sonstige Verschiebung der Massen der Erde gewonnen werden.

Ein besonders hervorragendes Glied der europäischen Gradmessung bildet die Längengradmessung auf dem 52. Breitenparallel, die sich vom Ural bis zur Westspitze Irlands über 68° 31′ Längenunterschied erstreckt. Sie wurde bereits 1857 von dem Direktor der Sternwarte Pulkowa bei Petersburg, *W. Struve*, entworfen und kann jetzt als beendet betrachtet werden. (Vergl. *Petermanns Mitteilungen* 1873 S. 332.)

Alle drei Jahre in der Regel vereinigen sich die Gradmessungs-

kommissare der beteiligten Staaten zu einer Konferenz; alle Jahre jedoch publiziert das königlich preufsische geodätische Institut, zugleich Zentralbureau der Gradmessung, einen Bericht über die Fortschritte der Arbeiten unter dem Titel: *Generalbericht über die europäische Gradmessung.* (In 4⁰. Berlin, Verlag von *G. Reimer.*) Derselbe ist meist kombiniert mit den *Berichten über die Verhandlungen der allgemeinen Konferenz.*

Die Ergebnisse der Messungen sollen das Mittel bieten, zu erkennen, wie im allgemeinen die Geoidfläche für Europa von einem Rotationsellipsoid abweicht. Für Einzelheiten sind Operationen nötig, bei denen die astronomisch bestimmten Punkte weit dichter liegen, als sonst (nämlich in nur 1 bis 2 Meilen Abstand gegen 10 Meilen und mehr im andern Falle). Eine derartige Untersuchung hat das genannte geodätische Institut für den Harz in Arbeit.

Wie schwierig und mühsam es ist, den Charakter der Geoidfläche zu studieren, dies zeigt unter andern die englische Landesvermessung (vergl. das Hauptwerk *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 712ff.), deren Ergebnis in dieser Hinsicht trotz immerhin zahlreicher astronomischer Stationen (30 bis 40) mehr das war, eine Anzahl wesentlich lokaler Lotablenkungen gegen ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, das bei $\frac{1}{280,4}$ Abplattung vom allgemeinen Erdellipsoid wenig abweicht, kennen zu lehren und also die Brauchbarkeit desselben zur Angabe der allgemeinen Krümmungsverhältnisse auch für England zu bestätigen, als das, spezielle Angaben über Krümmungsverhältnisse wegen des rasch wechselnden Charakters derselben zu gestatten. Dergleichen ist auch anderwärts hervorgetreten, zuerst vielleicht bei der ostpreufsischen Gradmessung (1838; vergl. *Abhandlungen* von *F. W. Bessel*, herausgegeben von *Engelmann.* Band 3, Leipzig 1876; S. 135).

Ob man, wie für England geschehen, ein möglichst anschliefsendes *Referenzellipsoid* für Europa berechnen wird, lassen wir dahingestellt. Wahrscheinlich wird das *Bessel*sche Ellipsoid vollkommen genügen, um als Ausgang der Spezialstudien über die Geoidfläche zu dienen. Die Abweichungen von der Form des Rotationsellipsoids haben zufolge ihrer Entstehung so wenig mit der Gestalt irgend einer einfachen Fläche zu thun, dafs man auch schwerlich durch die Wahl einer andern Form, wie eines dreiaxigen Ellipsoids z. B., einen erheblichen Gewinn in der Darstellung der Krümmungsverhältnisse erzielen dürfte.

Nächst Europa ist der englische Teil von Ostindien im Laufe dieses Jahrhunderts bis in die Gegenwart mit umfassenden Ver-

messungsarbeiten bedacht worden (vergl. *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft* 1873. Band 8, S. 14ff.); auch auf den im niederländischen Besitz befindlichen Inseln werden seit jüngster Zeit solche Messungen ausgeführt, welche die Kenntnis der Erdgestalt im allgemeinen fördern werden. Derartige Arbeiten sind ferner seit einigen Decennien in den Vereinigten Staaten Nordamerikas an den Küsten und jetzt auch im Innern im Gange; ebenso in Ägypten, Algier, Chile. In Brasilien ist eine bedeutende Längen- und Breitengradmessung in Vorbereitung (9 bis 10 Längengrade in 23° südlicher Breite, 35 Breitengrade in 10° Länge westlich von Rio Janeiro).

Einer durch ihre Ergebnisse interessanten Operation im Kaukasus wird in dem Generalbericht über die europäische Gradmessung von 1871 (publiziert 1872) S. 49ff. gedacht. Danach ist unter andern für 2 noch nicht 1 Breitengrad von einander abstehende Punkte 54″ Lotablenkungsdifferenz beobachtet. (Vergl. auch *Petermanns Mitteilungen* 1862 Band 10, S. 365.)

Man hat sogar daran gedacht, Nordpolexpeditionen für Gradmessungszwecke nutzbar zu machen.

Börgen und *Copeland* maſsen 1870 an der Ostküste Grönlands einen 40 Minuten langen Bogen geodätisch, um die Möglichkeit genauer Winkelmessungen in höheren Breiten zu konstatieren. Die Breiten der Endpunkte wurden nur aus Sonnenhöhen abgeleitet, da die Operation eine blose Rekognoszierung sein sollte. Vergl. S. 19 der Schrift *Zweite deutsche Nordpolarfahrt*; 1869—70. Berlin 1871. (Das Hauptwerk über diese Expedition war dem Verfasser nicht zur Hand.)

Hiernach ist das Interesse für Gradmessungen hinreichend rege, um von dieser Seite her eine reiche Förderung der Kenntnis der Erdgestalt erwarten zu können. Man darf auch hoffen, daſs die so sehr wichtigen Messungen der Schwerkraft, welche nach den glänzenden Operationen in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts jetzt mehr gelegentlich ausgeführt worden sind, wieder in systematischer Weise aufgenommen werden werden. Durch sie ist mit verhältnismäſsig wenig Kosten weit mehr als mit Gradmessungen für die allgemeine Kenntnis des Geoids zu erlangen, ja sie sind zum Teil durch diese gar nicht zu ersetzen, weil sie gröſserer geographischer Verbreitung fähig sind.

Die Schweremessungen gestatten auch die Abstände des Geoids vom mittleren Rotationsellipsoide zu schätzen; wir müssen aber bemerken, daſs die bezüglichen Rechnungen nicht so einfach sind, als man oft glaubt und daſs sie nicht immer richtig angestellt worden sind. Korrekte Formeln gab *Stokes* a. a. O.

Von sehr untergeordneter Bedeutung wird es dereinst sein, wenn die Kenntnisse über das Geoid sich entsprechend vermehrt haben

werden, ein solches abgeplattetes Ellipsoid abzuleiten, das bei gleichem Volumen sich jenem möglichst anschliefst. Weit wichtiger ist es, Schlüsse auf die Massenlagerung im Erdinnern zu versuchen, wobei man allerdings der Schwierigkeit begegnet, dafs bis zu gewissem Grade die Gestalt und Lagerung der Niveauflächen von der Massenanordnung unabhängig ist (z. B. geben gewisse homogene Kugelschalen verschiedener Dicke dieselben Niveauflächen aufserhalb). Hierdurch werden aber keineswegs alle Schlüsse vereitelt.

Die Gradmessungsarbeiten und Schweremessungen, welche nur sehr allmählich ausgeführt werden können, setzen infolge dessen eine ausreichende Konstanz der Niveauflächen voraus. Im allgemeinen nimmt man jetzt an, dafs eine solche in hohem Grade in der That vorhanden ist. Zwar sind die Massen der Erde nicht in völlig relativer Ruhe, aber theoretische Untersuchungen haben gezeigt, dafs Veränderungen in der Lage der Erdaxe nicht zu befürchten sind und nur lokale Veränderungen der Lotrichtungen entstehen. Dafs auch dieser Umstand von den Gelehrten fortdauernd im Auge behalten wird, ist schon angedeutet worden.

§ 5. **Übersicht des Ganges der Entwicklung der Theorieen im vorliegenden Buche.** Eine streng logische Darstellung müfste mit dem beginnen, was geeignet ist, am eingehendsten die Erdgestalt zu definieren und im ganzen zu erkennen: den einfachsten Sätzen der Potentialtheorie und den Schweremessungen. Wir zogen es indessen vor, um das Rein-Mathematische zunächst zu erledigen, mit der Theorie der Gradmessungen auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoide zu beginnen und daran die geometrische Bestimmung von geoidischen Abweichungen zu knüpfen.

Die Formeln für Dreiecksnetze und die Verbindung geodätischer und astronomischer Beobachtungen sind direkt fürs abgeplattete Rotationsellipsoid aufgestellt. Die Voraussetzung beliebiger Oberflächenform ist einesteils insofern ohne Wert, als man immer nach *Bessels* Vorgang (1837) sich die Messungen auf den Niveauflächen der Erde am bequemsten auf ein solches Ellipsoid reduziert denken wird; andernteils aber dürfte die rasche Veränderung der Krümmung der Niveauflächen, wie *Bessel* ebenfalls bemerkte, der Konvergenz der Reihenentwicklungen, welche für jene Formeln nötig sind, sehr hinderlich werden — ja diese existiert streng genommen gar nicht, da in den Krümmungen sogar Diskontinuitäten auftreten, wie *H. Bruns* (1876) gezeigt hat. Auf Formeln fürs dreiaxige Ellipsoid ist, da dessen Annahme als mittlerer Repräsentant des Geoids schwerlich Aussicht hat, gar nicht eingegangen.

Der zweite Teil ist bestimmt, die Lücken, welche die rein geo-

metrische Behandlung des Problems der Definition und Bestimmung der Erdgestalt läfst, durch Einführung der Potentialtheorie und die sich anschliefsende Behandlung der Schweremessungen auszufüllen, einige Andeutungen über die Ausbeutung gewisser Angaben der Astronomie und der Lehren der Mechanik über die Rotation der Körper und dergl. zu bringen, sowie die Methode der Untersuchung der Geoidgestalt durch Zenithdistanzmessungen und im Anschlufs daran die terrestrische Refraktion zu behandeln.

---

3. Kapitel.

Allgemeine mathematische Notizen, insbesondere Reihenentwicklungen.

(Mit Benutzung von *Schlömilch,* Kompendium der höheren Analysis Band 1 und *Hattendorff,* Algebraische Analysis, sowie *Hattendorff,* Höhere Analysis).

§ 1. **Konvergenzbedingungen.** Eine unendliche Reihe mit positiven Gliedern konvergiert (hat eine bestimmte Summe), wenn von einer Stelle an die Glieder dergestalt kleiner werden, dafs

$$\frac{\text{das folgende Glied}}{\text{das vorhergehende Glied}} < x; \; x \text{ ein echter Bruch.}$$

Bezeichnet man die Glieder mit $u_1, u_2, u_3 \ldots$ und ist nun

$$u_{i+1} < x u_i, \quad u_{i+2} < x u_{i+1}, \ldots,$$

so ist der Rest der Entwicklung $(u_1 + u_2 + \cdots + u_{i-1})$ gleich

$$u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots \text{ d. i.}$$

$$= u_i \left(1 + \frac{u_{i+1}}{u_i} + \frac{u_{i+1}}{u_i}\frac{u_{i+2}}{u_{i+1}} + \frac{u_{i+1}}{u_i}\frac{u_{i+2}}{u_{i+1}}\frac{u_{i+3}}{u_{i+2}} + \cdots\right);$$

daher ist also der Rest

$$u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots < u_i \; (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \cdot$$

Es ist aber die Parenthese rechter Hand gleich $1 : (1 - x)$, mithin die Summe aller Glieder von u_i ab bis ins Unendliche $< u_i : (1 - x)$; und dieser Rest kann beliebig klein gemacht werden, wenn man den Index i hinreichend grofs annimmt.

An Stelle der gegebnen Reihe ist es oftmals vorteilhaft, eine Reihe zu betrachten, deren Summe augenscheinlich gröfser ist, weil ihre Glieder sämtlich gröfser sind, als in der ursprünglichen Reihe — die aber eine einfachere Form hat, wie diese letztere.

Eine unendliche Reihe mit positiven und negativen Gliedern konvergiert, wenn sie auch mit positiv gesetzten Gliedern konvergiert oder kurz gesagt: wenn sie absolut (genommen) konvergiert.

Werden von u_i an bei alternierenden Vorzeichen die Glieder immer kleiner, so ist der Rest der Reihe gleich $u_i x$.

Absolut konvergente Reihen gestatten eine veränderte Anordnung der Glieder d. h. sie konvergieren unbedingt, nur mufs immer von einer Stelle an das oben gegebene Kriterium der Konvergenz vorhanden sein.

Man darf sie addieren und multiplizieren und das Resultat ist wieder eine absolut konvergente Reihe. Dies gilt auch für Subtraktionen, während bei Divisionen besondere Untersuchungen erforderlich sind.

Ist die Reihe eine Potenzreihe und man setzt für die Variable selbst eine Reihe, so ist dies bestimmt zulässig, wenn die Anfangsreihe und die Substitutionsreihe absolut konvergent sind und die Summe der mit positiven Gliedern genommenen Substitutionsreihe die zur Konvergenz der Anfangsreihe nötige Bedingung erfüllt. Das Resultat ist alsdann absolut konvergent.

Besondere Untersuchungen sind erforderlich, wenn die Substitution für die Variable nur bedingt konvergiert und auch, wenn bei *endlicher* Gliederzahl der Substitution darin positive und negative Terme vorkommen. Alsdann kann ein nur bedingt konvergentes Resultat entstehen.

§ 2. **Stark konvergente Reihen in der Geodäsie.** Im Folgenden haben wir es vielfach mit stark konvergenten Reihen zu thun, weil diese allein für die praktische Anwendung bequem sind. Bei Potenzreihen insbesondere beschränkt man sich auf so kleine Werte der Variablen, dafs wenige Reihenglieder genügen, und man wendet solche Methoden an, dafs eben die Beschränkung auf kleine Werte praktisch genügt.

Für alle diese Fälle ist die Operation mit den Reihen nur geringen Schwierigkeiten unterworfen, weil die allein interessanten Glieder nach Beifügung eines (in den betreffenden praktischen Fällen schliefslich zu vernachlässigenden) Restgliedes wie endliche Reihen behandelt werden können.

Wir sind daher in den meisten Fällen der Konvergenzbetrachtungen überhoben und werden auf solche, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, auch nur eingehen, wenn es unerläfslich ist.

Die Restglieder werden wir meist symbolisch durch Gl_i andeuten, wobei i die Ordnungszahl ist, welche dem Rest zukommt, insofern er wesentlich als Vielfaches der i. Potenz einer Gröfse 1. Ordnung auftritt.*)

---

*) Ist der Rest von der i. Ordnung, so ist die Entwicklung genau *bis auf* Glieder i. Ordnung — was zur Feststellung des Sprachgebrauchs hier bemerkt sei.

Als Maximalbetrag einer *Gröſse 1. Ordnung* setzen wir rund 0,1 fest. Die Abplattung wird damit eine Gröſse 2. Ordnung.

§ 3. Taylors Satz. Es ist

$$\left.\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \cdots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) \\ &+ \frac{(1-\vartheta)^{n-p}\, h^n}{1.2\ldots(n-1)\,p} f^{(n)}(a+\vartheta h) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

p eine beliebige positive Gröſse (für welche man oft mit Nutzen n wählt), ϑ ein nicht näher bekannter positiver echter Bruch. Das letzte Glied heiſst der Rest der Reihenentwicklung. Diese Entwicklung rechter Hand gilt, wenn $f(x)$ und seine Differentialquotienten $f', f'' \ldots f^{(n)}$ innerhalb des Intervalls $x = a$ bis $x = (a+h)$ endlich und stetig sind. Um nicht noch den nächst höheren Differentialquotienten bilden zu müssen, kann man den Rest auch mittelst desjenigen berechnen, der im letzten angesetzten Glied auftritt, muſs aber alsdann von dem so gebildeten Ausdrucke wiederum das letzte Glied selbst abziehen. Der Rest heiſst dann, falls man bis $f^{(n)}$ geht:

$$\frac{\frac{1}{p}(1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(a+\vartheta h) - \frac{1}{n} f^{(n)}(a)}{1.2\ldots(n-1)}\, h^n \,. \quad (2)$$

Speziell für $p = n$:

$$\{f^{(n)}(a+\vartheta h) - f^{(n)}(a)\}\, \frac{h^n}{1.2\ldots n} \,. \quad (3)$$

In manchen Fällen läſst sich der Rest der auf eine endliche Gliederzahl beschränkten konvergenten Entwicklung dadurch genauer feststellen, daſs man wie in § 1 S. 23 eine genäherte Summierung ausführt, was voraussetzt, daſs das Bildungsgesetz der Reihenglieder bekannt ist. Vielfach wird man (vergl. oben), wenn u_i das letzte Glied ist, den Rest näherungsweise setzen können gleich

$$u_i \frac{\varkappa}{1-\varkappa} \,. \quad (4)$$

Giebt eine Entwicklung nach Taylors Satz eine unendliche konvergente Reihe für $x = (a-h)$ bis $(a+h)$, so kann man durch Subtraktion der Entwicklungen für $f(a+h)$ und $f(a-h)$ die folgende stark konvergente Reihe erhalten:

$$\left.\begin{aligned} f(a+h) &= f(a-h) + \frac{2h}{1} f'(a) + \frac{2h^3}{1.2.3} f'''(a) + \cdots \\ &+ \frac{2h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} f^{(2n+1)}(a) + \cdots \end{aligned}\right\} (5)$$

In der Reihe (1), die wir uns als unendliche konvergente Reihe denken, kann man, falls nur $(n+1)$ Glieder angeschrieben sind, auch das nächste Glied dadurch berücksichtigen, dafs man die Entwicklung

$$f^{(n)}\left(a+\frac{h}{n+1}\right)=f^{(n)}(a)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a)+\cdots \tag{6}$$

benutzt, um damit das $(n+1)^{\text{te}}$ und $(n+2)^{\text{te}}$ Glied, nämlich:

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}f^{(n+1)}(a),$$

näherungsweise in das eine Glied:

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}\left(a+\frac{h}{n+1}\right)$$

zusammenzufassen. Man hat alsdann:

$$\left.\begin{aligned} f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\cdots \\ +\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) \\ +\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}\left(a+\frac{h}{n+1}\right) \\ +\text{ Glieder mit } h^{n+2} \text{ u. s. f.} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und wenn die Konvergenz eine starke ist, so giebt dies eine unter Umständen bequeme und scharfe Beurteilung des Restes der auf n Glieder angesetzten Reihe.

Addiert man die Reihen für $f(a+h)$ und $f(a-h)$, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=f(a) \\ +\text{ Glieder mit } h^2, h^4\ldots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Multipliziert man dieselben Reihen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} f(a+h)\,f(a-h)=f(a)^2 \\ +\text{ Glieder mit } h^2, h^4\ldots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

§ 4. **Binomischer Satz.** Es ist

$$(1\pm u)^\mu=1\pm\frac{\mu}{1}u+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}u^2\pm\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}u^3+\cdots \tag{1}$$

gültig und absolut konvergent bei beliebigem μ, falls das positive $u<1$ ist.*) Im Folgenden, wo einige häufig auftretende Spezialfälle behandelt sind, bezeichnet $\varkappa$ stets einen positiven, echten Bruch. Die Reste sind durch direkte Summierung gefunden. Man hat

*) Auf die Fälle $u=1$ nehmen wir hier und im Folgenden keine Rücksicht, wie wir überhaupt die Grenzfälle der Gültigkeit aus praktischen Gründen vernachlässigen.

$$\left.\begin{aligned}
1:(1+u) &= 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots \pm u^n . x \\
1:(1-u) &= 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \cdots + \frac{u^n}{1-u} \\
1:(1-u)^2 &= 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 + 5u^4 + \cdots + u^n \left\{\frac{n}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2}\right\}
\end{aligned}\right\}(2)$$

u positiv und < 1.

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{1+u} &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \cdots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n x \\
\sqrt{1-u} &= 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 - \cdots - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n \frac{x}{1-u} \\
1:\sqrt{1+u} &= 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + \frac{35}{128}u^4 - \cdots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n x \\
1:\sqrt{1-u} &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \frac{5}{16}u^3 + \frac{35}{128}u^4 + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n \frac{x}{1-u} \\
1:\sqrt{1-u}^3 &= 1 + \frac{3}{2}u + \frac{15}{8}u^2 + \frac{35}{16}u^3 + \frac{315}{128}u^4 + \cdots + \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n \frac{x}{1 - \frac{2n+3}{2n+2}u}
\end{aligned}\right\}(3)$$

u positiv und < 1

Eine starke Konvergenz erfordert für alle diese Reihen kleine Werte u.

§ 5. Logarithmische und Exponentialreihen. Man hat:

$$\left.\begin{aligned}
\log(1+u) &= M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots \pm \frac{u^n}{n}x\right\} \\
\log(1-u) &= -M\left\{u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \cdots + \frac{u^n}{n}\frac{x}{1-u}\right\}
\end{aligned}\right\}(1)$$

u positiv und < 1.

$$\log u = 2M\left\{\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \cdots + \frac{x}{n}\frac{(u+1)^2}{4u}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n\right\} \quad (2)$$

$$u = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{\log u}{M}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\log u}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\log u}{M}\right)^3 + \cdots \quad (3)$$

u positiv.

M Modulus des Briggischen Logarithmensystems.

Der Rest der letzten Reihe, welche nichts anderes als die Exponentialreihe ($u = e^x$) ist, beträgt

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\log u}{M}\right)^n x \text{ für } u < 1,$$

und

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\log u}{M}\right)^n \frac{x}{1 - \frac{\log u}{(n+1)M}} \text{ für } u > 1.$$

Dabei ist aber vorausgesetzt, dafs so viele Glieder der Reihen angesetzt sind, als zur Erfüllung der Bedingung val. abs. $\log u < (n+1)M$ gehören.

Vorstehende Reihen sind absolut konvergent. Eine starke Konvergenz erfordert für die (1), dafs u klein, für (2) und (3), dafs u nahezu gleich 1 ist.

§ 6. Reihen für Sinus, Cosinus u. s. f. Man hat:

$$\left.\begin{aligned}\sin u &= u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} - \frac{u^7}{5040} + \frac{u^9}{362880} - \cdots \pm \frac{u^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} \mp \cdots \\ \cos u &= 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \frac{u^6}{720} + \frac{u^8}{40320} - \cdots \pm \frac{u^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} \mp \cdots\end{aligned}\right\} (1)$$

Diese Reihen gelten für jeden Wert von u, welches als Arcus zu verstehen ist. Sie sind absolut konvergent. Setzt man sie bis dahin fort, wo die Glieder abnehmen, was für $u^2 < 1$ von Anfang an der Fall ist, so ist der Rest gleich dem ersten vernachlässigten Glied mal $\varkappa$. Für $u^2 < 1$ konvergieren überdies die Reihen stets beträchtlich.

Man hat ferner:

$$\left.\begin{aligned}\tan u &= u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 + \frac{17}{315}u^7 + \frac{62}{2835}u^9 + \cdots \\ \sec u &= 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{24}u^4 + \frac{61}{720}u^6 + \frac{277}{8064}u^8 + \cdots\end{aligned}\right\} (2)$$

$$\text{val. abs. } u < \frac{\pi}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned}\cot u &= \frac{1}{u}\left\{1 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{45}u^4 - \frac{2}{945}u^6 - \frac{1}{4725}u^8 - \cdots\right\} \\ \csc u &= \frac{1}{u}\left\{1 + \frac{1}{6}u^2 + \frac{7}{360}u^4 + \frac{31}{15120}u^6 + \frac{127}{604800}u^8 + \cdots\right\}\end{aligned}\right\} (3)$$

$$\text{val. abs. } u < \pi.$$

Die Koefficienten, welche in diesen absolut konvergenten Reihen vorkommen, lassen sich nicht bequem allgemein hinschreiben. Für unsere Zwecke genügen die angesetzten Glieder und die Thatsache, dafs bei den Reihen (2) der Rest angenähert gleich ist dem letzten Gliede mal $\frac{4u^2\varkappa}{\pi^2 - 4u^2}$ und bei den Reihen (3) angenähert gleich dem letzten Gliede mal $\frac{u^2\varkappa}{\pi^2 - u^2}$. Dies findet man mittelst der Bemerkung, dafs die Koefficienten der Reihenglieder (2), je weiter man die Reihen fortsetzt, mehr und mehr im Verhältnis $\pi^2 : 4$ abnehmen, die der (3) im Verhältnis $\pi^2 : 1$.

Die Konvergenz der Reihen (3) und noch mehr der Reihen (2) ist weit geringer, als diejenige der (1). Um mittelst der in den Reihen (2) angesetzten Glieder den Wert von $\tan u$ oder $\sec u$ auf 0,00000 00001 des Betrags genau zu erhalten, mufs man sich auf absolute Werte von u beschränken, die 0,1 nicht wesentlich überschreiten.

§ 7. Reihen für Arcus sinus und Arcus tangens, und logarithmische Reihen für Sinus, Arcus sinus u. s. f.

$$\left.\begin{aligned}\text{arc sin } u &= u + \frac{u^3}{6} + \frac{3u^5}{40} + \frac{5u^7}{112} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\,\frac{u^{2n-1}}{2n-1}\,\frac{\varkappa}{1-u^2}\\ \text{arc tan } u &= u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9}\cdots \pm \frac{u^n}{n}\varkappa\end{aligned}\right\}(1)$$

$$\text{val. abs. } u < 1.$$

Setzt man hierin $u = \sin v$ bezw. $u = \tan v$ und schreibt dann für v wieder u, so folgt:

$$u = \sin u + \frac{\sin^3 u}{6} + \frac{3\sin^5 u}{40} + \frac{5\sin^7 u}{112} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\,\frac{\sin^{2n-1} u}{2n-1}\,\frac{\varkappa}{\cos^2 u}$$

$$\text{val. abs. } u < \frac{\pi}{2};$$

$$u = \tan u - \frac{1}{3}\tan^3 u + \frac{1}{5}\tan^5 u - \frac{1}{7}\tan^7 u + \frac{1}{9}\tan^9 u \cdots \pm \frac{\varkappa}{n}\tan^n u \qquad (2)$$

$$\text{val. abs. } u < \frac{\pi}{4}.$$

Diese absolut konvergenten Reihen konvergieren nur etwa ebenso stark als die (2) § 6. Man hat weiter:

$$\log \sin u = \log u - M\left\{\frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{180} + \frac{u^6}{2835} + \frac{u^8}{37800} + \cdots\right\}$$

$$u \text{ positiv und } < \pi;$$

$$\log \tan u = \log u + M\left\{\frac{u^2}{3} + \frac{7u^4}{90} + \frac{62u^6}{2835} + \frac{127u^8}{18900} + \cdots\right\} \qquad (3)$$

$$u \text{ positiv und } < \frac{\pi}{2}.$$

Die erste dieser beiden Reihen folgt durch Integration der Reihe für $\cot u$, die zweite durch Integration der Reihe für $2\csc 2u$ (wobei zu beachten, dafs für $u = 0$ sowohl $\log\frac{\sin u}{u}$ als $\log\frac{\tan u}{u}$ gleich null wird). Da die Integration die Koefficienten verkleinert, so konvergieren die Reihen sicher im gleichen Intervall für u wie vorher (jedoch nicht weiter). Wegen des log mufs man sich aber zur Vermeidung des Imaginären auf positive u beschränken, was praktisch vollkommen ausreicht.

Der Rest der ersten Reihe ist, wenn man die Glieder bis u^n anschreibt, angenähert gleich dem letzten dieser Glieder mal $\frac{u^2\varkappa}{\pi^2 - u^2}$, derjenige der zweiten Reihe angenähert gleich dem letzten der Glieder mal $\frac{4u^2\varkappa}{\pi^2 - 4u^2}$.

Es ist ferner

$$\left.\begin{array}{l}\log u = \log\sin u + M\left\{\frac{1}{6}\sin^2 u + \frac{11}{180}\sin^4 u + \frac{191}{5670}\sin^6 u + \frac{2497}{113400}\sin^8 u + \cdots\right\} \\ \qquad\qquad u \text{ positiv und } < \frac{\pi}{2}; \\ \log u = \log\tan u - M\left\{\frac{1}{3}\tan^2 u - \frac{13}{90}\tan^4 u + \frac{251}{2835}\tan^6 u - \frac{3551}{56700}\tan^8 u + \cdots\right\} \\ \qquad\qquad u \text{ positiv und } < \frac{\pi}{4}. \end{array}\right\} (4)$$

Die erste dieser Reihen folgt aus der ersten Reihe (3) durch Substitution von $u = \sin u + \frac{1}{6}\sin^3 u + \frac{3}{40}\sin^5 u + \frac{5}{112}\sin^7 u + \cdots$, also der ersten Reihe (2). Diese letztere Reihe ist konvergent für $u^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ und da sie nur positive Glieder hat, so mufs mit Rücksicht auf die Konvergenzbedingung der ersten Reihe auch das Endergebnis für $u^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ konvergieren.

Der Rest der ersten Reihe (4) ist angenähert gleich dem letzten Gliede mal $\varkappa : (1 - \sin^2 u)$ d. i. $\varkappa \sec^2 u$.

Die zweite der Reihen (4) kann man aus der ersten derselben herstellen, indem man zunächst $\log\sin u = \log\tan u + \log\sqrt{1 - \sin^2 u}$ setzt und den letzten dieser Logarithmen nach Potenzen von $\sin^2 u$ entwickelt, sodann aber für $\sin^2 u$ substituiert $\tan^2 u : (1 + \tan^2 u) = \tan^2 u - \tan^4 u + \tan^6 u - \tan^8 u + \cdots$ Jedoch giebt diese Entwicklung nicht die Grenzen der Konvergenz vollständig, über deren Ableitung *Hattendorff*, Höhere Analysis, zu vergleichen ist. Der Rest der zweiten Reihe (4) ist angenähert gleich dem letzten Glied mal $\varkappa \tan^2 u$.

Die in den Reihen (1) bis (4) angesetzten Glieder genügen zu einer Genauigkeit auf etwa 10 Decimalstellen für val. abs. $u < \frac{1}{10}$.

§ 8. **Bestimmung der Winkeldifferenz aus der Cotangenten- bezw. Cosinusdifferenz.** Ist gegeben

$$\cot A = \cot A' + h\,, \tag{1}$$

h eine kleine Gröfse, so läfst sich mit Vorteil *Taylors* Satz anwenden, um $A - A'$ herzuleiten. Setzt man, weil $A = \operatorname{arc}\cot(\cot A' + h)$ ist, S. 25 (1) $a = \cot A'$ und $f(a) = \operatorname{arc}\cot a$, so wird

$$f'(a) = -\frac{1}{1 + a^2} = -\sin^2 A'$$

$$f''(a) = 2\sin^3 A' \cos A'$$

$$f'''(a) = 2\sin^4 A' (1 - 4\cos^2 A')$$

$$f^{IV}(a) = 6\sin^4 A' \sin 4A'$$

und daher

$$A = A' - h \sin^2 A' \{ 1 - h \sin A' \cos A' - \frac{1}{3} h^2 \sin^2 A' (1 - 4 \cos^2 A') \cdots \} \quad (2)$$

Bleibt man nun bei dem Glied mit h^3 stehen, so ist der Rest der Entwicklung, in der Formel (1) S. 25 $n = p$ angenommen, gleich

$$\frac{1}{4} h^4 \sin^4 A'' \sin 4 A'', \quad (3)$$

worin A'' einem Winkel entspricht, dessen Cotangente gleich $\cot A' + \vartheta h$ ist, ϑ ein nicht näher bekannter positiver echter Bruch. Hieraus folgt

$$\sin^2 A'' = \frac{\sin^2 A'}{1 + \vartheta h \sin A' (2 \cos A' + \vartheta h \sin A')} \quad (4)$$

und man erkennt, dafs die in (2) angesetzten Glieder ausreichen, falls $(h \sin A')^4$ vernachlässigt werden kann. Denn alsdann ist sicher auch $\vartheta h \sin A'$ so klein, dafs $\sin^2 A''$ von $\sin^2 A'$ und folglich auch $(h \sin A'')^4$ von $(h \sin A')^4$ nicht merklich abweicht.

Ist gegeben

$$\cos A = \cos A' + h, \quad (5)$$

so hat man, da $A = \operatorname{arc} \cos (\cos A' + h)$ wird, nach *Taylors* Satz für $a = \cos A'$ und $f(a) = \operatorname{arc} \cos a$:

$$f'(a) = - (1 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = - \frac{1}{\sin A'}$$

$$f''(a) = - \frac{\cos A'}{\sin^3 A'}$$

$$f'''(a) = - \frac{1 + 2 \cos^2 A'}{\sin^5 A'}$$

$$f^{IV}(a) = - \frac{9 + 6 \cos^2 A'}{\sin^7 A'} \cos A'$$

und daher

$$A = A' - \frac{h}{\sin A'} \left\{ 1 + \frac{h \cos A'}{2 \sin^2 A'} + \frac{h^2 (1 + 2 \cos^2 A')}{6 \sin^4 A'} + \cdots \right\}. \quad (6)$$

Bleibt man bei h^3 stehen, so ist der Rest der Entwicklung gleich

$$- \frac{1}{8} h^4 \frac{3 + 2 \cos^2 A''}{\sin^7 A''} \cos A'', \quad (7)$$

wobei für A'' die Beziehung $\cos A'' = \cos A' + \vartheta h$ besteht, welche ergiebt:

$$\sin^2 A'' = \sin^2 A' \left(1 - \frac{\vartheta h}{\sin^2 A'} (2 \cos A' + \vartheta h) \right). \quad (8)$$

Als Bedingung der Brauchbarkeit dieser Entwicklung bis h^3 findet sich die, dafs $h : \sin^2 A'$ hinreichend klein ist, um seine 4. Potenz vernachlässigen zu können.

Vertauscht man im Vorstehenden A mit $\frac{\pi}{2} - A$, so ergeben sich Entwicklungen für $\tan A$ und $\sin A$.

§ 9. **Arcus und Gradmafs.** Bezeichnet wie im Vorstehenden u einen Winkel in Bruchteilen des Radius, d. h. als Arcus ausgedrückt, so hat man, um u in Graden zu erhalten, die Proportion zu beachten:

$$u^0 : 360^0 = u : 2\pi,$$

also ist

$$u^0 = u \cdot \frac{180^0}{\pi} \quad \text{oder } u_{\text{in Graden}} = u\varrho^0, \tag{1}$$

wenn man zur Abkürzung einführt:

$$\varrho^0 = \frac{180}{\pi}. \tag{2}$$

In gleicher Weise folgt als Faktor für u zur Reduktion auf u in Minuten bezw. Sekunden:

$$\varrho' = \frac{180 \cdot 60}{\pi}, \qquad \varrho'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}. \tag{3}$$

§ 10. **Formeln für sehr kleine Winkel.** Vernachlässigt man u^5, so ist

$$\left.\begin{aligned} \sin u &= u\sqrt[3]{\cos u} + \cdots \\ \tan u &= u\sqrt[3]{\sec^2 u} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Um den Fehler dieser nach *Maskelyne* benannten*) Formeln zu erkennen, bildet man mittelst des binomischen Satzes:

$$\sqrt[3]{\cos u} = 1 - \frac{u^2}{6} - \frac{u^4}{72} - \cdots$$

$$\sqrt[3]{\sec^2 u} = 1 + \frac{u^2}{3} + \frac{u^4}{9} + \cdots$$

und multipliziert dies mit u. Die Vergleichung mit den Reihen für $\sin u$ und $\tan u$ zeigt, dafs die Vernachlässigung von u^5 in der 1. Formel (1) einen etwas gröfsern, diejenige in der 2. Formel (1) dagegen einen etwas kleinern Fehler giebt, als die Abkürzung der Reihen auf die ersten beiden Glieder.

Für die praktische Rechnung können die Formeln (1) und ähnliche, wie $\log \sec \frac{1}{2} u = \frac{1}{4} \log \sec u + \cdots$, den Reihen oft vorzuziehen sein, denn sie erfordern statt der Berechnung eines Gliedes nur das Aufschlagen eines Cosinus u. s. f. Zu gleichem Zwecke wie

*) *Hoüel*, Fünfstellige Logarithmen S. XXXIX.

die (1) dienen die in mehreren Logarithmentafeln aufgeführten Hilfslogarithmen

$$\left.\begin{aligned} S &= \log \frac{\sin u}{u \varrho''} \\ T &= \log \frac{\tan u}{u \varrho''} \cdot \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die Tafeln 7ziffriger Logarithmen von *Bruhns* und *Schrön* geben S und T 8ziffrig. *Bremikers* Tafeln enthalten die S ebenfalls, aber nur 7stellig. Die *Schrön*schen Tafeln haben insbesondere den Vorteil, dafs unter andern als Argument zu S nicht blofs der Winkel in Sekunden, sondern auch der log sin gegeben ist.

In gleicher Weise setzt man häufig sehr vorteilhaft bei Auswertung von $\sqrt{1-v^2}$ und $\sqrt{1+v^2}$, wenn v klein genug ist, für v bezw. $\sin u$ und $\tan u$ und hat dann

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1-v^2} &= \cos u \text{ für } v = \sin u \\ \sqrt{1+v^2} &= \sec u \text{ für } v = \tan u. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

§ 11. **Interpolation.** Ist eine Tafel der Funktionswerte $f(x)$ für in gleichmäfsigem Intervall fortschreitende Werte der Variablen x, insbesondere für $x = a$, $(a + \omega)$, $(a + 2\omega)$, ... gegeben, und es ist $f(a + n\omega)$, $n < 1$, zu suchen, so bildet man erste, zweite, dritte Differenzen u. s. w. nach dem Schema:

	1. Differenzen	2. Differenzen	3. Differenzen
$f(a)$			
	$\Delta_0 = f(a+\omega) - f(a)$		
$f(a+\omega)$		$\Delta_0'' = \Delta_1' - \Delta_0'$	
	$\Delta_1 = f(a+2\omega) - f(a+\omega)$		$\Delta_0''' = \Delta_1'' - \Delta_0''$
$f(a+2\omega)$		$\Delta_1'' = \Delta_2' - \Delta_1'$	.
	$\Delta_2 = f(a+3\omega) - f(a+2\omega)$	.	
$f(a+3\omega)$	.		
.			

und hat dann zur Berechnung von $f(a + n\omega)$ die nachstehende *Newton*sche Interpolationsformel (welche für unsere Zwecke ausreicht):

$$f(a+n\omega) = f(a) + \frac{n}{1}\Delta_0' + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta_0'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta_0''' + \cdots \quad (1)$$

Dieselbe findet man leicht, wenn man von *Taylors* Reihe ausgeht:

$$f(a+n\omega) = f(a) + \frac{n\omega}{1} f'(a) + \frac{n^2\omega^2}{1.2} f''(a) + \cdots \qquad (2)$$

und sie auf $n = 0, 1, 2 \ldots$ anwendet, mittelst der entstehenden Gleichungen aber die Differentialquotienten $f'(a)$, $f''(a)$ ... durch die Δ ausdrückt. Die Anwendung führt natürlich nur dann zu zuverlässigen Werten, wenn die Funktion nach *Taylors* Satz entwickelt werden kann. Über eine andere sehr vorteilhafte Formel (von *Bessel*, *Astronomische Nach-*

richten Band 2 No. 33 angegeben) nebst einer Tafel ihrer Koefficienten vergleiche S. 215 des Werkes:

Albrecht, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen u. s. w. 2. Auflage. Leipzig 1879.

Bei der Interpolation in *Logarithmentafeln* mit 10 Decimalstellen des Logarithmus genügt oft nicht die einfache Interpolation, weil die Δ'' ... noch einflufsreiche Werte haben. Alsdann kann man mittelst (1) die höheren Differenzen berücksichtigen. Meist reicht es aus, bis Δ_0'' zu gehen. Man setzt dann recht bequem:

$$f(a + n\omega) = f(a) + n\left(\Delta_0 - \frac{1-n}{2}\Delta_0''\right) + \cdots \tag{3}$$

und bemerkt leicht, dafs der Faktor von n zwischen Δ_0' und Δ_{-1}' liegt, was eine Kontrolle für das Vorzeichen des Subtrahenden dieses Faktors giebt. Anstatt (3) kann man auch die nachstehenden ebenso genauen (nämlich noch die Glieder mit h^2 enthaltenden) Formeln anwenden, die aus (7) S. 26 für $n = 1$ hervorgehen:

$$\left.\begin{aligned}
\log(a+h) &= \log a + M\frac{h}{a+\frac{h}{2}} + \cdots \\
\log\sin(a+h) &= \log\sin a + Mh\cot\left(a+\frac{h}{2}\right) + \cdots \\
\log\tan(a+h) &= \log\tan a + Mh\csc\left(a+\frac{h}{2}\right)\sec\left(a+\frac{h}{2}\right) + \cdots.
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Ist zum Logarithmus die Zahl oder der Winkel zu suchen, so geben (3) und (4) eine indirekte Rechnung, welche sich für den 1. Fall in (4) durch die bequemere direkte Rechnung nach der Formel

$$a_1 + h_1 = a_1 + \frac{1}{M}(\log(a_1+h_1) - \log a_1)\sqrt{(a_1+h_1)\,a_1} + \cdots \tag{5}$$

ersetzen läfst. Diese Formel ist genau bis auf Glieder h_1^3 (excl.) und sie folgt aus (7) S. 26, wenn $f(a) = a_1$, $a = \log a_1$ genommen und $f'\left(a+\frac{h}{2}\right)$ durch $f'(a)f'(a+h)$ mittelst (9) ebenda ersetzt wird.

Über die bei Berechnung von Tafeln anzuwendende Interpolation siehe *Encke, Berliner Astronomisches Jahrbuch* 1852 S. 331 und *Astrand, Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft* Band 10. 1875. S. 279. Ersterer gab in seinen Abhandlungen zu den Berliner Jahrbüchern 1830—1862 überhaupt zahlreiche Winke für praktische Rechner. Diese Abhandlungen sind 1866 gesammelt erschienen unter dem Titel: *J. F. Enckes astronomische Abhandlungen.*

Die Interpolation in Tafeln vielstelliger Logarithmen behandelt u. a. *Puissant, Traité de Géodésie,* Bd. 1. (z. T. nach *Legendre*).

I. Teil.

Die mathematischen Theorieen der höhern Geodäsie.



1. Kapitel.

Das abgeplattete Rotationsellipsoid.

§ 1. Elemente der Meridianellipse. Wir bezeichnen mit

a_0 die grofse Halbaxe (in der Äquatorebene),

b_0 die kleine Halbaxe (in der Rotationsaxe).

Dann sind:

$\mathfrak{a} = \frac{a_0 - b_0}{a_0}$ die Abplattung,

$e^2 = \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}$ das Quadrat der numerischen Excentricität,

$$\left.\begin{array}{l} n = \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0} \\[1ex] \delta = \frac{a_0^2 - b_0^2}{b_0^2} \\[1ex] m = \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2 + b_0^2} \end{array}\right\} \text{ oft benutzte Hilfsgröfsen.}$$

Zwischen diesen fünf Gröfsen finden Relationen statt, die leicht herzustellen sind, indem man obige Gleichungen nach b_0 auflöst und die verschiedenen Ausdrücke für b_0 einander gleichsetzt:

$$b_0 = a_0 (1 - \mathfrak{a}) = a_0 \frac{1 - n}{1 + n}$$

$$b_0^2 = a_0^2 (1 - e^2)$$

$$e^2 = 2\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2$$

$$\mathfrak{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} + \frac{5e^8}{128} + \cdots$$

$$\mathfrak{a} = \frac{2n}{1 + n} = 2n - 2n^2 + 2n^3 - 2n^4 + \cdots$$

$$n = \frac{\mathfrak{a}}{2 - \mathfrak{a}} = \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right) + \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$e^2 = \frac{4n}{(1 + n)^2} = 4n - 8n^2 + 12n^3 - 16n^4 + \cdots$$

$$n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5e^6}{64} + \frac{7e^8}{128} + \cdots$$

$$\delta = \frac{e^2}{1 - e^2} = e^2 + e^4 + e^6 + e^8 + \cdots$$

$$m = \frac{e^2}{2 - e^2} = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{8} + \frac{e^8}{16} + \cdots$$

$$m = \frac{2n}{1 + n^2} = 2n - 2n^3 + 2n^5 - \cdots$$

$$m = \mathfrak{n} + \frac{\mathfrak{n}^2}{2} - \frac{\mathfrak{n}^4}{4} - \frac{\mathfrak{n}^5}{4} \cdots$$

$$1 - e^2 = \frac{1 - m}{1 + m} = \left(\frac{1 - n}{1 + n}\right)^2 = (1 - \mathfrak{n})^2 = \frac{1}{1 + \delta}.$$

Alle im Vorstehenden entwickelten Reihen sind, wie mittelst der gewöhnlichen Regeln über die Konvergenz zu ersehen ist, absolut konvergent, da n, m, $\mathfrak{n}$ und e^2 fürs Ellipsoid < 1 sind und die Reihen zum Teil sogar für noch gröfsere Werte konvergieren.

Nach *Bessel* (1841; vergleiche *Rud. Engelmann*, *Abhandlungen von F. W. Bessel.* Leipzig 1876. Band 3, S. 62) ist für das Erdellipsoid

$$n = 0{,}0016741848; \qquad \mathfrak{n} = 1 : 299{,}1528$$
$$a_0 = 3272077{,}14^t \qquad [6{,}5148235.337]$$
$$b_0 = 3261139{,}33 \qquad [6{,}5133693.539],$$

wobei die eckige Klammer den Briggischen Logarithmus andeutet. *Encke*, der im *Berliner Astronomischen Jahrbuch* von 1852 S. 322 ff. für einige Funktionen von a_0 und b_0 Tafeln giebt, setzt

$$n = 0{,}001674184767 \quad [7{,}2238033.861 - 10]. \tag{1}$$

Diesen Wert behalten wir, da er von andern Tafelberechnern meist ebenfalls angewandt ist, bei und setzen, zu Metermafs übergehend (Verwandlungslogarithmus 0,2898199.2994)

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 6377397{,}15500 \quad [6{,}8046434.637] \\ b_0 &= 6356078{,}96325 \quad [6{,}8031892.839]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die im Hinblick auf die wirkliche Genauigkeit dieser Zahlen als Repräsentanten des mittlern Erdellipsoids sehr weit getriebene Schärfe, ist wünschenswert, insofern sie als Fundamentalzahlen auftreten, die allen Rechnungen zu grunde gelegt werden sollen und die ein bestimmtes Ellipsoid thunlichst scharf geometrisch zu kennzeichnen haben. Man erhält weiter:

$$\left.\begin{aligned} e^2 &= 0{,}006674372096 \quad [7{,}8244104.149 - 10] \\ \mathfrak{n} &= 0{,}003342773114 \quad [7{,}5241069.005 - 10] \\ m &= 0{,}003348360149 \quad [7{,}5248321.645 - 10] \\ \delta &= 0{,}006719218662 \quad [7{,}8273187.745 - 10] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$n^2 = 0{,}00000280289463 \qquad \mathfrak{n}^2 = 0{,}000011174132$$
$$n^3 = 0{,}00000000469256 \qquad \mathfrak{n}^3 = 0{,}000000037352$$
$$n^4 = 0{,}00000000000786 \qquad \mathfrak{n}^4 = 0{,}000000000125$$
$$e^4 = 0{,}000044547243 \qquad m^2 = 0{,}000011211516$$
$$e^6 = 0{,}000000297325 \qquad m^3 = 0{,}000000037540$$
$$e^8 = 0{,}000000001984 \qquad m^4 = 0{,}000000000126$$
$$e^{10} = 0{,}000000000013$$

$$2 \log (1 - \mathfrak{n}) = \log (1 - e^2) = 9{,}9970916.4046 - 10$$
$$\log \frac{2}{2 - e^2} = \log (1 + m) = 0{,}0014517.4521$$
$$\log (1 - m) = 9{,}9985433.8566 - 10$$
$$\log (1 + n) = 0{,}0007264.8124$$
$$\log (1 - n) = 9{,}9992723.0147 - 10.$$

Vorstehende Zahlen sind einerseits mit Anwendung des *Thesaurus logarithmorum completus* von *G. Vega* (Leipzig 1794) berechnet, andrerseits zur Kontrolle durch direkte abgekürzte Multiplikation und Division und mit teilweiser Benutzung der Rechenmaschine von *Thomas*; die letzten 11ziffrigen Logarithmen sind direkt durch Reihenentwicklung gefunden worden. *Diese Zahlen sind im Folgenden stets zu grunde gelegt.*

Wir fügen hier noch bei die Zentriwinkel, welche zu Arcus 1 gehören (S. 32):

$$\varrho'' = 206264{,}806247 \qquad [5{,}3144251.332]$$
$$\varrho' = 3437{,}74677078 \qquad [3{,}5362738.828]$$
$$\varrho^0 = 57{,}2957795131 \qquad [1{,}7581226.324],$$

sowie den Zahlwert für den Modulus des Briggischen Logarithmensystems:

$$M = 0{,}4342944819 \qquad [9{,}6377843.113 - 10].$$

§ 2. **Koordinaten in der Meridianellipse.** Wir zählen vom Mittelpunkt M aus auf der grofsen Axe und kleinen Axe die rechtwinkligen Koordinaten x bezw. z, Fig. 1, und haben alsdann bekanntlich

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{z^2}{b_0^2} = 1.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch die Substitutionen

$$x = a_0 \cos \beta \qquad z = b_0 \sin \beta, \tag{1}$$

deren unabhängige Variable β *reduzierte Breite* heifst.*) Sie entsprechen

*) Nach *Puissant, Traité de Géodésie,* ist der Ausdruck von *Legendre.*

der bekannten geometrischen Konstruktion aus umschriebenem und eingeschriebenem Kreis. Die Lage eines Punktes P ist durch β vollständig gegeben; gewöhnlich dient aber die *geographische Breite* B zur Bezeichnung derselben.

Um die Beziehung der letzteren zu x, z und β zu finden, verschieben wir P unendlich wenig in Richtung wachsender B nach P'. In dem dadurch entstehenden unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse das als geradlinig zu betrachtende Bogenelement dM der Ellipse ist und dessen Kathetenlängen die absoluten Werte $-dx$ und dz haben, ist der Winkel bei P' gleich B bis auf einen unendlich kleinen Fehler, der gegen B verschwindet. Man hat nun

Fig. 1.

$$\tan B = -\frac{dx}{dz}.$$

Aus obigen Formeln für x und z folgt aber andrerseits:

$$-dx = a_0 \sin \beta \, d\beta \qquad dz = b_0 \cos \beta \, d\beta;$$

setzt man dies ein und berücksichtigt den Wert von $a_0 : b_0$ nach § 1 S. 37, so folgt

$$\tan \beta = \sqrt{1 - e^2} \tan B. \tag{2}$$

Eliminiert man hiermit $\tan \beta$ aus den goniometrischen Formeln

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \qquad \sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}$$

und multipliziert sodann rechter Hand Zähler und Nenner mit $\cos B$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{\cos B}{W} \\ \sin \beta &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin B}{W}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei gesetzt ist:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \tag{4}$$

Durch Auflösung nach $\sin B$ und $\cos B$ folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} \cos B &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \beta}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \beta}{w} \\ \sin B &= \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}} = \frac{\sin \beta}{w} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

sowie
$$Ww = \sqrt{1 - e^2} \tag{6}$$
$$w = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}. \tag{7}$$

Aufserdem erhält man für x und z durch Substitution der letztgefundenen Werte für $\cos\beta$ und $\sin\beta$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a_0 \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a_0 \cos B}{W} \\ z &= \frac{a_0 (1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a_0 (1 - e^2) \sin B}{W}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nach diesen Formeln kann man x und z nicht für die ganze Ellipse berechnen, sondern immer nur für eine Hälfte auf einer Seite der kleinen Axe, weil B nicht, wie es die Formel $\tan B = -\,dx : dz$ fordert, von 0^0 bis $\pm\, 180^0$ gezählt wird, sondern nur bis $\pm\, 90^0$. Es kommt aber in der That nur die eine Hälfte in betracht.

Der Abstand MK' des Durchschnittspunktes der Normalen von P mit der Rotationsaxe ist gleich $(x \tan B - z)$; also ist auch

$$MK' = \frac{a_0 e^2 \sin B}{W} = \frac{a_0 e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \sin \beta\,. \tag{9}$$

Dieser Abstand beträgt demnach im Maximum gegen 43^{km}.

§ 3. **Verwandlung der geographischen Breite in reduzierte und umgekehrt.** Es ist

$$\frac{\tan \beta}{\tan B} = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1 - n}{1 + n}\,. \tag{1}$$

Hiermit kann man B in β verwandeln und umgekehrt. Man hat z. B. für

$$B = 52^0\, 30'\, 16{,}7''$$

$\log \tan B = 0{,}1150923.1$	$0{,}1150923.336$
$\log \sqrt{1 - e^2} = 9{,}9985458.2 - 10$	$9{,}9985458.202 - 10$
$\log \tan \beta = 0{,}1136381.3$	$0{,}1136381.538$
$\beta = 52^0\, 24'\, 43{,}01''$	$52^0\, 24'\, 43{,}01144''$.

Die erste Rechnung ist mit 7ziffrigen Logarithmen geführt, die achte Decimalstelle der Proportionalteile aber zur Erhöhung der Sicherheit beigeschrieben. Dadurch wird $\log \tan \beta$ höchstens auf $^1/_2$ Einheit der siebenten Decimale unsicher und β nicht mehr als $0{,}02''$ fehlerhaft. Die zweite Rechnung mit 10 Decimalen ist nicht entsprechend genau, weil hier die 10. Stelle nicht so scharf bestimmt ist als dort die 7. Stelle.*)

*) Nach *Bremikers* Vorrede zu seiner Ausgabe von *Vegas* 7ziffrigen Logarithmen ist zwar die 10. Decimale der Logarithmen der Zahlen im *Thes. log.* sicher, aber nicht die der trigonometrischen Funktionen, wo Fehler bis zu 4 Einheiten vorkommen.

Um mittelst 7ziffriger Logarithmen eine gröfsere Schärfe als oben zu erreichen, hat man Formeln für $(B - \beta)$ aufgestellt, deren wichtigste wir hier ableiten. Aus (1) folgt durch Auflösung nach n:

$$n = \frac{\tan B - \tan \beta}{\tan B + \tan \beta} = \frac{\sin (B - \beta)}{\sin (B + \beta)}. \tag{2}$$

Für den Augenblick $B - \beta = u$ gesetzt, folgt mit Benutzung der Relation $B + \beta = 2B - u$

$$\sin u = n \sin (2B - u). \tag{3}$$

Wenn man rechts den Sinus auflöst und $\sin u$ und $\cos u$ nach Potenzen von u entwickelt, findet man leicht eine Reihe für u. Wir schlagen indessen einen andern noch oft zu betretenden Weg ein, nämlich den der Einführung des Imaginären.

Sei $i = \sqrt{-1}$ und ε die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist*)

$$\varepsilon^{iu} - \varepsilon^{-iu} = n\,(\varepsilon^{2iB - iu} - \varepsilon^{-2iB + iu}).$$

Multipliziert man mit ε^{iu} und reduziert auf ε^{2iu}, so wird

$$2iu = \log \operatorname{nat} (1 + n\varepsilon^{2iB}) - \log \operatorname{nat} (1 + n\varepsilon^{-2iB}).$$

Beide Logarithmen verwandeln wir in Reihen und erhalten, da $n < 1$ ist, die konvergente Entwicklung:

$$u = n\,\frac{\varepsilon^{2iB} - \varepsilon^{-2iB}}{2i} - \frac{n^2}{2}\,\frac{\varepsilon^{4iB} - \varepsilon^{-4iB}}{2i} + \frac{n^3}{3}\,\frac{\varepsilon^{6iB} - \varepsilon^{-6iB}}{2i} - \cdots$$

oder

$$B - \beta = n \sin 2B - \frac{n^2}{2} \sin 4B + \frac{n^3}{3} \sin 6B - \frac{n^4}{4} \sin 8B + \cdots \tag{4}$$

Vorstehende Formel giebt den Arcus; für Sekunden ist rechts mit ρ'' zu multiplizieren. Das Glied mit n^4 hat auf die 5. Decimale der Sekunden keinen Einflufs. Wir setzen daher:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sekunden}}{\beta - B} = {} & [2{,}5382285.2_n] \sin 2B \\ & + [9{,}76203 - 10] \sin 2B \cos 2B \\ & + [6{,}51n - 10] \sin 6B + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

*)
$$\sin u = \frac{\varepsilon^{iu} - \varepsilon^{-iu}}{2i},$$

$$\cos u = \frac{\varepsilon^{iu} + \varepsilon^{-iu}}{2};$$

$$\log \operatorname{nat} (1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots;$$

$$\operatorname{mod} u < 1.$$

Vertauscht man in Gleichung (1) B mit β, n mit $(-n)$, so bleibt sie ungeändert. Man hat daher aus (4) durch dieselbe Vertauschung

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sekunden}}{B-\beta} &= [2{,}5382285.2] \sin 2\beta \\ &+ [9{,}76203-10] \sin 2\beta \cos 2\beta \\ &+ [6{,}51-10] \sin 6\beta + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Für $B = 52^0\ 30'\ 16{,}7''$ giebt (5), wobei das 1. Glied mit 8 richtigen Decimalen berechnet wurde:

$2{,}5382285.2_n$	$9{,}76203-10$	$6{,}51_n-10$
$\log \sin 2B = 9{,}9849249.3$	$9{,}98492-10$	$\log \sin 6B = 9{,}85_n-10$
$2{,}5231534.5_n$	$\log \cos 2B = 9{,}41326_n-10$	$6{,}36-10$
$-\ 5'\ 33{,}54425''$	$9{,}16021_n-10$	$+\ 0{,}00023''$
	$-\ 0{,}14461''$	

$$\beta - B = -\ 5'\ 33{,}68863'' \qquad \beta = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''.$$

Ist man im Besitz einer Tafel für W, so kann man sich der Formeln

$$\sin(B-\beta) = \frac{n \sin 2B}{2W} = \frac{n \sin 2\beta}{2w} \qquad (7)$$

bedienen, um $B - \beta$ zu finden. Sie folgen leicht aus $\sin(B-\beta) = n \sin(B+\beta)$, wenn rechter Hand aufgelöst und B oder β eliminiert wird (S. 40). Von $\sin(B-\beta)$ gelangt man zu $(B-\beta)$ in Sekunden mittelst des Hilfslogarithmus S (S. 33).

Für $B = 52^0\ 30'\ 16.7''$ ist

$$\left.\begin{aligned} \log \sin 2B &= 9{,}9849249.3-10 \\ -\log W &= 0{,}0009142.5 \\ \log \frac{n}{2} &= 7{,}2230769.0-10 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Summa}\quad & 7{,}2089160.8 \\ \text{S für } 334'' &= 4{,}6855746.7 \\ \log(B-\beta) &= 2{,}5233414.1 \end{aligned}$$

$$B - \beta = 5'\ 33{,}68863'' \qquad \beta = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''.$$

Zur bequemen Anwendung von (7) gab *Bremiker* in seinen *Studien über höhere Geodäsie* 1869 eine Tafel für $\log \frac{B-\beta}{\sin 2B}$ mit 8 Decimalen, sodafs man nur $\log \sin 2B$ zu addieren braucht, um $B - \beta$ in Sekunden zu erhalten. Ist β gegeben, so hat man $B = 90 - \beta$ als Argument der Tafel und $\sin 2\beta$ für $\sin 2B$ zu nehmen. (Im Auszug und auf 7 Decimalen bei *Albrecht* S. 198.)

Eine Tafel für $B - \beta$ auf 2 Decimalstellen giebt *Albrecht* S. 197.

§ 4. **Krümmungsradius im Meridian.** Bezeichnen wir denselben mit ϱ_m, so ist einerseits (Fig. 1, S. 40):

$$\varrho_m dB = dM; \tag{1}$$

andrerseits hat man aus dem unendlich kleinen Dreieck, welches an dM angrenzt:

$$dM = dz : \cos B;$$

somit ist

$$\varrho_m = \frac{dz}{d(\sin B)}.$$

Führt man hierin z nach (8) S. 41 ein, so folgt:

$$\varrho_m = \frac{a_0(1-e^2)}{W^3} = \frac{[6,8017351.042]}{W^3}. \tag{2}$$

Diese Formel giebt ϱ_m, falls eine Tafel für W vorliegt, sehr bequem. Die Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf den Nenner in (2) ergiebt andrerseits:

$$\varrho_m = a_0(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 B+\frac{15}{8}e^4\sin^4 B+\frac{35}{16}e^6\sin^6 B+\cdots\right), \tag{3}$$

und diese Formel würde ganz geeignet sein, um ein einzelnes ϱ_m, teilweise durch direkte Multiplikation, teilweise mittelst 7ziffriger Logarithmen, auf 9 bis 10 Ziffern scharf zu berechnen. Eine Tafel für $\log \varrho_m$ auf 7 Decimalen giebt *Albrecht* S. 199.

Eine Tafel für $\log \frac{\varrho_m}{\varrho''}$ auf 8 Decimalen gab auch *Börsch* in seinen *Tafeln für geodätische Berechnungen für* $B = 35$ *bis* 71^0, (Anlage zum Programm der höhern Gewerbeschule in Kassel).

§ 5. **Berechnung von log W.** Im einzelnen Falle wird man $\log(e \sin B) = \log \sin \psi$ setzen, womit $\log W$ in $\log \cos \psi$ übergeht.

Bei Berechnung einer Tafel jedoch ist eine Reihenentwicklung vorzuziehen. Man hat sofort:

$$\log W = -\frac{1}{2}M\left(e^2\sin^2 B+\frac{e^4}{2}\sin^4 B+\frac{e^6}{3}\sin^6 B+\frac{e^8}{4}\sin^8 B+\cdots\right) \tag{1}$$

Hier hat das 3. Glied noch auf die 7. Decimalstelle, das 4. Glied auf die 10. Stelle Einflufs.

Eine stärker konvergierende Reihe erhält man durch Einführung der Hilfsgröfse n und der trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von B. Anstatt dies für jede Potenz von $\sin B$ einzeln auszuführen, entwickeln wir allgemein mittelst Einführung von $\cos 2B = \frac{1}{2}(\varepsilon^{2iB}+\varepsilon^{-2iB})$. Man hat nach und nach, unter Beachtung der Relation $e^2 = 4n : (1+n)^2$,

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 B} = \sqrt{1-\frac{e^2}{2}+\frac{e^2}{2}\cos 2B} = \frac{\sqrt{1+2n\cos 2B+n^2}}{1+n}$$

also

$$W = \frac{\sqrt{(1 + n\varepsilon^{2iB})\,(1 + n\varepsilon^{-2iB})}}{1 + n}. \tag{2}$$

Nun gilt aber für die beiden Faktoren des Radikanden die Formel (S. 42):

$$\log \text{nat}\,(1 + n\varepsilon^{\pm 2iB}) = n\varepsilon^{\pm 2iB} - \frac{n^2}{2}\varepsilon^{\pm 4iB} + \frac{n^3}{3}\varepsilon^{\pm 6iB} - \cdots.$$

Addiert man die Logarithmen beider Faktoren und geht von den Exponentialgröfsen zu den Cosinus über, so wird für Brigg. Logarithmen:

$$\log W = \left\{\begin{array}{l} -\log(1+n) \\ + Mn \cos 2B \\ - M\frac{n^2}{2}\cos 4B \\ + M\frac{n^3}{3}\cos 6B - \cdots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \quad [9{,}9992735.1876 - 10] \\ + [3{,}8615877.0] \cos 2B \\ + [0{,}78436_n] \cos 4B \\ + [0{,}83 - 5] \cos 6B + \cdots. \end{array}\right\} \tag{3}$$

In den periodischen Gliedern sind die Zahlwerte der Koefficienten in Einheiten der 7. Decimalstelle des Logarithmus angesetzt. Die Logarithmen der Koefficienten zeigen, dafs bei 7stelliger Rechnung schon das Glied mit n^2 wenig Einflufs hat.

Für $B = 52^0\ 30'\ 16{,}7''$ ist

$$\begin{array}{rr} \log W = & 9{,}9992735.188 - 10 \\ - & 1882.983 \\ + & 5.270 \\ + & .005 \\ \hline \log W = & 9{,}9990857.480 - 10. \end{array}$$

Die Formel (3) hat vor (1) nicht nur den Vorzug stärkerer Konvergenz, sondern auch den bei Tabellenrechnung hervortretenden, dafs bei ihr die Periode der höhern Glieder kleiner ist, als in (3). Es sind daher z. B. nur halb so viel Werte des Gliedes mit cos $2B$ zu berechnen, als solche mit $\sin^2 B$. Diesem Werk ist eine Tafel für log W auf 10 Decimalstellen beigegeben von $B = 47$ bis 57^0 und eine Tafel für log W und log w auf 8 Decimalstellen, B und $\beta = 0^0$ bis 90^0. Beide Tafeln sind nach Formel (3) berechnet.

Encke rechnet (a. a. O. S. 328), wie zuerst angegeben: mittelst 10stelliger Logarithmentafeln erhält er zu log sin ψ direkt log cos ψ, wobei zur Interpolation die abgekürzte Reihe dient: $\log\cos\psi = \log\cos\psi_0 - \tan^2\frac{\psi+\psi_0}{2}$ $\times (\log\sin\psi - \log\sin\psi_0)$, in welcher ψ_0 das nächstgelegne runde Argument der Tafeln ist. Die Rechnung nach Formel (3) dürfte indes ebenso bequem sein, und zwar hat man, wenn die 7ziffrigen Logarithmen der Zahlen und

trigonometrischen Funktionen besonders eingebunden sind, kein weiteres Aufschreiben nötig, als für den resultierenden Wert der Glieder der Reihe selbst.

§ 6. **Rektifikation des Meridianbogens.** Dieselbe läfst sich mittelst der Formel $dM = \varrho_m dB$ bewirken, wenn ϱ_m als Funktion von B dargestellt ist. Die Integration ist ohne Reihenentwicklung nicht möglich. Um integrieren zu können, müssen in der Reihe (3) S. 44 die Sinuspotenzen in trigonometrische Funktionen der Vielfachen von B verwandelt werden. Die stärkste Konvergenz der hierbei auftretenden Koefficientenreihen giebt die Anwendung von n. Mit Rücksicht auf (2) S. 45 folgt in diesem Falle, wenn im Ausdrucke für ϱ_m für $1-e^2$ gesetzt wird $(1-n)^2 : (1+n)^2$, ohne Schwierigkeit:

$$dM = a_0 (1-n)(1-n^2) \left\{(1+n\varepsilon^{2iB})(1+n\varepsilon^{-2iB})\right\}^{-\frac{3}{2}} dB. \quad (1)$$

Nun ist

$$(1+n\varepsilon^{\pm 2iB})^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} n\varepsilon^{\pm 2iB} + \frac{15}{8} n^2 \varepsilon^{\pm 4iB} - \frac{35}{16} n^3 \varepsilon^{\pm 6iB} + \frac{315}{128} n^4 \varepsilon^{\pm 8iB} - \cdots \quad (2)$$

Multipliziert man die beiden hierin enthaltenen Reihen und führt statt des Imaginären die Cosinus ein, so folgt:

$$dM = a_0(A_0 - A_2\cos 2B + 2A_4\cos 4B - 3A_6\cos 6B + 4A_8\cos 8B - \cdots)dB \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= (1-n)(1-n^2)\left\{1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \cdots\right\}\\
A_2 &= (1-n)(1-n^2)\left\{3n + \frac{45}{8}n^3 + \cdots\right\}\\
A_4 &= (1-n)(1-n^2)\left\{\frac{15}{8}n^2 + \frac{105}{32}n^4 + \cdots\right\}\\
A_6 &= (1-n)(1-n^2)\left\{\frac{35}{24}n^3 + \cdots\right\}\\
A_8 &= (1-n)(1-n^2)\left\{\frac{315}{256}n^4 + \cdots\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die Integration giebt nunmehr für den Meridianbogen M vom Äquator bis zur Breite B:

$$M = a_0\left(A_0 B - \frac{1}{2}A_2\sin 2B + \frac{1}{2}A_4\sin 4B - \frac{1}{2}A_6\sin 6B + \frac{1}{2}A_8\sin 8B - \cdots\right). \quad (5)$$

Subtrahiert man die Ausdrücke für 2 Werte B_1 und B_2 und setzt

$$B_2 - B_1 = \Delta B \qquad \frac{1}{2}(B_2 + B_1) = B, \quad (6)$$

so ergiebt sich für den Meridianbogen ΔM von B_1 bis B_2, $B_2 > B_1$, unter Anwendung der Relation $\sin\lambda B_2 - \sin\lambda B_1 = 2\cos\lambda B \sin\frac{\lambda}{2}\Delta B$:

$$\varDelta M = a_0 \left\{ \begin{array}{l} A_0 \varDelta B - A_2 \cos 2B \sin \varDelta B + A_4 \cos 4B \sin 2\varDelta B \\ \quad - A_6 \cos 6B \sin 3\varDelta B + A_8 \cos 8B \sin 4\varDelta B - \cdots . \end{array} \right\} \quad (7)$$

Hierin sind B und $\varDelta B$ als Arcus zu verstehen. Ist $\varDelta B$ in Sekunden gegeben, so hat man zur Berechnung des Arcus:

$$\varDelta B = \frac{1}{\varrho''} (\varDelta B \text{ in Sek.}) . \quad (8)$$

Die Konvergenz der vorstehenden Reihen erhellt daraus, dafs die (2) wegen $n < 1$ absolut konvergent sind, ebenso ihr Produkt. Die Integration verstärkt die Konvergenz wegen auftretender Divisoren.

§ 7. Die Koefficienten A. Die Konvergenz der Reihen für die A wächst, wenn man sie mit $(1 - n^2)^2$ ausmultipliziert. Es folgt damit:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{1+n} \left(1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \cdots\right) \\ A_2 &= \frac{3}{1+n} \left(n - \frac{1}{8} n^3 - \cdots\right) \\ A_4 &= \frac{15}{8(1+n)} \left(n^2 - \frac{1}{4} n^4 - \cdots\right) \\ A_6 &= \frac{35}{24(1+n)} (n^3 - \cdots) \\ A_8 &= \frac{315}{256(1+n)} (n^4 - \cdots) . \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dagegen geben Entwicklungen für M mit e^2 oder m Folgendes:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 - \frac{175}{16384} e^8 - \cdots \\ A_2 &= \frac{3}{4} \left(e^2 + \frac{1}{4} e^4 + \frac{15}{128} e^6 + \frac{35}{512} e^8 + \cdots\right) \\ A_4 &= \frac{15}{128} \left(e^4 + \frac{3}{4} e^6 + \frac{35}{64} e^8 + \cdots\right) \\ A_6 &= \frac{35}{1536} \left(e^6 + \frac{5}{4} e^8 + \cdots\right) \\ A_8 &= \frac{315}{65536} (e^8 + \cdots) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \left(1 - \frac{1}{16} m^2 - \frac{15}{1024} m^4 - \cdots\right) : \sqrt{1+m} \\ A_2 &= \frac{3}{2} \left(m + \frac{3}{32} m^3 + \cdots\right) : \sqrt{1+m} \\ A_4 &= \frac{15}{32} \left(m^2 + \frac{5}{16} m^4 + \cdots\right) : \sqrt{1+m} \\ A_6 &= \frac{35}{192} (m^3 + \cdots) : \sqrt{1+m} \\ A_8 &= \frac{315}{4096} (m^4 + \cdots) : \sqrt{1+m} . \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Am ungünstigsten sind die (2); auch die (3) sind weniger gut als die (1), wie mit Rücksicht auf die Beziehung m gleich nahezu $2n$, leicht zu ersehen ist.

Die Entwicklung mittelst e^2 giebt bereits *Delambre* in seinen *Méthodes analytiques* (1799) bis e^8. Formeln mit m gab *Puissant, Traité de Géodésie,* Band 1 und neuerdings *Ph. Fischer* in seinen *Untersuchungen*; *Bessel* benutzte n (*Abhandlungen* Band 3, S. 44) 1837. Die Einführung von ε oder von Sinuspotenzen gewährt keine Vorteile, wie Verf. sich überzeugt hat.

§ 8. Einführung der mittlern Länge G eines Meridiangrades.

Für den Meridianquadranten wird nach (5) S. 46, indem $B = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist:

$$\text{Mer. Quadr.} = \frac{\pi}{2}\, a_0 A_0 . \tag{1}$$

Setzt man ihn andrerseits gleich 90 G, so hat man sofort für G die Formel:

$$G = \frac{1}{\varrho^0}\, a_0 A_0 = \frac{1 + \frac{1}{4} n^2 + \cdots}{1 + n} \frac{a_0}{\varrho^0} . \tag{2}$$

Für den Meridianbogen M vom Äquator bis zur Breite B folgt hiermit:

$$\left.\begin{aligned}
M = G \Big\{ & B \text{ in Graden} \\
& - \frac{3}{2} \varrho^0 \left(n - \frac{3}{8} n^3\right) \sin 2B \\
& + \frac{15}{16} \varrho^0 \left(n^2 - \frac{1}{2} n^4\right) \sin 4B \\
& - \frac{35}{48} \varrho^0 n^3 \sin 6B \\
& + \frac{315}{512} \varrho^0 n^4 \sin 8B + \cdots \Big\} \\
M = [5{,}0457946.544]\, & B \text{ in Graden} \\
& + [4{,}2038114.754_n] \sin 2B \\
& + [1{,}2234947] \sin 4B \\
& + [8{,}3382_n - 10] \sin 6B \\
& + [5{,}49 - 10] \sin 8B + \cdots \\
M = 111120{,}6196090\, & B \text{ in Graden} \\
& - 15988{,}63821 \sin 2B \\
& + 16{,}72995 \sin 4B \\
& - 0{,}02178 \sin 6B \\
& + 0{,}00003 \sin 8B + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dagegen ist für den Meridianbogen ΔM von B_1 bis B_2:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta M = G\ \Big\{ & \varDelta B \text{ in Graden} \\
& - 3\,\varrho^0 \left(n - \frac{3}{8} n^3\right) \cos 2B \sin \varDelta B \\
& + \frac{15}{8}\,\varrho^0 \left(n^2 - \frac{1}{2} n^4\right) \cos 4B \sin 2\varDelta B \\
& - \frac{35}{24}\,\varrho^0 n^3 \cos 6B \sin 3\varDelta B \\
& + \frac{315}{256}\,\varrho^0 n^4 \cos 8B \sin 4\varDelta B + \cdots \Big\} \\
\varDelta M = [5{,}0457946.544]\ \Big\{ & \varDelta B \text{ in Graden} \\
& + [9{,}4590468.167_n - 10] \cos 2B \sin \varDelta B \\
& + [6{,}4787300 - 10] \cos 4B \sin 2\varDelta B \\
& + [3{,}5984_n - 10] \cos 6B \sin 3\varDelta B \\
& + [0{,}74_n - 10] \cos 8B \sin 4\varDelta B + \cdots \Big\}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

In Bezug auf die in (3) und (4) auftretenden Koefficienten der periodischen Glieder, welche Koefficienten durch Division von A_0 in $A_2, A_4 \cdots$ entstehen, ist zu bemerken, dafs wegen des kleinen Wertes von n fürs Erdellipsoid die Konvergenz nicht zweifelhaft bleibt, da A_0 abgesehen von dem sich hebenden allgemeinen Faktor aller A die Form $1 + u$ hat, wo u eine so kleine Gröfse ist, dafs der reziproke Wert von $1 + u$ jedenfalls, nach Potenzen von u geordnet, eine absolut konvergente Reihe giebt.

Die Berechnung einer Tafel nach Formel (3) kann mit 7ziffrigen Logarithmen erfolgen, wenn man aufserdem im Besitze einer 10ziffrigen direkten Tafel der Sinus ist, um für das 2. Glied $16000 \sin 2B$ bilden zu können. Eine solche Tafel von Grad zu Grad, welche ausreicht, fügte unter andern *Hoüel* seiner Tafel 5ziffriger Logarithmen bei. Die Tabelle der Meridianbögen schreitet dann zunächst von 30′ zu 30′ vor und wird durch Interpolation verfeinert. Wenn die Tafel aber nicht in sehr engem Intervall interpoliert wird, hat sie wenig praktischen Wert.

Encke geht bei Berechnung einer Tafel der Meridianbögen (a. a. O.) nicht von einer dieselben direkt gebenden Formel aus. Er berechnet vielmehr zunächst nur die Bogenlängen für 1°, welche zu den Meridiankrümmungsradien gehören, im Intervall von 30′. Durch mechanische Quadratur folgt hieraus dann die Tafel der Meridianbögen. Die *Encke*sche Tafel bezieht sich auf Toisen. Für Meter gab *Börsch* von $B = 35^\circ$ bis 71° eine Tafel in den oben genannten *Tafeln für geodätische Berechnungen.*

§ 9. **Kleiner Meridianbogen.** Für den Fall, dafs der Meridianbogen eine Länge von nicht mehr als einigen Graden hat, führt man mit Vorteil den zur mittlern Breite B gehörenden Radius ϱ_m ein. Es ist nach S. 47 (7) und S. 46 (3):

$$\varDelta M = a_0 (A_0 \varDelta B - A_2 \cos 2B \sin \varDelta B + A_4 \cos 4B \sin 2\varDelta B$$
$$- A_6 \cos 6B \sin 3\varDelta B + A_8 \cos 8B \sin 4\varDelta B - \cdots)$$

$$\varrho_m \varDelta B = a_0 (A_0 \varDelta B - A_2 \cos 2B \,.\, \varDelta B + A_4 \cos 4B \,.\, 2\varDelta B$$
$$- A_6 \cos 6B \,.\, 3\varDelta B + A_8 \cos 8B \,.\, 4\varDelta B - \cdots) \,.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion sofort mit Beachtung der Sinusreihe S. 28:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta M = \varrho_m \varDelta B + a_0 A_2 \cos 2B \left(\frac{\varDelta B^3}{6} - \frac{\varDelta B^5}{120} + \cdots\right) \\ - a_0 A_4 \cos 4B \left(\frac{8 \varDelta B^3}{6} - \cdots\right) + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei die weggelassenen Glieder unerheblich bleiben, wenn man ein bis zwei Zehntelmillimeter vernachlässigen kann. Es ist nämlich rund:

$$\left.\begin{aligned} a_0 A_2 &= 31977 & a_0 A_6 &= 0.04 & A_2 &= \tfrac{1}{200} \\ a_0 A_4 &= 33 & a_0 A_8 &= 0.00006 & A_4 &= \tfrac{1}{2000000} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und man findet leicht, daſs für

$$\varDelta B = 0{,}1 \text{ d. h. } \varDelta B_{\text{in Graden}} = 5{,}7$$

die ersten weggelassenen Teile der Glieder den Betrag von $0{,}2^{\text{mm}}$ nicht übersteigen.

Da oftmals $\log \varDelta M$ verlangt wird, reduzieren wir nun darauf; die Rechnung wird für $\varDelta M$ selbst dadurch nicht komplizierter.

Wir setzen $\varDelta M = \varrho_m \varDelta B\,(1 + u)$ und beachten die Reihe für $\log (1 + u)$ S. 27. Im vorliegenden Falle ist u im Maximum nahezu $\frac{A_2}{600}$, also $\frac{1}{120000}$; man kann daher das Glied mit u^2 vernachlässigen, denn es würde die 10. Decimale des Logarithmus nicht beeinflussen. Damit wird

$$\left.\begin{aligned} &\log \varDelta M = \log \left(\frac{\varrho_m \varDelta B}{\varrho''}\right) + \beta_4 \varDelta B^2 + \beta_6 \varDelta B^4 + \cdots \\ &\qquad \text{für } \varDelta B \text{ in Sek.} \\ &\qquad \varrho_m \text{ zur Mittelbreite } B = \tfrac{1}{2}(B_1 + B_2) \text{ gehörend,} \\ &\beta_4 = \frac{a_0 \,\text{Mod.}}{6 \varrho_m \varrho''^2} \left(A_2 \cos 2B - 8 A_4 \cos 4B + \cdots\right) \\ &\beta_6 = -\frac{a_0 \,\text{Mod.}}{120 \varrho_m \varrho''^4} \left(A_2 \cos 2B - \cdots\right) \,. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Für die Werte von $\log \beta_4$ und $\log \beta_6$ wird man ein Täfelchen anlegen; es genügt, die ersteren auf 5, die letzteren auf 2 Decimalstellen zu berechnen. Dabei ist es vorteilhaft, die Ausdrücke umzuformen. Zu dem Zwecke setzt man in β_4 an Stelle von ϱ_m den Wert $a_0 (A_0 - A_2 \cos 2B)$ und in β_6 einfach $a_0 A_0$. Die Fehler betragen dann nur $\frac{1}{1000000}$ bezw. $\frac{1}{200}$ der betreffenden Glieder. Es wird nun

$$\beta_4 = \frac{\text{Mod.}}{6\varrho''^2}\left(\frac{A_2}{A_0}\cos 2B - 8\frac{A_4}{A_0}\cos 4B + \cdots\right) : \left(1 - \frac{A_2}{A_0}\cos 2B + \cdots\right)$$

$$\beta_6 = -\frac{\text{Mod.}}{120\varrho''^4}\left(\frac{A_2}{A_0}\cos 2B + \cdots\right).$$

Man hat aber die nachfolgenden Ausdrücke für die Quotienten der A:

$$\frac{A_2}{A_0} = 3\left(n - \frac{3}{8}n^3 + \cdots\right) \qquad \frac{A_4}{A_0} = \frac{15}{8}\left(n^2 - \frac{1}{2}n^4 + \cdots\right),$$

kann jedoch bei den ersten Gliedern dieser Reihen stehen bleiben, ohne die zehnte Decimale von $\log \Delta M$ zu beeinflussen.

Zugleich setzen wir für den Divisor in β_4, welcher die Form $1 - u$ hat, den Faktor $1 + u + u^2 + \cdots$ und lassen das quadratische Glied weg, was im Maximum $\frac{1}{40000}$ des Wertes von β_4, d. h. beinahe eine Einheit der 10. Decimale, Fehler giebt. Hiermit findet sich unter Substitution von $\cos 4B = 2\cos^2 2B - 1$

$$\left.\begin{aligned}\beta_4 &= \frac{n\,\text{Mod.}}{2\varrho''^2}\left(\cos 2B - 7n\cos^2 2B + 5n + \cdots\right)\\ \beta_6 &= -\frac{n\,\text{Mod.}\cos 2B}{40\varrho''^4} + \cdots = -\frac{\beta_4}{20\varrho''^2} + \cdots.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Setzt man für n die Entwicklung nach e^2, so ergiebt sich

$$\beta_4 = \frac{e^2\,\text{Mod.}}{8\varrho''^2}\left(\cos 2B + 6e^2\sin^2 B - 7e^2\sin^4 B + \cdots\right), \qquad (5)$$

welche Form des Koefficienten *Andrae* benutzt (*Den Danske Gradmaaling*, 3. Bd. S. 291).

Die Formel (3) giebt, wie aus obiger Entwicklung hervorgeht, die 10. Decimalstelle des $\log \Delta M$ erst bei $\Delta B = 0{,}1$ nicht mehr ganz scharf. Analytisch genommen vernachlässigt sie Glieder 9. und höherer Ordnung, wenn e und ΔB als Glieder 1. Ordnung angesehen werden. Die gleiche Genauigkeit hat die Formel

$$\log \Delta B_{\text{in Sek.}} = \log\left(\frac{\varrho''\Delta M}{\varrho_m}\right) - \beta_4\left(\frac{\varrho''\Delta M}{\varrho_m}\right)^2 - \beta_6\left(\frac{\varrho''\Delta M}{\varrho_m}\right)^4 + \cdots, \qquad (6)$$

welche aus Formel (3) folgt, wenn man nach ΔB auflöst. Zunächst steht rechter Hand als Faktor von β_4 und β_6 eine Potenz von ΔB; dies kann man aber durch $\varrho''\Delta M : \varrho_m$ ersetzen. Da nämlich in Formel (3) der Maximalbetrag des Gliedes mit β_4 35000 Einheiten der 10. Decimale ist, so ist ΔB in Sek. $= \varrho''\Delta M : \varrho_m$ bis auf $\frac{1}{100000}$ seines Betrages.*)

*) Ist der Fehler in der Zahl Z gleich $\frac{1}{u}Z$, so ist er in $\log Z$ gleich $\frac{\text{Mod.}}{u}$, wie die Reihenentwicklung zeigt.

Der Fehler, welcher im Gliede mit β_4 bei Formel (6) entsteht, wird daher $\frac{1}{50000}$ des Betrags. Hiernach ist die Genauigkeit von (6) wesentlich dieselbe wie von (3).

Die Berechnung von ΔB nach Formel (6) ist eine indirekte, weil ϱ_m von ΔB abhängt, insofern es zum Argument B gehört. Man mufs also mit einem Näherungswerte von ϱ_m die Rechnung beginnen und mit dem erhaltenen ΔB alsdann ϱ_m und ΔB schärfer bestimmen.

Übersichtstafel für β_4.*)

B_m	β_4	$\log \beta_4$ für Einheiten der 7. Dec.
0°	+ 85161 : 10^{19}	2,93024 — 10
45	+ 715 „	0,85443 „
47	— 5250 „	$1,72018_n$ — 10
48	— 8228 „	$1,91528_n$ „
49	— 11196 „	$2,04907_n$ „
50	— 14153 „	$2,15084_n$ „
51	— 17094 „	$2,23284_n$ „
52	— 20015 „	$2,30136_n$ „
53	— 22914 „	$2,36009_n$ „
54	— 25786 „	$2,41138_n$ „
55	— 28627 „	$2,45677_n$ „
56	— 31435 „	$2,49742_n$ „
57	— 34206 „	$2,53410_n$ „
90	— 85734 „	$2,93315_n$ „

Für $B = 45^0$ und $\Delta B = 5^0$ giebt Formel (4) S. 49 $\log \Delta M = 5{,}7447601.171$. Dagegen giebt Formel (3) des laufenden § $\log \Delta M = 5{,}7447600.939 + .232 + .000$ also dasselbe. $\Delta M = 555597{,}2879^m$.

Für $B = 0^0$ und $\Delta B = 5^0$ wird ebenso beziehungsweise erhalten 5,7425852.343 und andrerseits 5,7425824.761 + 27.5925 — .0105 d. i. dasselbe. $\Delta M = 552821{,}8937^m$.

Vernachlässigt man die Glieder mit β_4 und β_6, so wird der Fehler im Maximum für $\Delta B = 10'$ in ΔM gleich $0{,}0001^m$

„ $\Delta B = 1^0$ „ ΔM „ $0{,}03^m$

„ $\Delta B = 5{,}7^0$ „ ΔM „ 5^m.

*) Kann leicht durch Interpolation spezialisiert werden.

§ 10. Berechnung der geographischen Breite des Endpunktes eines von gegebenem Anfangspunkte ausgehenden Meridianbogens.

Wir setzen für den vom Äquator ab gerechneten Meridianbogen M die Beziehung fest:

$$\frac{M}{G\varrho^0} = \sigma. \tag{1}$$

Alsdann haben wir nach S. 48 (3) für σ die nachstehende Gleichung, worin B als Arcus zu verstehen ist:

$$\sigma = B - \frac{3}{2}\left(n - \frac{3}{8}n^3\right)\sin 2B + \frac{15}{16}n^2 \sin 4B - \frac{35}{48}n^3 \sin 6B + \cdots. \tag{2}$$

Hierin sind die Glieder mit n^4 u. s. f. vernachlässigt, da sie höchstens einige Hundertel Millimeter geben. Die Differenz $\sigma - B$, welche jetzt als Funktion von B erscheint, stellen wir nun als solche von σ dar. Da $(\sigma - B)$ augenscheinlich im Verhältnis zu B und also auch zu σ eine kleine Gröfse ist, stöfst diese Rechnung auf keine Schwierigkeit.

Zunächst bilden wir mittelst (2):

$$\sin 2\sigma = \sin 2B \cos\left\{3n \sin 2B - \frac{15}{8}n^2 \sin 4B + \cdots\right\}$$
$$- \cos 2B \sin\left\{3n \sin 2B - \frac{15}{8}n^2 \sin 4B + \cdots\right\}$$

Indem wir die Reihen für Cosinus und Sinus beachten und konsequent n^3 u. s. f. vernachlässigen, wird hieraus:

$$\sin 2\sigma = \sin 2B - 3n \sin 2B \cos 2B - \frac{9}{2}n^2 \sin^3 2B + \frac{15}{8}n^2 \cos 2B \sin 4B \cdots. \tag{3}$$

Multiplizieren wir dies mit $\frac{3}{2}\left(n - \frac{3n^3}{8}\right)$ beiderseits und addieren Seite für Seite zu (2), so folgt:

$$\sigma + \frac{3}{2}\left(n - \frac{3n^3}{8}\right)\sin 2\sigma$$
$$= B - \frac{21}{16}n^2 \sin 4B - \frac{117}{32}n^3 \sin 2B + \frac{227}{96}n^3 \sin 6B - \cdots, \tag{4}$$

wobei zur Reduktion der in n^3 multiplizierten Glieder die Relationen

$$\sin^3 2B = \frac{3}{4}\sin 2B - \frac{1}{4}\sin 6B$$
$$\cos 2B \sin 4B = \frac{1}{2}\sin 6B + \frac{1}{2}\sin 2B$$

benutzt und Glieder mit n^4 u. s. f. vernachlässigt sind. Aus (2) folgt weiter mit Vernachlässigung von n^2 u. s. f.

$$\sin 4\sigma = \sin 4B \cos(6n \sin 2B + \cdots) - \cos 4B \sin(6n \sin 2B + \cdots)$$

also

$$\sin 4\sigma = \sin 4B - 6n \sin 2B \cos 4B + \cdots. \tag{5}$$

Multipliziert man dies mit $\frac{21}{16} n^2$ beiderseits und addiert es zu (4), so folgt ebenso genau als bisher, wenn man zugleich für $2 \sin 2B \cos 4B$ den Wert $\sin 6B - \sin 2B$ einführt und überhaupt etwas zusammenzieht:

$$\sigma + \frac{3}{2}\left(n - \frac{3n^3}{8}\right) \sin 2\sigma + \frac{21}{16} n^2 \sin 4\sigma$$

$$= B + \frac{9}{32} n^3 \sin 2B - \frac{151}{96} n^3 \sin 6B + \cdots.$$

Nimmt man die kleinen Glieder alle auf die gleiche Seite mit σ und setzt in denselben, soweit sie noch B enthalten, σ, so giebt das nur Vernachlässigungen von Gliedern mit n^4 u. s. f. Man erhält schliefslich

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{B} &= \underset{\text{in Sek.}}{\sigma} + \frac{3}{2} \varrho'' \left(n - \frac{9}{16} n^3\right) \sin 2\sigma \\ &\quad + \frac{21}{16} \varrho'' n^2 \sin 4\sigma \\ &\quad + \frac{151}{96} \varrho'' n^3 \sin 6\sigma + \cdots, \\ \underset{\text{in Sek.}}{\sigma} &= \frac{3600\, M}{G}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Man kann diese Formel auch nach der Methode der unbestimmten Koefficienten ableiten; die hier gegebene Entwicklung zeigt aber zugleich auch deutlich die Zulässigkeit des Verfahrens.

Zur Berechnung der geographischen Breite B_2 aus B_1 und der Länge $\varDelta M$ des Meridianbogens $P_1 P_2$ ist es am einfachsten, für $\varDelta B$ eine besondere Formel herzustellen. Wendet man Formel (6) auf B_1 mit σ_1 und auf B_2 mit σ_2 an und subtrahiert, so folgt, wenn man $\sigma_2 - \sigma_1$ mit $\varDelta\sigma$ und $\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1)$ mit σ bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta B} &= \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma} + 3\varrho'' \left(n - \frac{9}{16} n^3\right) \cos 2\sigma \sin \varDelta\sigma \\ &\quad + \frac{21}{8} \varrho'' n^2 \cos 4\sigma \sin 2\varDelta\sigma \\ &\quad + \frac{151}{48} \varrho'' n^3 \cos 6\sigma \sin 3\varDelta\sigma + \cdots \\ \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma} &= 3600 \frac{\varDelta M}{G}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Zur Berechnung von 2σ ist anzuwenden, mit Rücksicht darauf, dafs in (7) Glieder mit n^4 u. s. f. vernachlässigt sind:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{2\sigma_1} &= \underset{\text{in Sek.}}{2B_1} - 3\varrho'' n \sin 2B_1 + \tfrac{15}{8}\varrho'' n^2 \sin 4B_1 - \cdots \\ 2\sigma &= 2\sigma_1 + \varDelta\sigma . \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Diese Formeln geben für beliebige Bogenlängen $\varDelta M$ die 5. Decimalstelle der Sek. im Maximum nur etwa 1 Einheit irrig.

§ 11. Meridianbogen mittelst reduzierter Breite. Für spätere Entwicklungen ist es wünschenswert, den Meridianbogen als Funktion der reduzierten Breite kennen zu lernen. Nach S. 40 ist wegen $dM^2 = dx^2 + dz^2$.

$$dM = \sqrt{a_0^2 \sin^2\beta + b_0^2 \cos^2\beta}\; d\beta,$$

und führt man für b_0^2 den gleichwertigen Ausdruck $a_0^2(1 - e^2)$ ein, so folgt sofort

$$dM = a_0 \sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}\; d\beta. \qquad (1)$$

Da es sich mit Rücksicht auf S. 47 nun alsbald zeigen wird, dafs es vorteilhaft ist, auch hier statt e^2 n einzuführen, setzen wir hierin $e^2 = 4n : (1 + n)^2$ und erhalten

$$dM = \frac{a_0}{1+n} \sqrt{1 + n^2 - 2n \cos 2\beta}\; d\beta. \qquad (2)$$

Setzt man $\cos 2\beta = \frac{1}{2}(\varepsilon^{2i\beta} + \varepsilon^{-2i\beta})$, so zerfällt die Wurzelgröfse in die beiden Faktoren

$$(1 - n\varepsilon^{2i\beta})^{\frac{1}{2}} \text{ und } (1 - n\varepsilon^{-2i\beta})^{\frac{1}{2}}$$

und es ergiebt die wegen $n < 1$ konvergente Entwicklung nach dem binomischen Satz:

$$(1 - n\varepsilon^{\pm 2i\beta})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{n}{2}\varepsilon^{\pm 2i\beta} - \frac{n^2}{8}\varepsilon^{\pm 4i\beta} - \frac{n^3}{16}\varepsilon^{\pm 6i\beta} - \frac{5n^4}{128}\varepsilon^{\pm 8i\beta} - \cdots.$$

Die Multiplikation der Reihe mit den oberen Zeichen und der Reihe mit den unteren Zeichen führt zu:

$$dM = a_0\left(A_0 - \frac{1}{3}A_2 \cos 2\beta - \frac{2}{15}A_4 \cos 4\beta - \frac{3}{35}A_6 \cos 6\beta - \frac{4}{63}A_8 \cos 8\beta - \cdots\right) d\beta, \quad (3)$$

wo A_0 bis A_8 dieselben Gröfsen wie S. 47 sind. Dies zeigt sich ohne Mühe wenigstens insoweit, als die ersten 4 Potenzen von n in betracht kommen. Will man sich überzeugen, ob man ganz allgemein die A vor sich hat, so kann das dadurch geschehen, dafs man die

sogenannten allgemeinen Glieder vergleicht. Es hat indes hier gar keinen Wert, dies auszuführen; Verfasser hat sich aber für A_0, A_2 und A_4 von der strengen Gleichheit mit den frühern Werten überzeugt, wonach auf dasselbe Verhalten für die übrigen A zu schliefsen war.

Wir erhalten weiter für den Bogen $\varDelta M$ von β_1 bis β_2:

$$\left.\begin{array}{c}\varDelta M = a_0 \left\{\begin{array}{l} A_0 \varDelta\beta - \frac{1}{3} A_2 \cos 2\beta \sin \varDelta\beta - \frac{1}{15} A_4 \cos 4\beta \sin 2\varDelta\beta \\ \qquad - \frac{1}{35} A_6 \cos 6\beta \sin 3\varDelta\beta - \frac{1}{63} A_8 \cos 8\beta \sin 4\varDelta\beta - \cdots \end{array}\right\} \\ \varDelta\beta = \beta_2 - \beta_1 \qquad \beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Diese Reihe konvergiert rascher, als diejenige mit der geographischen Breite B und das Glied mit A_8 ist ganz überflüssig; dasjenige mit A_6 giebt auch nur 1^{mm}. Trotzdem also die Einführung von β die Konvergenz erhöht, ist doch die Anwendung der betreffenden Reihe im allgemeinen kein Vorteil, falls erst die Breiten der Endpunkte reduziert werden müssen und nicht direkt gegeben sind.

§ 12. **Querkrümmungshalbmesser.** Für zwei Punkte, welche demselben Parallelkreis angehören, schneiden sich die Normalen in *einem* Punkte K' der Rotationsaxe. Legen wir nun durch beide Normalen eine Ebene und lassen die Punkte einander näher rücken und schliefslich in *einem* Punkte P zusammenfallen, so ergiebt sich eine den Parallelkreis tangierende Vertikalebene, welche demnach im Tangentialpunkt gegen die Meridianebene rechtwinklig d. h. im Azimut 90^0 liegt. Der Krümmungsradius des unendlich kleinen an P grenzenden Bogenelements der Oberfläche in dieser Richtung ist aber die Länge der Normale PK', weil sich in K' die Normalen zweier zusammenfallender Punkte des Bogenelements schneiden, wie die vorher gegebene Darstellung erkennen läfst. Wir setzen

$$PK' = \varrho_n \qquad (1)$$

und haben mit Rücksicht auf Figur 1 (S. 40) folgende Relationen für den Querkrümmungshalbmesser (Krümmungsradius im Perpendikel). Es ist

$$\varrho_n = x \sec B = \frac{a_0}{W} \qquad (2)$$

$$\varrho_n = \frac{\varrho_m W^2}{(1 - e^2)}.$$

Die letzte dieser Formeln zeigt, dafs jederzeit $\varrho_n > \varrho_m$ ist d. h.

in jedem Punkt der Oberfläche ist im Meridian die Krümmung stärker als im Perpendikel.

Zur Berechnung eines einzelnen ϱ_n kann anstatt (2) auch die Formel

$$\varrho_n = a_0 \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 B + \frac{5}{16} e^6 \sin^6 B + \cdots\right) \quad (3)$$

dienen; in der Regel aber wird $\log \varrho_n$ nach der oben gegebenen Formel unter Anwendung einer Tafel für W numerisch ausgewertet. Eine Tafel für $\log \varrho_n$ auf 7 Decimalen giebt *Albrecht* S. 199, für $\log \frac{\varrho_n}{\varrho''}$ auf 8 Decimalen *Börsch* a. a. O.

§ 13. **Krümmungsradius in einem beliebigen Azimut.** Um den Krümmungsradius ϱ_α des an P angrenzenden Bogenelements der Durchschnittslinie der Oberfläche mit einer im Punkte P unter dem Azimut α zur Meridianebene geneigten Vertikalebene zu ermitteln, benutzt man den *Euler*schen Satz

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_m} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho_n}. \quad (1)$$

Dieser Satz gilt mit angemessener Abänderung der Bedeutung von ϱ_m und ϱ_n für jede krumme Fläche, wir beschränken uns indessen darauf, ihn hier für das Rotationsellipsoid allein zu beweisen.

Irgend einen Punkt P des Rotationsellipsoids, für welchen vorstehender Satz bewiesen werden soll, nehmen wir als Anfang rechtwinkliger Koordinaten ξ, η, ζ. In der allgemeinen Gleichung vom 2. Grade, welche auch fürs Rotationsellipsoid als Repräsentant dienen kann, verschwindet dann das von den Koordinaten freie Glied, weil für ξ, η und ζ gleich null die Gleichung richtig bleiben mufs; sie lautet daher:

$$0 = 2A\xi + 2B\eta + 2C\zeta + D\xi^2 + E\eta^2 + F\zeta^2 + 2G\xi\eta + 2H\xi\zeta + 2I\eta\zeta,$$

worin $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ gegebene Koefficienten vorstellen, die von der Lage des Punktes und den Axendimensionen abhängen. Nehmen wir nun die $\xi\eta$-Ebene tangential zur Oberfläche, also die Vertikale des Punktes als ζ-Axe, so verschwinden A und B, weil die beiden Differentialquotienten $d\zeta : d\xi$ und $d\zeta : d\eta$ jetzt für ξ, η und ζ gleich null auch gleich null werden.

Legen wir aufserdem die ξ-Axe in die Meridianebene, so wird diese letztere $\xi\zeta$-Ebene und da sie auch Symmetrieebene ist, müssen G und I verschwinden, damit die Gleichung nach η rein quadratisch wird. Somit findet sich nunmehr als Gleichung der Oberfläche

$$0 = 2C\zeta + D\xi^2 + E\eta^2 + F\zeta^2 + 2H\xi\zeta.$$

In der $\xi\eta$-Ebene führen wir jetzt Polarkoordinaten ϑ und α nach den Relationen

$$\xi = \vartheta \cos \alpha \quad \eta = \vartheta \sin \alpha$$

ein. Die Gleichung geht damit nach einfacher Reduktion über in

$$\vartheta^2 = -\zeta \frac{2C + 2H\vartheta \cos \alpha + F\zeta}{D \cos^2 \alpha + E \sin^2 \alpha},$$

und dies ist zugleich die Gleichung der Schnittkurve der Oberfläche mit der Vertikalebene im Azimut α. Ein Kreisbogen vom Radius ϱ_α, der die Schnittkurve in P tangiert (Fig. 2), hat die Gleichung

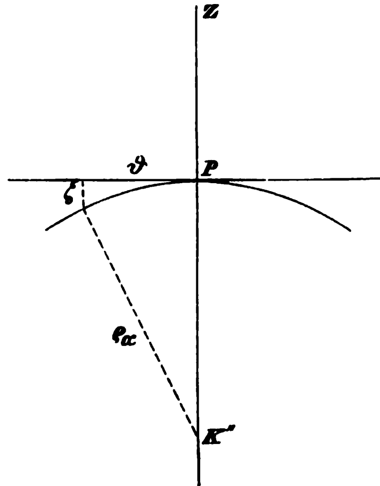


Fig. 2.

$$\vartheta^2 = \zeta(2\varrho_\alpha - \zeta);$$

wählt man also ϱ_α nach der Formel

$$\varrho_\alpha = \frac{-C}{D \cos^2 \alpha + E \sin^2 \alpha}, \qquad (2)$$

so stimmen die Gleichungen beider Kurven bis auf Glieder der Ordnung $\vartheta\zeta$ und ζ^2 zusammen, die für unendlich kleine ϑ gegen die in ζ allein multiplizierten Glieder zu vernachlässigen sind. Der Kreisbogen fällt sonach bei dieser Wahl von ϱ_α am Punkte P näher an die Schnittkurve als bei irgend einer andern Annahme für ϱ_α. Dieser Wert heifst daher *Krümmungsradius* der Oberfläche im Azimut α.

Für $\alpha = 0^0$ und 90^0 ist bezw. $\varrho_\alpha = \varrho_m$ und ϱ_n, also

$$\varrho_m = -\frac{C}{D} \text{ und } \varrho_n = -\frac{C}{E}. \qquad (3)$$

Eliminiert man mittelst dieser Relationen die Koefficienten C, D und E aus (2), so folgt Formel (1).

Diese zeigt, dafs wegen $\varrho_n > \varrho_m$, ϱ_n unter allen ϱ_α ein Maximum, ϱ_m ein Minimum ist. ϱ_m und ϱ_n heifsen daher *Hauptkrümmungsradien.*

§ 14. **Berechnung von ϱ_α.** Aus (1) des vorigen § folgt unter Einsetzung der Werte für ϱ_m und ϱ_n von S. 44 und 56:

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{W}{a_0}\left(\frac{W^2}{1-e^2}\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha\right) = \frac{W}{a_0}(1 + \delta \cos^2 B \cos^2 \alpha)\cdot \qquad (1)$$

Führt man $\tan h = \sqrt{\delta} \cos B \cos \alpha$ ein, so ergiebt sich die bequeme Formel:

$$\left.\begin{aligned} \log \varrho_\alpha &= \log a_0 - \log W + 2 \log \cos h \\ \tan h &= \sqrt{\delta} \cos B \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Um eine Reihenentwicklung zu erhalten, ersetzen wir den Logarithmus von $(1 + \delta \cos^2 B \cos^2 \alpha)$ durch die bekannte Reihe S. 27. Schreibt man in Verfolg dessen einfach

$$\log \varrho_\alpha = \log a_0 - \log W - M\delta \cos^2 B \cos^2 \alpha + \cdots, \quad (3)$$

so ist der Fehler nicht gröfser als 1 Einheit der 5. Decimalstelle. Für val. abs. $B > 45$ ist aber die 6. Stelle meist noch richtig.

Eine sehr ausführliche Tafel für $\log \varrho_\alpha$ auf 6 Stellen mit B und α als Argument, aber Toisenmafs, ist in *Bremikers Studien* ... enthalten. *Albrecht* giebt S. 201 eine ebensolche für Metermafs, aber in zu weitem Intervall, um bequem interpolieren zu können. Eine Tafel für 8ziffrige Werte, die indes einige Rechnung erfordert, und auf die Entwicklung von

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_m} + \frac{1}{\varrho_n}\right)\left\{1 + \frac{\varrho_n - \varrho_m}{\varrho_n + \varrho_m} \cos 2\alpha\right\}$$

gegründet ist, fügte *Bremiker* seinen Tafeln 6ziffriger Logarithmen bei.

§ 15. **Das Krümmungsmafs.** Nach *Gaufs* bezeichnet man den reziproken Wert des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien mit dem Namen Krümmungsmafs. Wir setzen für die geographische Breite B

$$\frac{a_0^2}{\varrho_m \varrho_n} = K, \quad (1)$$

das *Krümmungsmafs* unter der Breite B ist also

$$K : a_0^2. \quad (2)$$

Die Substitution der Werte für ϱ_m und ϱ_n giebt

$$K = \frac{W^4}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2}{w^4}. \quad (3)$$

Eine Tafel für $\log \sqrt{\varrho_m \varrho_n}$ auf 5 Decimalen und für K auf 7 Decimalen giebt *Albrecht* S. 199 und 213; für K auf 8 Stellen und in engem Intervall: *Sadebeck* im 3. Heft der *Rechnungsmethoden des Zentralbureaus* (als Manuskript gedruckt.)

§ 16. **Radiusvektor und geozentrische (verbesserte) Breite.** Wir bezeichnen den vom Mittelpunkt des Ellipsoids nach einem Punkt der Oberfläche gezogenen Radiusvektor MP mit r, seinen Neigungs-

winkel zur Äquatorebene, d. i. die geozentrische Breite, mit φ. Dann ist, Fig. 1 S. 40:

$$x = r \cos\varphi \qquad z = r \sin\varphi, \tag{1}$$

und je nachdem man aus diesen zwei Gleichungen r oder φ eliminiert, erhält man, unter Substitution der Ausdrücke von x und z, φ oder r als Funktionen von B:

$$\left.\begin{aligned} &\tan\varphi = (1 - e^2)\tan B = \frac{1-m}{1+m}\tan B; \\ &r = a_0\sqrt{\frac{1 - e^2(2-e^2)\sin^2 B}{1 - e^2\sin^2 B}} = a_0\sqrt{\frac{1+m^2}{1+m}}\sqrt{\frac{1 + \frac{2m}{1+m^2}\cos 2B}{1 + m\cos 2B}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Eliminiert man aus beiden Formeln B mit Benutzung der Relation $\sin^2 B = \tan^2 B : (1 + \tan^2 B)$, so wird erhalten:

$$r = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \delta\sin^2\varphi}} = \frac{a_0\sqrt{1-m}}{\sqrt{1 - m\cos 2\varphi}}. \tag{3}$$

Vergleicht man S. 41, so ist leicht zu ersehen, daſs φ von B und m gerade so abhängt, als β von B und n. Daher ist unter andern für arc $(B - \varphi)$ in konvergenter Entwicklung:

$$\underset{\text{in Sek.}}{B - \varphi} = \varrho''\left\{m\sin 2B - \frac{m^2}{2}\sin 4B + \frac{m^3}{3}\sin 6B - \cdots\right\}. \tag{4}$$

Aus den Formeln (2) und (3) erhält man folgende Entwicklungen für r:

$$\left.\begin{aligned} \log r = \left\{\log a_0\sqrt{\frac{1+m^2}{1+m}} - \frac{3Mm^2}{8} + \cdots\right\} &= 6{,}8039181.997 \\ + \frac{M}{2}\left(m - \frac{m^3}{4} + \cdots\right)\cos 2B \qquad &+ [3.8615853]\cos 2B \\ - \frac{3Mm^2}{8}\cos 4B + \cdots \qquad &+ [1.26148_n]\cos 4B \\ + \frac{7Mm^3}{24}\cos 6B + \cdots \qquad &+ [0.677 - 2]\cos 6B + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Zahlwerte der Koefficienten sind in Einheiten der 7. Decimalstelle angesetzt.

$$r = a_0\left(1 - \frac{1}{2}\delta\sin^2\varphi + \frac{3}{8}\delta^2\sin^4\varphi - \frac{5}{16}\delta^3\sin^6\varphi + \frac{35}{128}\delta^4\sin^8\varphi\cdots\right) \tag{6}$$

$$r = a_0\sqrt{1-m}\left\{\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{2}{1}\left(\frac{m}{4}\right)^2 + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\cdot\frac{4.3}{1.2}\left(\frac{m}{4}\right)^4 + \cdot\cdot\right) \\ &\quad + \left(\frac{m}{2} + \frac{15m^3}{64} + \cdots\right)\cos 2\varphi \\ &\quad + \left(\frac{3m^2}{16} + \cdots\right)\cos 4\varphi \\ &\quad + \left(\frac{5m^3}{64} + \cdots\right)\cos 6\varphi + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Tafeln für r und $B - \varphi$ giebt *Albrecht* S. 195.

Setzt man allgemein die Polargleichung des Meridians für einen beliebigen Rotationskörper in der Form an:

$$r = a_0 (1 - \alpha_1 \sin^2\varphi + \alpha_2 \sin^4\varphi - \alpha_3 \sin^6\varphi + \alpha_4 \sin^8\varphi \cdots),$$

so bestehen im Falle der Ellipse die Beziehungen

$$2\alpha_2 = 3\alpha_1\alpha_1;\quad 3\alpha_3 = 5\alpha_1\alpha_2;\quad 4\alpha_4 = 7\alpha_1\alpha_3;\quad \text{u. s. w.}\ .$$

§ 17. **Komplanation der Oberfläche.** Ein unendlich schmaler Streifen dZ zwischen zwei Parallelkreisen im Abstande dM, auf dem Meridian gemessen, hat als Inhalt das Produkt von dM in die (als gleich zu betrachtende) Länge der Parallelbögen zwischen zwei begrenzenden Meridianbögen, deren geographischer Längenunterschied L heifsen mag. Der Radius des Parallelkreises unter der geographischen Breite B ist aber nach Fig. 1 (S. 40) gleich

$$x = a_0 \cos\beta = a_0 \cos B : W.$$

Wir erhalten somit für den erwähnten Streifen als Inhalt:

$$dZ = a_0 L \cos\beta dM = a_0 L \cos B dM : W. \tag{1}$$

Hierin hat man nach S. 44 u. 55 als Wert von dM zu setzen:

$$dM = a_0 w d\beta = \frac{a_0 (1 - e^2)\, dB}{W^3},$$

womit sich findet:

$$dZ = a_0^2\, L \sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}\, \cos\beta d\beta = \frac{a_0^2 (1 - e^2)\, L \cos B dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}. \tag{2}$$

Für die Zone vom Äquator bis zur geographischen Breite B folgt hieraus:

$$Z = a_0^2 (1 - e^2)\, L \int\limits_0^{\sin B} \frac{d(\sin B)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}.$$

Die Integration nach $\sin B$ läfst sich geschlossen bewirken, doch ist für die numerische Ausrechnung die Benutzung einer Reihenentwicklung bequemer. Da

$$(1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} = 1 + 2e^2 \sin^2 B + 3e^4 \sin^4 B + 4e^6 \sin^6 B + \cdots,$$

so wird:

$$Z = a_0^2 (1 - e^2) L \sin B \left(1 + \frac{2e^2}{3} \sin^2 B + \frac{3e^4}{5} \sin^4 B + \frac{4e^6}{7} \sin^6 B + \cdots\right). \tag{3}$$

Zur scharfen Berechnung einer Zone zwischen zwei Parallelkreisen B_1 und B_2 ist es nun bequem, zunächst die Sinuspotenzen mittelst der (durch Einführung des Imaginären leicht abzuleitenden) Formeln

$$\left.\begin{aligned}\sin^3 B &= \frac{3}{4}\sin B - \frac{1}{4}\sin 3B\\ \sin^5 B &= \frac{5}{8}\sin B - \frac{5}{16}\sin 3B + \frac{1}{16}\sin 5B\\ \sin^7 B &= \frac{35}{64}\sin B - \frac{21}{64}\sin 3B + \frac{7}{64}\sin 5B - \frac{1}{64}\sin 7B\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wegzuschaffen. Man erhält alsdann nachstehenden Ausdruck für Z:

$$Z = L\,(Z_1 \sin B - Z_3 \sin 3B + Z_5 \sin 5B - Z_7 \sin 7B + \cdots) \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}Z_1 &= a_0^2\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16} - \cdots\right) &&= [13{,}6078327.476]\\ Z_3 &= a_0^2\left(\frac{e^2}{6} + \frac{e^4}{48} + \text{null} + \cdots\right) &&= [10{,}6559083]\\ Z_5 &= a_0^2\left(\frac{3e^4}{80} + \frac{e^6}{40} + \cdots\right) &&= [7{,}83407]\\ Z_7 &= a_0^2\left(\frac{e^6}{112} + \cdots\right) &&= [5{,}04]\end{aligned}\right\}\text{für } Z \text{ in Quadratmetern} \quad (6)$$

Für eine Zone $\varDelta Z$ mit der Mittelbreite $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ und der Amplitude $\varDelta B = B_2 - B_1$ in geographischer Breite zwischen zwei Meridianebenen im geographischen Längenunterschied L ist hiernach der Inhalt:

$$\varDelta Z = 2L\left\{\begin{aligned}&Z_1 \cos B \sin \frac{1}{2}\varDelta B - Z_3 \cos 3B \sin \frac{3}{2}\varDelta B\\ &+ Z_5 \cos 5B \sin \frac{5}{2}\varDelta B - Z_7 \cos 7B \sin \frac{7}{2}\varDelta B + \cdots.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hierbei ist zu setzen:

$$\log L = \log\,(L \text{ in Gr.}) - 1{,}7581226.324. \quad (8)$$

Vorstehende Formel giebt $\varDelta Z$ gerade noch in allen Fällen so genau, als zehnziffrige Logarithmen dies gestatten, wie (6) unmittelbar zeigt und wie auch aus (3) mit Rücksicht auf den Faktor $(1 - e^2)$ erhellt. Es erschien daher nicht nötig, e^8 zu berücksichtigen.

Setzt man in Formel (3) $B = 90^0$ und $L = \frac{\pi}{2}$ und multipliziert mit 8, so folgt:

$$\text{Oberfläche} = 4a^2\pi\left(1 - \frac{e^2}{3} - \frac{e^4}{15} - \frac{e^6}{35} - \cdots\right), \quad (9)$$

wobei das Fortschreiten der Glieder in die Augen springt. Mit *Bessels* Dimensionen erhält man hieraus übereinstimmend mit einer Rechnung nach Formel (7):

509950714,1 Qu.-Kilometer.

Die Integration von dZ mittelst β giebt nach bekannten Formeln der Integralrechnung ohne Reihenentwicklung als Oberfläche

$$2a^2\pi\left(1+\frac{1-e^2}{2e}\log\text{nat}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\right), \tag{10}$$

wonach die Rechnung die angegebene Inhaltszahl auf alle 10 Ziffern bestätigt. Benutzt man auch hier vor der Integration eine Reihenentwicklung nach Potenzen von $\sin\beta$, so folgt die stark konvergente Reihe:

$$4a_0b_0\pi\left(1+\frac{1}{6}\delta-\frac{1}{40}\delta^2+\frac{1}{112}\delta^3-\cdots\right). \tag{11}$$

Eine Tafel für Z giebt *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde Band 2, S. 54.

§ 18. Mittlerer Krümmungsradius in einem Punkte. Nach S. 57 Formel (1) ist

$$\varrho_\alpha=\frac{\varrho_m\varrho_n}{\varrho_n\cos^2\alpha+\varrho_m\sin^2\alpha}.$$

Hieraus erhält man einen durchschnittlichen Wert, wenn man sich die Vertikalschnitte um den Punkt herum unendlich dicht, aber gleichförmig verteilt denkt. Setzt man demgemäfs die Anzahl der ϱ_α für die Azimutaldifferenz $d\alpha$ proportional $d\alpha$, so ist der Durchschnitt gleich

$$\int_0^{2\pi}\frac{\varrho_m\varrho_n\,d\alpha}{\varrho_n\cos^2\alpha+\varrho_m\sin^2\alpha}:\int_0^{2\pi}d\alpha$$

d. i.

$$\frac{2}{\pi}\varrho_m\varrho_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\varrho_n\cos^2\alpha+\varrho_m\sin^2\alpha}.$$

Führt man hierin $\sqrt{\frac{\varrho_m}{\varrho_n}}\tan\alpha=t$ als Variable ein, so folgt:

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{\varrho_m\varrho_n}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}$$

d. i.

$$\sqrt{\varrho_m\varrho_n}\ \text{oder}\ \frac{a_0}{\sqrt{K}}. \tag{1}$$

Der mittlere Krümmungsradius in einem Punkte der Oberfläche ist daher der reziproke Wert der Quadratwurzel des Krümmungsmafses in diesem Punkte.

Dieser Satz gilt für jede Fläche. Ebenso der andere leicht abzuleitende, daſs der Durchschnitt aller $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ in einem Punkte gleich ist:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_m}+\frac{1}{\varrho_n}\right).$$

§ 19. **Verschiedene mittlere Krümmungsradien.** Einen Durchschnittswert des mittleren Krümmungsradius in einem Punkt in Bezug auf alle Werte von B innerhalb des Meridianquadranten erhält man durch den ähnlich wie im vorigen § zu bildenden Ausdruck

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_0}{\sqrt{K}}\,dB : \int_0^{\frac{\pi}{2}} dB$$

d. i.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_0\sqrt{1-e^2}\,dB}{1-e^2\sin^2 B} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} dB\,.$$

Die Substitution $u = \cot B : \sqrt{1-e^2}$ im Zählerintegral führt zu dem nachstehenden Wert des *mittleren Krümmungsradius für alle Punkte eines Meridians:*

$$\frac{2a_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2}$$

d. i.

$$a_0\,. \tag{1}$$

Selbstverständlich erhält man einen andern Wert, wenn man die gleichmäſsige Verteilung nach der reduzierten Breite β oder nach der Meridianbogenlänge nimmt. Hier darauf einzugehen, scheint nicht angemessen, weil es sich dabei um mathematische Aufgaben ohne erheblich praktischen Wert handelt.

Zieht man nicht den einzelnen Meridian, sondern die Oberfläche in betracht, so hat man die Werte $a_0 : \sqrt{K}$ gleichmäſsig über die Oberfläche verteilt anzunehmen, um im eigentlichen Sinn des Wortes den mittlern Krümmungsradius der Oberfläche zu erhalten. Derselbe ist also, wobei wir uns bei der Integration auf den Oktanten beschränken können, gleich:

$$a_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dZ}{\sqrt{K}} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} dZ\,.$$

Hierin ist die differentiale Zone dZ für die geographische Längendifferenz $L = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Die weitere Rechnung wird am bequemsten mit der reduzierten Breite als der Variablen, S. 40 (2).

Führt man K nach S. 59 (3) und das Nennerintegral nach S. 63 (11) ein, so findet sich:

$$\frac{a_0\sqrt{1-e^2}\int\limits_0^1 \sqrt{1+\delta\sin^2\beta}^{\,3}\, d(\sin\beta)}{1+\frac{1}{6}\delta-\frac{1}{40}\delta^2+\frac{1}{112}\delta^3-\cdots}.$$

Entwickelt man im Zähler nach Potenzen von $\sin\beta$ und integriert, so wird das Integral gleich $1+\frac{1}{2}\delta+\frac{3}{40}\delta^2-\frac{1}{112}\delta^3+\cdots$ und man erhält schliefslich als Wert des *mittlern Krümmungsradius der Oberfläche:*

$$\left.\begin{array}{l} b_0\left(1+\frac{1}{3}\delta+\frac{2}{45}\delta^2-\frac{16}{945}\delta^3+\cdots\right) \\ \text{oder} \\ a_0\left(1-\frac{1}{6}e^2+\frac{31}{360}e^4+\frac{1697}{15120}e^6+\cdots\right). \end{array}\right\} \quad (2)$$

Die hierzu nötige Division des Nenners in den Zähler ist erlaubt, da jener die Form $(1+u)$ hat, worin die Reihe u auch bei positiv gesetzten Gliedern sicher < 1 ist, so lange es sich nur ums Erdellipsoid handelt.

Wertet man die Integrale in geschlossener Form aus, so ergiebt sich für den mittlern Krümmungsradius der Oberfläche der Ausdruck:

$$\frac{b_0\left\{\frac{1}{4(1-e^2)^2}+\frac{3}{8(1-e^2)}+\frac{3}{16e}\log\text{nat}\frac{1+e}{1-e}\right\}}{\frac{1}{2(1-e^2)}+\frac{1}{4e}\log\text{nat}\frac{1+e}{1-e}}.$$

Wendet man hierauf Reihenentwicklung an, so läfst sich erkennen, dafs die zweite der Reihen (2) gilt für $e < 1$. [Vergl. dazu § 18 (10) und (9)].

Ein durch Einfachheit des mathematischen Ausdrucks ausgezeichneter Durchschnitt, der den vorigen Wert näherungsweise ersetzen kann, wird erhalten, wenn man $a_0 : \sqrt{K}$ nicht mit dZ, sondern mit $x\,dB$ multipliziert, also die Verteilung gleichmäfsig nach der geographischen Breite und auf dem Parallelkreise annimmt. Es folgt hier

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_0 e}{\text{arc}\sin e} \\ \text{d. i. auch} \\ a_0\left(1-\frac{1}{6}e^2-\frac{17}{360}e^4-\frac{367}{15120}e^6-\cdots\right). \end{array}\right\} \quad (3)$$

§ 20. **Mittlerer Radiusvektor.** Auch in Bezug auf den Radiusvektor r lassen sich verschiedene Durchschnittswerte je nach den

Voraussetzungen ableiten. Es mögen hier nur die wichtigsten erwähnt werden.

Nimmt man innerhalb der Meridianebene die r in gleichmäfsiger Verteilung in Bezug auf die geozentrische Breite φ, so wird der Durchschnitt gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\varphi : \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \text{ oder } \frac{2a_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\delta\sin^2\varphi}}. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck führt durch einfache Transformationen auf ein vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung. Hier benutzen wir indes die Reihenentwicklung (7) S. 60 für r nach Cosinus der Vielfachen von 2φ und erhalten, insofern alle Integrale mit den Cosinus null ergeben, als *mittlern Radiusvektor des Meridians*

$$\left.\begin{array}{l} a_0\sqrt{1-m}\left(1+\frac{3}{16}m^2+\cdots\right) \\ \text{oder auch} \\ a_0\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{7}{64}e^4-\frac{17}{256}e^6-\cdots\right). \end{array}\right\} \tag{2}$$

Der mittlere Radiusvektor der Meridianellipse weicht hiernach von dem entsprechenden mittlern Krümmungsradius a_0 um Gröfsen von der Ordnung der Abplattung ab.

Nimmt man die Radienvektoren r gleichmäfsig dicht nach allen Richtungen des Raumes um das Zentrum verteilt an, so erhält man ihren Durchschnittswert aus der Formel

$$\int r\,d\omega : \int d\omega,$$

worin ω das Oberflächenelement einer zum Ellipsoid konzentrischen Kugel vom Radius 1 ist und die Integrationen sich über die Oberfläche derselben erstrecken. Da r für konstante geozentrische Breite φ denselben Wert behält, kann man unter $d\omega$ sogleich die Zone verstehen, welche auf der Kugel zwischen den Parallelkreisen φ und $\varphi + d\varphi$ liegt, d. h. man kann

$$d\omega = 2\pi\cos\varphi\,d\varphi$$

setzen. Damit wird der *mittlere Radiusvektor der Oberfläche bei gleichmäfsiger Verteilung ums Zentrum herum:*

$$\frac{a_0\int_0^1 \frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{1+\delta\sin^2\varphi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi} = b_0 \log\text{nat}\sqrt[2e]{\frac{1+e}{1-e}}. \tag{3}$$

Entwickelt man dagegen vor der Integration in eine Reihe, so folgt derselbe gleich

$$\left.\begin{array}{l} a_0\left(1-\frac{1}{6}\,\delta+\frac{3}{40}\,\delta^2-\frac{5}{112}\,\delta^3+\cdots\right) \\ \text{oder} \\ a_0\left(1-\frac{1}{6}\,e^2-\frac{11}{120}\,e^4-\frac{103}{1680}\,e^6-\cdots\right). \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Der im eigentlichen Sinne des Worts mittlere Radiusvektor der Oberfläche ergiebt sich, wenn man die r gleichmäſsig über diese selbst verteilt annimmt und also den Ausdruck

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,dZ : \int_0^{\frac{\pi}{2}} dZ$$

bildet. S. 61 (2) giebt, indem man sich auf den Oktanten beschränken darf:

$$dZ = \frac{a^2\pi}{2}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}\,\cos\beta\, d\beta\,.$$

Das Nennerintegral ist die bereits berechnete Oktantenoberfläche. Im Zählerintegral setzen wir

$$r = \sqrt{a_0^2\cos^2\beta + b_0^2\sin^2\beta} = a_0\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}.$$

Dasselbe läſst sich in geschlossener Form durch vollständige elliptische Integrale ausdrücken.*) Indessen ist im vorliegenden Falle der Endausdruck in Reihengestalt weit einfacher. Wir setzen also im Zähler

$$\frac{a_0^3\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-e^2\cos^2\beta)\,(1-e^2\sin^2\beta)}\,\cos\beta\, d\beta$$

$$= \frac{a_0^2 b_0\pi}{2}\int_0^1\sqrt{1+\frac{e^4}{1-e^2}\sin^2\beta\,(1-\sin^2\beta)}\; d(\sin\beta).$$

Nehmen wir hinzu den Nenner nach S. 63 (11) so wird als *mittlerer Radiusvektor der Oberfläche* erhalten:

$$a_0\,\frac{1+\frac{1}{15}\left(\frac{e^4}{1-e^2}\right)-\cdots}{1+\frac{1}{6}\,\delta-\frac{1}{40}\,\delta^2+\frac{1}{112}\,\delta^3-\cdots} \qquad (5)$$

---

*) Vergl. *Drobisch*, Berichte über die Verhandl. der Ges. der Wissensch. zu Leipzig. 1858. S. 159.

oder

$$a_0\left(1-\frac{1}{6}e^2-\frac{17}{360}e^4-\frac{83}{3024}e^6-\ldots\right). \tag{6}$$

§ 21. **Erdkugel.** Will man das Erdellipsoid durch eine Kugel von möglichst gleichen Eigenschaften ersetzen, so kommt der Umstand zu statten, dafs die verschiedenen Werte der mittleren Radienvektoren der Oberfläche unter sich und mit den Werten des mittleren Krümmungsradius der Oberfläche bis auf Glieder von der Ordnung des Quadrats der Abplattung übereinstimmen. Für *Bessels* Dimensionen der Erde ist der Wert

$$[3{,}80416] = 6370{,}3 \text{ Kilometer} \tag{1}$$

bis auf weniger als 30^m sowohl irgend ein mittlerer Radiusvektor der Oberfläche, als ihr mittlerer Krümmungsradius.

Dieser Wert entspricht auch sehr nahe dem Radius einer *Kugel gleicher Oberfläche* (vergl. S. 62 (9)):

$$\sqrt{\frac{\text{Oberfläche}}{4\pi}}$$

d. i.

$$a_0\left(1-\frac{1}{6}e^2-\frac{17}{360}e^4-\frac{67}{3024}e^6-\ldots\right), \tag{2}$$

ferner dem Radius einer *Kugel gleichen Inhalts:*

$$\sqrt[3]{a_0^2 b_0}$$

d. i.

$$a_0\left(1-\frac{1}{6}e^2-\frac{5}{72}e^4-\frac{55}{1296}e^6-\ldots\right), \tag{3}$$

sowie dem *arithmetischen Mittel der drei Halbaxen* des Ellipsoids:

$$\frac{a_0+a_0+b_0}{3}$$

d. i.

$$a_0\left(1-\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{24}e^4-\frac{1}{48}e^6-\ldots\right). \tag{4}$$

Wollte man einen *geschlossenen* Ausdruck haben, so würde sich (S. 65 Anm.) der nachstehende am besten eignen:

$$\frac{a_0 e}{\text{arc} \sin e}.$$

2. Kapitel.

Dreiecke und Dreiecksnetze auf der Kugel.

§ 1. Horizontale Entfernung, kürzeste und geodätische Linie. Wir setzen in diesem und dem nächstfolgenden Kapitel voraus, dafs alle Niveauflächen konzentrische Kugelflächen sind, mithin alle Lotlinien gerade Linien durch das gemeinsame Zentrum jener.*) Je zwei Lotlinien haben dann eine gemeinsame Vertikalebene, welche die physische Erdoberfläche in einem mehr oder weniger welligen Profil, jede Niveaufläche aber in einem gröfsten Kreis schneidet. Schon S. 6 ist für den vorliegenden Fall der gröfste Kreisbogen zwischen den vertikalen Projektionen zweier Punkte auf irgend eine Niveaufläche als *horizontale Entfernung* bezeichnet worden; es wurde auch die Abhängigkeit dieser Entfernung von der Höhenlage der Niveaufläche erwähnt. Den Radius der letzteren setzen wir = 1.

Die horizontale Entfernung zweier Punkte giebt auf der betreffenden Niveaufläche zugleich die *kürzeste Entfernung* der Projektionen beider Punkte an.

Um dies nachzuweisen, teilen wir den gröfsten Kreisbogen $P_0 P_n$ (Fig. 3) zwischen den mit P_0 und P_n bezeichneten Projektionen in unendlich kleine Strecken P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, u. s. f. und beschreiben mit P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3, u. s. f. als Radien um P_0 herum Kreise. Diese Kreise sind kleine Kugelkreise, die paarweise überall ringsum denselben Abstand haben. Die kürzeste Verbindung von P_0 und P_n auf der Kugeloberfläche ist nun darum der gröfste Kreisbogen selbst und nicht irgend eine andere Linie $P_0 P_1' P_2' P_3' \dots P_n$, weil nur er überall dem kleinsten Abstand der kleinen Kugelkreise folgt. Dagegen ist im allgemeinen

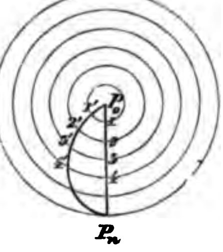


Fig. 3.

$$P_0P_1' \geqq P_0P_1;\ P_1'P_2' \geqq P_1P_2;\ P_2'P_3' \geqq P_2P_3;\ \text{u. s. f.}$$

Es ist also

$$P_0P_1'P_2'P_3' \dots P_n > P_0P_1P_2P_3 \dots P_n.$$

Eine Ausnahme tritt nur ein für $P_0 P_n > \pi$. Für diesen Fall ist die kürzeste Entfernung gleich dem Umfang der Kugel weniger $P_0 P_n$. Dagegen

*) Späteren Untersuchungen bleibt es vorbehalten zu entscheiden, in wieweit die Entwicklungen des 2. und 3. Kapitels für die thatsächlichen Verhältnisse brauchbar sind.

ist $P_0 P_n$ auch nicht einmal ein relatives Minimum mehr, da jede unendlich benachbarte Verbindung von P_0 und P_n auf einem kleinen Kreise kürzer ist.

Die Ebene des gröfsten Kreisbogens ist die gemeinsame Vertikalebene nicht nur der Endpunkte, sondern auch aller Zwischenpunkte, weil alle Radien Normalen der Kugeloberfläche sind und jene Ebene durch den Kugelmittelpunkt hindurchgeht. Es ist daher auch die drei unendlich benachbarten Punkten des gröfsten Kreisbogens entsprechende Ebene, d. i. die Schmiegungsebene desselben an der betreffenden Stelle, daselbst eine Vertikalebene. Wegen dieser Eigenschaft des gröfsten Kreisbogens darf man denselben auch als die *geodätische Linie* auf der Kugeloberfläche bezeichnen.

Zur Erklärung dieser Ausdrucksweise denke man sich für Bewohner einer beliebig krummen Oberfläche, die zugleich Niveaufläche sei, die Aufgabe gestellt, eine im Sinne der geodätischen Praxis gerade Linie von einem Punkt P_0 aus in gegebener Richtung zu legen.

Dann wird man zunächst eine Vertikalebene von P_0 aus in dieser Richtung legen und darin auf der Oberfläche einen Punkt P_1 annehmen, in P_1 eine Vertikalebene durch P_0 legen und in ihr einen Punkt P_2 annehmen (Fig. 3), von P_2 aus in der Vertikalebene durch P_1 einen neuen Punkt P_3 annehmen, u. s. f., wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, dafs die benachbarten Punkte so dicht liegen, dafs kein merkbarer Unterschied der benachbarten Vertikalebenen vorhanden ist, dafs mithin je drei benachbarte Punkte in einer Ebene liegen, die an dieser Stelle Vertikalebene der Oberfläche ist.

Man sieht hieraus, dafs im vorigen Sinne die gerade Linie des Geodäten, d. h. in korrekterer Bezeichnung: die geodätische Linie, diejenige Eigenschaft in Bezug auf ihre Schmiegungsebene hat, die ihr oben beigelegt wurde.

§ 2. **Horizontalwinkel.** Die direkte Messung einer horizontalen Entfernung ist nur bei günstigen Profilverhältnissen ausführbar und empfehlenswert. In anderen Fällen wird man die schon S. 12 angedeutete Methode der Triangulation einschlagen und dabei die direkt zu messende Linie, die Grundlinie oder Basis des Dreiecksnetzes, so legen, dafs sie zur direkten Messung geeignet ist.

Die Entfernungen, welche man bei Landesvermessungen oder Gradmessungen direkt mifst, betragen jetzt in der Regel nur einige Kilometer. Die Seiten der Dreiecke, deren Winkel direkt gemessen worden sind, erreichen dagegen oftmals Beträge von 50^{km}. Bei der Vermessung Vorderindiens durch die Engländer kamen häufig Visuren von 160 bis 240^{km} nach Gipfeln des Himalaya vor; *eine* Länge beträgt sogar ca. 340^{km}.

Verbindet man je zwei der Horizontalprojektionen von drei Punkten einer Triangulation durch die gröfsten Kreisbögen, ihre horizontalen Entfernungen, so ergiebt sich ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel die Flächenwinkel der zu den betreffenden Kreisbögen gehörigen

Vertikalebenen sind. Als solche lassen sie sich mit geeigneten Winkelinstrumenten, namentlich dem Theodolit, der auf der physischen Erdoberfläche (und zwar rein theoretisch genommen: an einer *beliebigen* Stelle der Lotlinie des Winkelscheitels) aufgestellt wird, messen.

Die weiter zu lösenden Aufgaben sind nun identisch mit den Aufgaben der sphärischen Trigonometrie.

In den folgenden Paragraphen dieses Kapitels geben wir zunächst eine Entwicklung der Formeln für beliebig grosse sphärische Dreiecke, schließen daran die Formeln für Dreiecke, deren Seiten im Verhältnis zum Radius der Kugel klein sind und geben danach noch Formeln für die Lösung der Aufgaben mittelst des Sehnendreiecks.

§ 3. **Das sphärische Dreieck.** Legt man durch zwei Punkte der Kugeloberfläche einen größten Kreis, so wird dieser im allgemeinen in zwei Teile geteilt, einen $> \pi$ und einen $< \pi$. Dieser letztere kommt in der Regel allein in betracht. Interessieren also besonders sphärische Dreiecke mit Seiten $< \pi$, so kommen doch auch andere, namentlich solche, wo eine Seite $> \pi$ ist, in der Geodäsie vor. Dreiecke, in denen 2 Seiten $> \pi$ sind, sind keine eigentlichen Dreiecke mehr, da außer den Ecken noch eine Durchkreuzung dieser 2 Seiten vorhanden ist.

Die Dreieckswinkel zählen wir in der Weise, daß sie bei einer angenommenen Reihenfolge der Seiten dasjenige Maß der Drehung in einem festgesetzten Sinne bezeichnen, welches notwendig ist, um eine vorangehende Seite mit der nachfolgenden zusammenfallen zu lassen. Demgemäß bleiben die Winkelräume immer auf derselben Seite, wenn der Contour durchlaufen wird.

Zählt man ferner von einer für jeden Eckpunkt vorläufig beliebig gewählten Richtung aus Azimute in demselben Drehungssinne, so ist alsdann der

$$\text{Dreieckswinkel} = \text{dem Azimut der nachfolgenden Seite} - \text{dem der vorangehenden Seite.} \tag{1}$$

Sind nun α, β und γ die drei auf einander folgenden Seiten des Dreiecks, ausgedrückt in Bruchteilen des Kugelradius, und A, B und C die gegenüber liegenden Ecken, sind ferner $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{C}_\alpha$ die Azimute von α in den Ecken B und C; $\mathfrak{C}_\beta$, $\mathfrak{A}_\beta$ die Azimute von β in den Ecken C und A; $\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{B}_\gamma$ diejenigen von γ in den Ecken A und B, so werden die Relationen zwischen den Winkeln und Azimuten:

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_\gamma \\ B &= \mathfrak{B}_\gamma - \mathfrak{B}_\alpha \\ C &= \mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sind die hiernach berechneten Winkel negativ, so denken wir uns noch 360^0 addiert.

Durch Umkehrung der Reihenfolge der Seiten treten an Stelle der bisherigen Winkel ihre Ergänzungen zu 360^0, weil z. B. A in $\mathfrak{A}_\gamma - \mathfrak{A}_\beta$ übergeht.

§ 4. **Differentialformeln; Sinus- und Cosinussatz.** Um mathematische Beziehungen zwischen den Seiten nnd Winkeln zu erhalten, schlagen wir einen ähnlichen Weg wie später für geodätische Dreiecke auf dem Rotationsellipsoid ein. Zu dem Zwecke stellen wir zunächst die Differentialformeln auf, dabei nehmen wir die Seiten als unabhängige, die Winkel als abhängige Variable.

Dreht man die Seite α um den Endpunkt B um $d\mathfrak{B}_\alpha$, so beschreibt C das Bogendifferential CC' eines kleinen Kreises mit dem Radius $\sin\alpha$ für den Kugelradius 1. Also wird

$$CC' = \sin\alpha\, d\mathfrak{B}_\alpha\,.$$

Ist $\alpha > \pi$, so hat CC' gegen BC entgegengesetzte Lage wie in Fig. 4, was auch das negative Vorzeichen von $\sin\alpha$ andeutet.

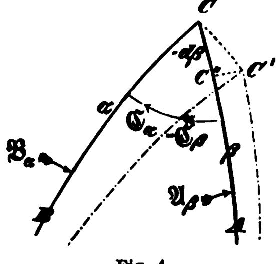


Fig. 4.

Der Lage C' des dritten Eckpunktes entsprechen Änderungen in β und $\mathfrak{A}_\beta$, die aus Fig. 4 leicht zu entnehmen sind. In derselben bedeutet $C'C''$ das Differential des von AC'' beschriebenen kleinen Kreises:

$$C''C' = \sin\beta\, d\mathfrak{A}_\beta\,.$$

Das Differentialdreieck $CC'C''$ ist in C'' rechtwinklig, seine Kathete CC'' giebt die Abnahme von β an:

$$CC'' = -\,d\beta\,.$$

Die Betrachtung des Differentialdreiecks giebt nun weiter:

$$-\,d\beta = \sin\alpha\, d\mathfrak{B}_\alpha \,.\, \sin(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta) \tag{1}$$

$$\sin\beta\, d\mathfrak{A}_\beta = \sin\alpha\, d\mathfrak{B}_\alpha \,.\, \cos(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta)\,, \tag{2}$$

und zwar gelten diese Formeln allgemein für jeden Betrag der Azimute $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$, sowie für jeden Drehungssinn derselben, wenn er nur für alle Azimute derselbe ist. Wir können sie daher auch auf den Fall anwenden, wo anstatt α die Seite γ sich um die Ecke B um $d\mathfrak{B}_\gamma$ dreht, also die Ecke A sich entsprechend verschiebt und die Seite β sich entsprechend ändert.

Es wird dann durch Vertauschung von α und γ, sowie von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ aus (1):

$$-d\beta = \sin\gamma\, d\mathfrak{B}_\gamma \,.\, \sin(\mathfrak{A}_\gamma - \mathfrak{A}_\beta)\,. \tag{3}$$

Nehmen wir nun $d\beta$ ebenso grofs an, wie vorher, so wird aus der Gleichsetzung beider Werte nach (1) und (3) erhalten:

$$\sin\alpha \sin(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta)\, d\mathfrak{B}_\alpha = \sin\gamma \sin(\mathfrak{A}_\gamma - \mathfrak{A}_\beta)\, d\mathfrak{B}_\gamma\,. \tag{4}$$

Die beiden Dreiecke mit denselben Seiten $\alpha, \beta - d\beta$ und γ sind aber kongruent, und man kann sie durch eine differentiale Verschiebung zur Deckung bringen. Mithin hat Winkel B in beiden gleiche Gröfse. Mit Rücksicht auf S. 71 (2) ist aber dB d. h. die Änderung von B gegen seinen Betrag in dem ursprünglichen Dreieck,

bei der ersten Bewegung gleich $-d\mathfrak{B}_\alpha$,

" " zweiten " " $+d\mathfrak{B}_\gamma$,

welchen Werten also gleiche Gröfse zukommt. Wird dies in (4) eingeführt, so folgt der *Sinussatz* der sphärischen Trigonometrie:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_\gamma)}{\sin(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta)}$$

d. i.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin A}{\sin C}. \tag{5}$$

Zugleich geht die Differentialformel (1) über in

$$d\beta = \sin\alpha \sin C\, dB. \tag{6}$$

Um diese Differentialgleichung zu integrieren, wenden wir (5) auf β und γ an und eliminieren mittelst der so erhaltenen Gleichung

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

aus (6) den Faktor $\sin C$, womit (6) übergeht in die Form

$$\sin\beta\, d\beta = \sin\alpha \sin\gamma \sin B\, dB,$$

woraus durch Integration, da α und γ konstant sind, sich sofort ergiebt:

$$\cos\beta = \sin\alpha \sin\gamma \cos B + \text{Konst.}$$

Zur Bestimmung der Konstanten dient der Umstand, dafs für $B = 180^\circ$ die Seite $\beta = (a + \gamma)$ oder $2\pi - (a + \gamma)$ sein mufs. Mithin ist

$$\cos(a + \gamma) = -\sin\alpha \sin\gamma + \text{Konst.}$$

Zieht man dies oben ab und reduziert auf $\cos\beta$, so erhält man den *Cosinussatz* (für Dreiecksseiten):

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos B. \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung, welche durch cyklische Vertauschung der Stücke des Dreiecks 3 Relationen giebt, läfst sich die ganze sphärische Trigonometrie ableiten. Eine der Formeln werden wir indes noch aus den Differentialformeln schöpfen.

Dividieren wir zu dem Zwecke die Gleichungen (1) und (2) Seite für Seite durch einander und beachten, dafs nach S. 71 (2) $d\mathfrak{A}_\beta = dA$ ist, so erhalten wir einerseits:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{A}_\beta}{d\beta} &= -\frac{1}{\tan(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta)\sin\beta}\\ \text{d. i.}\qquad \frac{dA}{d\beta} &= -\frac{1}{\tan C\sin\beta}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Andrerseits giebt (1) durch Vertauschung von β und α, sowie von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, mit Rücksicht auf S. 71 (2):

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{1}{\sin C\sin\beta}. \tag{9}$$

A ist aber eine Funktion von α, β und γ. In (8) sind α und γ konstant; in (9) sind β und γ konstant. Man schreibt daher zunächst besser mit Benutzung des Zeichens partieller Differentiation statt (8) und (9):

$$\frac{\partial A}{\partial\beta} = -\frac{1}{\tan C\sin\beta},$$

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sin C\sin\beta}.$$

Nun hat man zwei Wege, um $\frac{\partial^2 A}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ zu bilden. Indem wir sie beide betreten, folgt ohne Mühe:

$$\frac{1}{\sin^2 C\sin\beta}\cdot\frac{\partial C}{\partial\alpha} = -\frac{\cos C}{\sin^2 C\sin\beta}\cdot\frac{\partial C}{\partial\beta} - \frac{\cos\beta}{\sin C\sin^2\beta}. \tag{10}$$

Um die hierin auftretenden Differentialquotienten zu finden, vertauschen wir in der 2. Formel (8) $\alpha\beta\gamma$ cyklisch mit $\gamma\alpha\beta$ und ABC mit CAB, wodurch sie selbstverständlich ihre Gültigkeit nicht verliert; dann folgt

$$\frac{\partial C}{\partial\alpha} = -\frac{1}{\tan B\sin\alpha}.$$

Bewirkt man ferner in der 1. Formel (8) die hierin jedenfalls zulässigen Vertauschungen α und γ, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, so folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{C}_\beta}{\partial \beta} = -\frac{1}{\tan(\mathfrak{A}_\gamma - \mathfrak{A}_\beta)\sin\beta}$$

d. i.

$$\frac{\partial C}{\partial \beta} = -\frac{1}{\tan A \sin\beta}.$$

Substituiert man die erhaltenen Werte der Differentialquotienten in (10), multipliziert dann beiderseits mit $\sin A \sin^2 C \sin^2 \beta$ und beachtet linker Hand, dass $\sin A \sin\beta = \sin B \sin\alpha$ ist, so folgt der *Cosinussatz* (für Dreieckswinkel):

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos \beta. \tag{11}$$

Es mag hier nochmals hervorgehoben werden, dafs die Formeln (5), (7) und (11) zufolge ihrer Ableitung aus den Differentialformeln (1) und (2), sowie den Formeln (2) S. 71 an keine andre Bedingung geknüpft sind als diejenige, dafs für eine beliebig gewählte Reihenfolge der Seiten die Winkel dasjenige Mafs der Drehung bezeichnen, welches nötig ist, um eine vorangehende Seite mit der nachfolgenden zur Deckung zu bringen, entsprechend Formel (2) S. 71. Der Drehungssinn ist dabei ganz beliebig und nur identisch für alle 3 Winkel vorausgesetzt. *Negative Winkelwerte* sind nicht ausgeschlossen und die Seiten dürfen beliebig $\gtrless \pi$ sein.

§ 5. **Cotangentenformel und Formeln für 5 Stücke.** Die Formel (7) des vorigen Paragraphen giebt durch cyklische Vertauschung der Stücke des Dreiecks

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

Eliminiert man hieraus $\cos\beta$ mittelst der ebengenannten Formel (7), sowie $\sin\beta$ mittelst der aus (5) S. 73 durch Vertauschung der Stücke herzuleitenden Relation $\sin\beta = \sin B \sin\alpha : \sin A$, so ergiebt sich die *Cotangentenformel* für vier auf einander folgende Stücke:

$$\cot\alpha \sin\gamma - \cot A \sin B = \cos B \cos\gamma. \tag{1}$$

Die bisher entwickelten Formeln beziehen sich immer auf 4 Stücke. Andere Formeln mit 4 Stücken, die nicht aus jenen durch cyklische Vertauschung der Stücke hervorgehen, giebt es nicht, da 1 Seite und 3 Winkel, 3 Seiten und 1 Winkel, 2 Seiten und 2 Gegenwinkel, 2 Seiten und 1 Gegenwinkel und der Zwischenwinkel die einzig möglichen Fälle der Kombination der 6 Stücke des Dreiecks zu je 4 sind und nur je eine Formel geben. Dagegen giebt es noch Formeln mit 5 und 6 Stücken von Wert.

Setzt man in (1) für $\sin B$ den gleichwertigen Ausdruck $\sin\beta \sin A : \sin\alpha$, so folgt für 5 Stücke

$$\sin\beta \cos A = \cos\alpha \sin\gamma - \sin\alpha \cos\gamma \cos B. \qquad (2)$$

Setzt man dagegen für $\sin\gamma$ den Ausdruck $\sin\alpha \sin C : \sin A$, so folgt

$$\sin C \cos\alpha = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos\gamma. \qquad (3)$$

Bei der Anwendung der Formeln (5), (7) und (11) des vorigen Paragraphen und (1), (2), (3) dieses Paragraphen ist man an cyklische Vertauschungen nicht gebunden. Man darf auch beliebige 2 Seiten vertauschen, wenn zugleich die Gegenwinkel vertauscht werden. Für die erstgenannten 4 Formeln zeigt dies leicht eine Vergleichung mit den Ergebnissen cyklischer Vertauschung und da die letzten beiden Formeln einfach aus den ersten vier folgen, so gilt der Satz also auch für diese.

§ 6. **Gegeben 3 auf einander folgende Stücke.** Sind 3 auf einander folgende Stücke eines Dreiecks gegeben, so erhält man eine vollständige Auflösung mittelst einer von beiden nachstehenden Formelsystemen, die aus dem in § 4 und § 5 Gefundenen leicht durch passende Vertauschungen abzuleiten sind:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A \\ \sin\alpha\cos B &= \cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma\cos A \\ \sin\alpha\sin B &= \sin\beta\sin A \\ \sin\alpha\cos C &= \cos\gamma\sin\beta - \sin\gamma\cos\beta\cos A \\ \sin\alpha\sin C &= \sin\gamma\sin A. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha \\ \sin A\cos\beta &= \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos\alpha \\ \sin A\sin\beta &= \sin B\sin\alpha \\ \sin A\cos\gamma &= \cos C\sin B + \sin C\cos B\cos\alpha \\ \sin A\sin\gamma &= \sin C\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die Auflösung des 1. Systems giebt α, B und C, die des 2. Systems A, β und γ insoweit völlig bestimmt, als man sich nur entscheiden mufs, ob $\alpha \gtrless \pi$ bezw. $A \gtrless 180^0$ genommen werden soll. Diese Entscheidung ist notwendig, weil das 1. System das Vorzeichen von $\sin\alpha$ und das 2. System dasjenige von $\sin A$ unbestimmt läfst. Andernfalls hat man 2 Auflösungen, die indessen zu *derselben* Lage der 3 gröfsten Kreise führen; es entsprechen nämlich den Werten

$\alpha \quad B \quad C$ der einen Auflösung, die Werte

$2\pi - \alpha \quad 180^0 + B \quad 180^0 + C$ der andern Auflösung

für System (1); und bei System (2) den Werten

$A \qquad \beta \qquad \gamma$ der einen Auflösung, die Werte

$360^0 - A \quad \pi + \beta \quad \pi + \gamma$ der andern Auflösung.

Die numerische Genauigkeit der Formeln läfst nichts zu wünschen übrig, da jedes Stück aus der Tangente oder Cotangente hergeleitet werden kann; so giebt die Division der 2. und 3. Gleichung des 1. Systems zunächst $\cot B$ — es entspricht diese Bestimmung der Cotangentenformel — beide Formeln geben dann $\sin \alpha$ u. s. f. Die Bequemlichkeit der Formeln für logarithmische Rechnung ist aber nicht so grofs, dafs nicht für manche Fälle geeignetere Formeln erwünscht wären.

§ 7. **Die Formeln von Neper und Gaufs.** Aus den Formeln

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin B &= \sin \beta \sin A \\ \sin \alpha \sin C &= \sin \gamma \sin A \end{aligned} \qquad (1)$$

folgt durch Addition resp. Subtraktion und einfache Reduktion:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} &= \sin A \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2} \\ \sin \alpha \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2} &= \sin A \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\beta-\gamma}{2}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ebenso behandelt ergeben die Formeln

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos B &= \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma \cos A \\ \sin \alpha \cos C &= \cos \gamma \sin \beta - \sin \gamma \cos \beta \cos A \end{aligned} \qquad (3)$$

leicht das System

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} &= \sin (\beta + \gamma) \sin^2 \frac{A}{2} \\ \sin \alpha \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2} &= \sin (\beta - \gamma) \cos^2 \frac{A}{2}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Die Division der 1. Gleichung (2) durch die 1. Gleichung (4) und der 2. Gleichung (2) durch die 1. Gleichung (4) ergiebt nachstehende *Nepersche Analogieen* für 2 Seiten und einen Zwischenwinkel als den gegebenen Stücken:

$$\left.\begin{aligned} \tan \frac{B+C}{2} &= \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}} \cot \frac{A}{2} \\ \tan \frac{B-C}{2} &= \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}} \cot \frac{A}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Vertauscht man ferner in den Formeln (1) und (3) α mit $180^0 - A$, β mit B und γ mit C und umgekehrt, so ergeben sich wieder richtige Formeln. Die gleiche Vertauschung in (5) führt zu den *Neperschen Analogieen* für 2 Winkel und 1 Zwischenseite als gegebenen Stücken:

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{\beta+\gamma}{2} &= \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\beta-\gamma}{2} &= \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\tan\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Bedient man sich dieser Formeln zur Auflösung der Aufgabe des § 6, so bleibt wie dort eine Unbestimmtheit, und man erhält zwei Auflösungen, die jedoch zu derselben gegenseitigen Lage der 3 gröfsten Kreise führen.

Setzen wir nun weiter für den Augenblick zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{A}{2} &= l, & \sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} &= l' \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{A}{2} &= m, & \cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} &= m' \\ \sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{A}{2} &= n, & \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} &= n' \\ \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{A}{2} &= r, & \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} &= r', \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

so geben die (2) und (4) die Relationen:

$$\begin{aligned} m'n' &= mn, & m'r' &= nr \\ l'r' &= lr, & l'n' &= lm. \end{aligned} \quad (8)$$

Obgleich dies 4 Gleichungen sind, kann man mittelst derselben doch nur 3 Gröfsen aus den 5 andern bestimmen, da sich jede der Gleichungen aus den 3 andern ableiten läfst. Eine neue Relation giebt aber die oben für Ableitung von (6) aus (5) benutzte Vertauschung. Sie führt über: l in l', m in m', n in n', r in r' und umgekehrt.

Zu den vorigen Relationen gesellen sich damit 2 neue, deren eine in denselben noch nicht enthalten ist:

$$mr = n'r', \quad ln = l'm'. \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt $m'n' \cdot n'r' = mn \cdot mr$ und da $m'r' = nr$ ist, wird

$$n'^2 = m^2; \quad n' = \pm m.$$

Hieraus folgt mittelst der Relationen (8) und (9) weiter:

für $n' = + m$ ist $m' = n$, $r' = r$, $l' = l$,

„ $n' = - m$ „ $m' = - n$, $r' = - r$, $l' = - l$.

Substituiert man endlich rückwärts die Werte der Symbole $lmnr$ u. s. f. nach (7), so ergeben sich die *Gaufsischen Gleichungen*:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{A}{2}\\
\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{A}{2}\\
\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{A}{2}\\
\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{A}{2},
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

worin die oberen und unteren Zeichen zusammengehören. Die doppelten Zeichen entsprechen dem Umstand, dafs in den bisherigen Formeln (vergl. § 6 S. 76) einerseits gewisse Vertauschungen zulässig waren, von denen die eine, nämlich die von A, β, γ mit bezw. $360^0 - A$, $\pi + \beta$, $\pi + \gamma$ in (10) zu einem Zeichenwechsel führt; dafs andererseits aber auch jede einzelne Seite um Vielfache von $\pm 2\pi$ und jeder einzelne Winkel um Vielfache von $\pm 360^0$ verändert werden, also namentlich die *Winkel negativ* gezählt werden durften, wodurch ebenfalls in den (10) eine Unbestimmtheit der Zeichen entstehen mufs. Trotz der Unbestimmtheit der Zeichen erhält man doch durch die Auflösung der (10) bei gegebenen 3 Stücken nur 2 Lösungen, die derselben Lage der 3 gröfsten Kreise angehören.

Beschränkt man sich aber auf Dreiecke, in denen alle Seiten und Winkel positiv genommen und wenigstens 2 Seiten $< \pi$ sind, während die 3. Seite bis 2π gehen kann, so gelten nur die *oberen* Zeichen:

Denn zunächst für 3 positive Seiten $< \pi$ und 3 positive Winkel $< 180^0$ zeigt die 2. der (10) unmittelbar die Unzulässigkeit des unteren Zeichens. Ist ferner jeder der drei Winkel $> 180^0$ und $< 360^0$, so ändert sich nichts, da es zulässig ist, in den mit positiven Zeichen angesetzten (10) die Winkel mit ihren Supplementen zu 360^0 zu vertauschen. Vertauschen wir endlich auch α mit $2\pi - \alpha$ und gleichzeitig B und C mit bezw. $180^0 + B$ und $180^0 + C$; oder vertauschen wir β mit $2\pi - \beta$ und gleichzeitig A und C mit bezw. $180^0 + A$ und $180^0 + C$, so bleiben die mit positiven Zeichen angesetzten (10) auch bestehen. Diese letztern Vertauschungen entsprechen aber nach leicht anzustellender geometrischer Betrachtung dem Übergang von einem Dreieck mit 3 Seiten $< \pi$ zu einem solchen mit nur 2 Seiten $< \pi$.

§ 8. **Gegeben 2 Seiten und 1 Gegenwinkel oder 2 Winkel und 1 Gegenseite.** Hier führt der Sinussatz entweder zu gar keinem oder zu 2 Werten des andern Gegenstückes, welche sich zu 180° bezw. π ergänzen und die *Neper*schen Analogieen geben zu jedem dieser Werte einen Wert des 5. und 6. Stückes. Man erhält also, falls die Stücke ein Dreieck bestimmen (wofür die Bedingungen aufzustellen für uns kein Interesse hat) im allgemeinen 2 Auflösungen, welche aber nicht wie bisher zu derselben gegenseitigen Lage der drei gröfsten Kreise, sondern zu 2 verschiedenen Stellungen derselben gehören. Dies zeigt am klarsten die Konstruktion der Dreiecke mittelst geometrischer Orte, welche wir indessen ebenso übergehen dürfen als den Nachweis der Bemerkung, dafs für Dreiecke mit Stücken $< 180^0$ bezw. π nur *eine* Lösung zur in Rede stehenden Aufgabe gehört, falls das gegebene Gegenstück dem gröfsern der beiden andern gegebenen Stücke gegenüberliegt.

§ 9. **Gegeben 3 Seiten oder 3 Winkel.** Sind α, β und γ bekannt, so giebt der auf α angewandte Cosinussatz, wenn man auf $\cos A$ reduziert:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}. \tag{1}$$

Diese Formel ist weder logarithmisch bequem, noch in allen Fällen zur scharfen numerischen Auswertung geeignet. Man bildet daher

$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{-\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Vereinigt man die Cosinus in den Zählern rechter Hand zu Produkten, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin s\sin(s-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}\\
\sin^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}\\
\tan^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}} = \frac{\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}{\sin s\sin(s-\alpha)}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei $s = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ zur Abkürzung gesetzt ist. Die Multiplikation von $\cos^2\frac{A}{2}$ und $\sin^2\frac{A}{2}$ giebt aufserdem

$$\sin^2 A = \frac{4 \sin s \sin (s-\alpha) \sin (s-\beta) \sin (s-\gamma)}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}. \tag{3}$$

In ganz gleicher Weise ergeben sich die Formeln bei 3 bekannten Winkeln A, B und C. Man hat

$$\cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C} \\
\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C} \\
\tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{4 \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin^2 B \sin^2 C}, \tag{6}$$

wobei $\varepsilon = A + B + C - 180^0$ den *sphärischen Excefs* des Dreiecks bedeutet.

Vorstehende Formeln hat man sich aufser auf A bezw. α auch auf B und C, bezw. β und γ angewandt zu denken. Für jedes unbekannte Stück ergeben sich nun, falls überhaupt die 3 Stücke einem Dreieck angehören, (wofür wir indes die Bedingungen nicht aufstellen werden) zwei sich zu 360^0 bezw. 2π ergänzende Werte, welche nach Mafsgabe des Sinussatzes

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

sich zu 2 Auflösungen der ganzen Aufgabe gruppieren, wie § 6.

Führt man in vorstehende Proportion für die Verhältnisse $\sin A : \sin \alpha$, u. s. f. die Werte

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{A}{2}}{\tan \frac{A}{2} \sin \alpha} = \frac{2 \sin (s-\alpha) \sin (s-\beta) \sin (s-\gamma)}{\tan \frac{A}{2} \sin (s-\alpha) \,.\, \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

u. s. f.

ein, welche mit Benutzung der zweiten Gleichung (2) erhalten werden, so resultiert der Satz:

$$\tan \frac{A}{2} : \tan \frac{B}{2} : \tan \frac{C}{2} = \csc (s-\alpha) : \csc (s-\beta) : \csc (s-\gamma), \tag{7}$$

welcher (nach *Puissant*) von *Mollweide* angegeben worden ist. Die Benutzung der zweiten Gleichung (5) führt zu dem analogen Satze:

$$\tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\beta}{2} : \tan\frac{\gamma}{2} = \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) : \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) : \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (8)$$

§ 10. **Inhalt und sphärischer Excefs.** Von einem Dreiecksinhalt kann man im gewöhnlichen Sinne der Inhaltsbestimmung nur sprechen, wenn von den Dreiecksseiten höchstens eine Seite $> \pi$ ist (S. 71). Auf diesen für die Geodäsie allein wichtigen Fall beschränken wir uns und zwar bezeichnen wir als *Inhalt* denjenigen der beiden Teile der Kugeloberfläche, welcher von den Seiten bei Beschreibung der Dreieckswinkel überstrichen wird.

Zur bildlichen Darstellung kann nunmehr Fig. 5 dienen, nicht nur falls alle 3 Seiten $< \pi$ und alle 3 Winkel $< 180^0$, sondern auch falls nur 2 Seiten $< \pi$ sind und für beliebige Winkel.

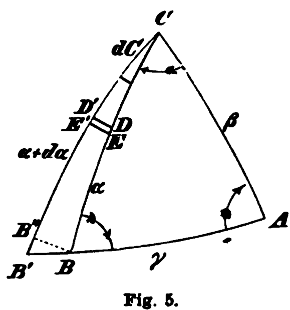


Fig. 5.

Dreht sich nun Seite α um die Ecke C um dC, so wächst die Dreiecksfläche um dF d. i. in Fig. 5 Dreieck CBB', welches von CBB'', wobei $CB = CB''$ genommen ist, nur unendlich wenig abweicht. Betrachtet man auf CB einen Bogen $CD = \alpha_1$ kleiner als α und dreht ihn ebenfalls um dC, so ist, wenn der Kugelradius als Einheit der Längen dient, der von D beschriebene unendlich kleine Weg DD' gleich $\sin\alpha_1 dC$. Zwei benachbarte Punkte D und E für α_1 und $\alpha_1 + d\alpha_1$ schliefsen mit ihren Wegen ein kleines Viereck $DD'EE'$ ein, dessen Inhalt gleich $\sin\alpha_1 dC . d\alpha_1$ nach Gröfse und Vorzeichen gesetzt werden kann; also ist

$$dF = dC\int_0^{\alpha}\sin\alpha_1 d\alpha_1 = dC(1 - \cos\alpha). \quad (1)$$

Denselben Ausdruck erhält man für die Zunahme des Excesses. Es ist nämlich zunächst

$$d\varepsilon = dC + dB. \quad (2)$$

Nun hat man im Dreieck $BB'C$

$$\sin(\alpha + d\alpha)\sin(B + dB) = \sin\alpha\sin B,$$

da Winkel B' mit $(B + dB)$ zu bezeichnen ist. Hieraus folgt aber mittelst der Entwicklungen

$$\sin(\alpha + d\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha d\alpha$$

und

$$\sin(B + dB) = \sin B + \cos B dB$$

und unter Vernachlässigung des mit $d\alpha dB$ multiplizierten Gliedes:

$$dB = -\cot\alpha \tan B\, d\alpha.$$

Nach Fig. 5 ist $d\alpha$, d. h. $B'B'' = \sin\alpha\, dC \,.\, \cot B$; daher hat man

$$dB = -\cos\alpha\, dC,$$

und es wird schliefslich, wie oben behauptet worden ist, durch Substitution dieses Wertes in die Formel (2) und mit Beachtung von (1):

$$d\varepsilon = dC(1 - \cos\alpha) = dF. \tag{3}$$

Die Integration giebt $\varepsilon = F +$ Konst. Die Konstante ist aber null, da ε und F gleichzeitig verschwinden. Berücksichtigt man dies und setzt endlich den Kugelradius anstatt gleich 1 gleich ϱ, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} F &= \varepsilon\varrho^2 \\ \text{oder} \qquad \varepsilon &= \frac{F}{\varrho^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hierbei ist ε als Arcus zu verstehen. Die häufigere Anwendung hat die Formel in der zweiten Gestalt, welche gestattet den Excefs aus dem Inhalt zu finden.

Die direkte Entnahme des Excesses aus der Winkelsumme ist dagegen in der Geodäsie vielfach nicht möglich, auch wenn diese Summe bekannt ist. Hat man es nämlich mit beobachteten Winkeln zu thun, so haften an diesen Beobachtungsfehler; um deren Einflufs auf $A + B + C$ zu erkennen, mufs man den Excefs mindestens bis auf Gröfsen von der Ordnung des Quadrats der Beobachtungsfehler genau ermitteln. Hierzu gelangt man durch Berechnungen mit Benutzung wenigstens *einer* Seite des Dreiecks.

Wir geben dem entsprechend zunächst im Folgenden einige bemerkenswerte strenge Formeln für ε, wobei wenigstens 1 Seite als bekannt vorausgesetzt wird.

§ 11. **Strenge Formeln für den sphärischen Excefs.** Sind α, B und C, d. h. eine Seite und die anliegenden Winkel, bekannt, so erhält man eine bequeme Formel zur Berechnung von ε für kleine Dreiecke aus der 2. Formel (5) S. 81. Setzt man darin

$$A = 180^0 + \varepsilon - B - C,$$

so folgt:
$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin B \sin C}{\sin\left(B + C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}. \tag{1}$$

Im allgemeinen hat diese Gleichung 2 Wurzeln

$$\varepsilon_1 \text{ und } \varepsilon_2 = 2(B + C) - \varepsilon_1$$

entsprechend der Unbestimmtheit der Aufgabe, ein Dreieck aus α, B und C zu ermitteln. Sind aber alle 3 Seiten klein, so gilt nur die Lösung, welche ε nahezu null oder (bei Winkeln $> 180^0$) nahezu 720^0 giebt.

Für letztern Fall ist es bequemer, insofern ε etwas kleiner als 720^0 ist, die 720^0 abzuziehen und es negativ zu nehmen. Unter dieser Voraussetzung hat nun jedenfalls ε einen kleinen positiven oder negativen Wert, der aus (1) durch successive Annäherung erhalten werden kann, wobei rechter Hand zuerst $\varepsilon =$ null zu setzen ist.

Sind 2 Winkel A und B und 1 Gegenseite α gegeben, so entsteht im allgemeinen die schon § 8 angegebene Zweideutigkeit, welche aber immer dann ohne Bedeutung bleibt, wenn das Dreieck als ein kleines bekannt ist, weil für diesen Fall die 2. Lösung einem Dreieck mit einer nahezu π betragenden Seite und mit grofsem Excefs angehört, auf welchen die wie oben einzuleitende Näherungsrechnung nicht hinführt. Die Formel ist:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin B \sin(A + B - \varepsilon)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}. \tag{2}$$

Um für 2 Seiten α und β und den Zwischenwinkel C eine direkte Formel zur Berechnung des Excesses zu haben, verbinden wir die 3. Formel (5) S. 81:

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

mit der folgenden Formel (8) von S. 82:

$$\frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

durch Multiplikation über einander stehender Seiten. Es wird hiermit

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\varepsilon}{2} &= \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \tan\frac{\varepsilon}{2} &= \frac{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\sin C}{1 + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\cos C} = \frac{\tan C}{1 + \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\sec C}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die zweite dieser Formeln folgt aus der ersten durch Auflösung des Sinus rechter Hand, Division mit $\cos\frac{\varepsilon}{2}$ und Reduktion auf $\tan\frac{\varepsilon}{2}$. Man erhält durch die Auflösung 2 Werte von ε, die sich um 360° unterscheiden und die den beiden zu α, β und C gehörigen Dreiecken entsprechen. Für kleine Dreiecke ist eine auf die 1. Formel (3) gestützte Annäherungsrechnung am bequemsten.

Handelt es sich darum, aus 2 gegebenen Seiten und einem Gegenwinkel ε zu ermitteln, so dürfte die Berechnung des andern Gegenwinkels nach dem Sinussatz mit nachfolgender Anwendung von Formel (2) bei kleinen Dreiecken der passendste Vorgang sein.

§ 12. **Fortsetzung: Gegeben 3 Seiten.** Bildet man nach S. 81 (5) die Formeln

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C},$$

$$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin C},$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A\sin B},$$

und hieraus

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \pm\frac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin C}, \tag{1}$$

und benutzt nun diese Formel (1), um aus der 1. Formel (3) des vorigen Paragraphen $\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ zu eliminieren, so folgt:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \pm\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\sin C. \tag{2}$$

Substituiert man hierin die auf C angewandte Formel (3) S. 81, so folgt weiter

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \pm\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}. \tag{3}$$

Eliminiert man ferner aus der 2. Formel (3) des vorigen Paragraphen $\cos C$ mittelst der Relation

$$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

so ergiebt sich unter Einführung der Funktionen halber Winkel:

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin C}{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right)}. \tag{4}$$

Dies in Verbindung mit obiger Formel (2) führt endlich noch zu der Formel:

$$\cos\frac{\varepsilon}{2} = \pm\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - 1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}. \tag{5}$$

Die Unbestimmtheit der Vorzeichen in den Ausdrücken rechter Hand in den Formeln (1), (2) und (5) verschwindet, wenn man voraussetzt, dafs wenigstens 2 Seiten $< \pi$ sind, denn dann gilt nur das *obere* Zeichen.

Nehmen wir nämlich zunächst an, dafs alle 3 Seiten $< \pi$ sind und bringen die Gleichung (2) in die Form

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\frac{\sin C}{\sin\gamma},$$

wo nun rechter Hand $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ jedenfalls positiv ist, so gilt sicher nur das obere Zeichen, da C und $\frac{\varepsilon}{2}$ gleichzeitig $\lesseqgtr 180^0$ sind. Vertauschen wir nun γ mit $2\pi - \gamma$, so wechselt die rechte Seite das Zeichen; dies geschieht jedoch auch linker Hand, indem jener Vertauschung eine Vertauschung von ε mit $360^0 + \varepsilon$ entspricht, wie geometrisch leicht zu ersehen ist. Mithin gilt in der That in (2) nur das obere Zeichen.

Die Entwicklung zeigt nun, dafs die obern und untern Zeichen in (1), (2) und (5) einander entsprechen, also gilt das *obere* Zeichen von (1), (2) und (5) allein, falls wenigstens 2 Seiten $< \pi$ sind.

Für Formel (3) mufs man aber *beide* Zeichen konservieren.

Formel (5) ergiebt jetzt weiter, indem wir voraussetzen, dafs wenigstens 2 Seiten $< \pi$ sind:

$$1 - \cos\frac{\varepsilon}{2} = 2\sin^2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{2\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-\alpha}{2}\sin\frac{s-\beta}{2}\sin\frac{s-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}, \tag{6}$$

wie man leicht mit Beachtung der nachfolgenden beiden Identitäten findet:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-\gamma}{2} &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ \sin\frac{s-\alpha}{2}\sin\frac{s-\beta}{2} &= \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Aus (6) und (3) erhält man nun nachstehende zur Berechnung von ε sehr geeignete Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\varepsilon}{4} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-\alpha}{2}\sin\frac{s-\beta}{2}\sin\frac{s-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}}\\ \cos\frac{\varepsilon}{4} &= \pm\sqrt{\frac{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-\alpha}{2}\cos\frac{s-\beta}{2}\cos\frac{s-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}}\\ \tan\frac{\varepsilon}{4} &= \pm\sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-\alpha}{2}\tan\frac{s-\beta}{2}\tan\frac{s-\gamma}{2}}.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Die positiven Wurzelzeichen der beiden letzten Formeln gelten, wenn alle Winkel $< 180^0$ sind, die negativen, wenn sie $> 180^0$ sind; u. s. w.

Ist der Excefs bekannt, so kann man bei 3 gegebenen Seiten einen Winkel bestimmen, z. B. C nach einer der beiden Formeln:

$$\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\sin\frac{\varepsilon}{2}\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}$$

$$\tan\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\cot\frac{\varepsilon}{4}\tan\frac{s-\alpha}{2}\tan\frac{s-\beta}{2}.$$

Die erste derselben ist nichts anderes als die 1. Formel (3) des vorigen Paragraphen; sie gilt für beliebige Dreiecke. Die 2. Formel gilt nur für Dreiecke mit wenigstens 2 Seiten $< \pi$.

Die Ableitung dieser letzteren Formel kann wie folgt geschehen. Man bestimmt zunächst $\cos\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, am bequemsten mittelst der Identität

$$\cos\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B-C}{2}\right),$$

indem man diese rechts zerlegt und $\sin\frac{B-C}{2}$ und $\cos\frac{B-C}{2}$ unter Benutzung der *Gaufs*ischen Gleichungen eliminiert. Es wird, wenn man an jener Beschränkung festhält:

$$\cos\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\frac{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Man bildet weiter:

$$1 - \cos\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{2\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-\gamma}{2}\sin\frac{s-\alpha}{2}\sin\frac{s-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

wobei nächst der zweiten der Identitäten (7) die Identität

$$\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

zu beachten ist. Nun ist mithin $\sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ bekannt; dies giebt mit $\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ sofort $\cos\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ und hieraus folgt endlich leicht die für $\tan\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ angegebene Formel, wobei über das Vorzeichen kein Zweifel ist, weil sie mit der darüberstehenden für $\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, sobald wenigstens 2 Dreiecksseiten $< \pi$ angenommen werden, Glied für Glied gleiche Vorzeichen hat.

Eine sehr elegante Entwicklung der Formeln mit $\frac{\varepsilon}{4}$ gab *Werner* in dem *Journ. für Mathem. und Phys.* von *Schlömilch* 1861, S. 146. Im allgemeinen vergl. man *Baltzers* und *Schlömilchs* Lehrbücher, das des erstgenannten namentlich auch für historische Angaben.

§ 13. Theorem von Legendre. Die Anwendung der Formeln der sphärischen Trigonometrie erfordert die Verwandlung der Seitenlängen in Gradmafs und umgekehrt. Liegt hierin schon eine Unbequemlichkeit, weil der Geodät meist der wirklichen Längen der Seiten bedarf, so zeigt sich bei der Rechnung die weitere, dafs die Logarithmen der meisten trigonometrischen Funktionen der kleinen den Seiten entsprechenden Winkelwerte α, β und γ nicht bequem aus den Tafeln zu entnehmen sind. Die Anwendung der Hilfslogarithmen S und T (S. 33) beseitigt diesen Übelstand nur teilweise. Das Theorem von Legendre lehrt nun:

Ein kleines sphärisches Dreieck läfst sich berechnen als ein ebenes mit denselben Seiten, nachdem die Winkel je um ein Dritteil des Excesses vermindert worden sind.

Die Seiten des ebenen Hilfsdreiecks nennen wir a, b und c; die Winkel sind $A - \frac{\varepsilon}{3}$, $B - \frac{\varepsilon}{3}$, $C - \frac{\varepsilon}{3}$, und es ist ferner zu setzen für ε:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{F}{\varrho^2}; \\ \varepsilon_{\text{in Sek.}} &= \varrho'' \frac{F}{\varrho^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

F kann hierbei hinreichend genau nach den Formeln der ebenen Trigonometrie berechnet werden. ϱ bezeichnet den Kugelradius.

Behufs Ableitung des Satzes geht man von der Formel

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A, \tag{2}$$

worin α, β, γ die Quotienten $a:\varrho$, $b:\varrho$, $c:\varrho$ bedeuten, aus. Da diese klein sind, genügt es für ihre Cosinus und Sinus die ersten Glieder der Reihenentwicklungen (1) S. 28 zu substituieren.

Es findet sich dann, wenn α, β, γ als Glieder 1. Ordnung bezeichnet werden:

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} = \left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^4}{24}\right)$$
$$+ \beta\gamma\left(1 - \frac{\beta^2}{6}\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{6}\right)\cos A + Gl_6 .$$

Multipliziert man aus, sodann beiderseits mit $\left(1 + \frac{\beta^2+\gamma^2}{6}\right)$ und reduziert auf $\cos A$, dabei immer die Glieder der 6. Ordnung vernachlässigend, sowird nach und nach erhalten:

$$\beta\gamma\left(1 - \frac{\beta^2+\gamma^2}{6}\right)\cos A = \frac{-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2} + \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2}{24} + Gl_6,$$

$$\cos A = \frac{-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\beta\gamma} - \frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{24\beta\gamma} + Gl_4 .$$

Werden nun die Winkel des ebenen Hilfsdreiecks mit A^*, B^* und C^*, der Inhalt mit F^* bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$\cos A^* = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\beta\gamma}, \tag{3}$$

und zwar für jede Zählungsweise der Winkel, da man A^* mit $360 - A^*$ in (3) vertauschen darf. Ferner ist

$$F^{*2} = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

oder

$$F^{*2} = \frac{1}{16}\varrho^4\{2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4\}. \tag{4}$$

Führt man $\cos A^*$ und F^* im oben erhaltnen Ausdrucke für $\cos A$ ein und beachtet, dafs auch $F^* = \frac{1}{2}bc\sin A^*$ gesetzt werden kann, so ergiebt sich:

$$\cos A = \cos A^* - \frac{2}{3}\frac{F^{*2}}{bc\varrho^2} + Gl_4$$

oder

$$\cos A = \cos A^* - \frac{1}{3}\frac{F^*}{\varrho^2}\sin A^* + Gl_4 . \tag{5}$$

Nach S. 31 (5) und (6) findet sich hieraus und mit Beachtung von (4) S. 83:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \varrho'' \left\{ \frac{1}{3} \frac{F^*}{\varrho^2} + Gl_4 \right\} = \frac{1}{3}\varepsilon + \cdots. \tag{6}$$

Hierbei ist F für F^* gesetzt, was mit grofser Annäherung richtig ist, wenn die Dreieckswinkel $< 180^0$ sind.

Im allgemeinen ist F^* in (6) entsprechend dem Ausdruck $\frac{1}{2}\, bc \sin A^*$, d. h. für Dreieckswinkel $> 180^0$ negativ, einzuführen. Demgemäfs bedeutet ε im letztern Fall den Excefs mit Vernachlässigung von 720^0, weil alsdann streng genommen F nicht gleich F^*, sondern gleich $4\pi\varrho^2 + F^*$ zu setzen ist. ε wird damit negativ.

Zur genauern Ermittlung des Fehlers von (6) entwickeln wir im Folgenden die höhern Glieder bis zur 8. Ordnung.

§ 14. **Höhere Glieder zu Legendres Theorem.** Zu gröfserer Bequemlichkeit der Reihenentwicklung bringen wir die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen in die Form:

$$\cos A = \frac{2\cos\alpha - \cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)}{\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)} \tag{1}$$

und kombinieren dies mit der Formel (3) für $\cos A^*$ im vorigen Paragraphen. Es findet sich:

$$\cos A - \cos A^* = \frac{(s^2-d^2)\cos\alpha + (\alpha^2-s^2)\cos(\beta-\gamma) - (\alpha^2-d^2)\cos(\beta+\gamma)}{2\beta\gamma\left(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\right)}, \tag{2}$$

$$(\beta+\gamma)^2 = s^2 \quad \text{und} \quad (\beta-\gamma)^2 = d^2 \tag{3}$$

vorübergehend zur Abkürzung gesetzt. Den Zähler von (2) schreibt man besser

$$(\alpha^2 - s^2)\left(\cos(\beta-\gamma) - \cos\alpha\right) - (\alpha^2 - d^2)\left(\cos(\beta+\gamma) - \cos\alpha\right)$$

und nun giebt die bekannte Reihenentwicklung der Cosinus sofort:

$$\cos A - \cos A^* =$$

$$\left\{\begin{aligned} &(\alpha^2-s^2)\left(\frac{\alpha^2-d^2}{2} - \frac{\alpha^4-d^4}{24} + \frac{\alpha^6-d^6}{720} - \frac{\alpha^8-d^8}{40320}\right) \\ -&(\alpha^2-d^2)\left(\frac{\alpha^2-s^2}{2} - \frac{\alpha^4-s^4}{24} + \frac{\alpha^6-s^6}{720} - \frac{\alpha^8-s^8}{40320}\right) + Gl_{12} \end{aligned}\right\} : 2\beta\gamma \left\{\begin{aligned} &\frac{s^2-d^2}{2} - \frac{s^4-d^4}{24} \\ &+\frac{s^6-d^6}{720} + Gl_8 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Hebt man im Zähler von (4) den Faktor $(\alpha^2 - s^2)(\alpha^2 - d^2)$ aus und beachtet, dafs mit Rücksicht auf den Ausdruck (4) für F^* im vorigen Paragraphen

$$16 F^{*2} = -(\alpha^2 - s^2)(\alpha^2 - d^2)\varrho^4 \tag{5}$$

ist, so läſst eine einfache Reduktion erkennen, daſs der Zähler auch den Faktor $(s^2 - d^2)$ hat; durch Division mit diesem Faktor im Zähler und Nenner von (4) ergiebt sich dann

$$\cos A^* - \cos A = \tag{6}$$

$$\frac{2F^{*2}\left(1 - \frac{\alpha^2 + s^2 + d^2}{30} + \frac{\alpha^4 + \alpha^2(s^2 + d^2) + (s^4 + s^2 d^2 + d^4)}{1680} - Gl_6\right)}{3\varrho^4\beta\gamma\left(1 - \frac{s^2 + d^2}{12} + \frac{s^4 + s^2 d^2 + d^4}{360} - Gl_6\right)}.$$

Für die Parenthese im Nenner (6) setzen wir jetzt im Zähler den Faktor

$$\left(1 + \frac{s^2 + d^2}{12} + \frac{3s^4 + 8s^2d^2 + 3d^4}{720} + Gl_6\right)$$

und erhalten damit endlich nach einiger Reduktion:

$$\cos A^* - \cos A = \frac{2}{3}\frac{F^{*2}}{\varrho^4\beta\gamma}\left\{1 + \frac{-2\alpha^2 + 3s^2 + 3d^2}{60}\right. \tag{7}$$

$$\left. + \frac{3\alpha^4 - 11\alpha^2(s^2 + d^2) + 10s^4 + 31s^2d^2 + 10d^4}{5040} + Gl_6\right\}.$$

Behufs weiterer Entwicklung ist wieder S. 31 (5) und (6) anzuwenden. Darin ist A^* für A' und die negativ angenommene rechte Seite von (7) für h zu setzen.

Man hat bei der Substitution des Wertes von h ferner die Relationen

$$\left.\begin{aligned} F^{*2} &= \frac{1}{4}\varrho^4\beta^2\gamma^2\sin^2 A^*, \\ 4\beta\gamma &= s^2 - d^2, \\ \cos A^* &= \frac{-2\alpha^2 + s^2 + d^2}{4\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

zu beachten und erhält dann nach und nach ohne Schwierigkeit:

$$A - A^* = -\frac{h}{\sin A^*}\left(1 + \frac{2\alpha^2 - s^2 - d^2}{48}\right.$$

$$\left. + \frac{16\alpha^4 + 8\alpha^2(s^2 + d^2) - 3(s^4 + d^4) - 26s^2d^2}{1440\,.\,12} + Gl_6\right)$$

und

$$A - A^* = \frac{1}{3}\frac{F^*}{\varrho^2}\left(1 + \frac{2\alpha^2 + 7(s^2 + d^2)}{240}\right. \tag{9}$$

$$\left. + \frac{16\alpha^4 + 128\alpha^2(s^2 + d^2) + 93(s^4 + d^4) + 310s^2d^2}{120960} + Gl_6\right).$$

Hierin ist das Vorzeichen von F^* zu nehmen, wie es die Berechnung aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel giebt.

In Bezug auf die Gültigkeit vorstehender Entwicklung ist Folgendes zu bemerken. Um den Ausdruck (7) für $\cos A^* - \cos A$ zu erhalten, konnten wir auch in der wie folgt modificierten Form von (1)

$$\cos A = \cos \alpha \csc \beta \csc \gamma - \cot \beta \cos \gamma$$

die Reihen für Cosinus, Cosecante und Cotangente anwenden. Die ersteren gelten aber allgemein, letztere nur für Werte $< \pi$. Die Entwicklung (7) gilt daher, so lange β und $\gamma < \pi$ sind. Die entsprechenden Entwicklungen für B und C fordern auch noch $\alpha < \pi$.

Selbstverständlich genügen die in (7) angesetzten Glieder nur für kleine Werte von α, β, γ zur Erreichung einer Genauigkeit auf Bruchteile Sekunden. Insbesondere mufs die 8. Potenz von α, β, γ zu vernachlässigen sein (vergl. S. 28 Schlufs von § 6).

Für solche Werte gilt dann auch sicher die Entwicklung (9) für $A - A^*$ aus (7), für welche nach S. 31 erforderlich ist, dafs $(h : \sin^2 A^*)^4$, d. h. näherungsweise $(\frac{1}{4}\,\beta\gamma)^4$, vernachlässigt werden kann.

§ 15. **Fortsetzung: Excefsanteile aus den 3 Seiten.** Setzt man in der für $(A - A^*)$ im vorigen Paragraphen erhaltenen Formel

$$\alpha^2 = \frac{a^2}{\varrho^2}, \qquad s^2 + d^2 = 2\,\frac{b^2 + c^2}{\varrho^2}, \qquad s^2 d^2 = \frac{(b^2 - c^2)^2}{\varrho^4},$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 3m^2 \\ a^4 + b^4 + c^4 &= 3n^4 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

sowie

$$s^4 + d^4 = \frac{-12n^4 + 10a^4 + 54m^4 - 36m^2a^2}{\varrho^4},$$

$$s^2 d^2 = \frac{6n^4 - 3a^4 - 9m^4 + 6m^2a^2}{\varrho^4},$$

so gelangt man nach einiger Reduktion zu dem Resultat:

$$A - A^* = \frac{F^*}{3\varrho^2}\left\{1 + \frac{7m^2 - 2a^2}{40\varrho^2} + \frac{31n^4 - 10a^4 + 93m^4 - 30m^2a^2}{5040\varrho^4} + Gl_6\right\}.$$

Durch cyklische Vertauschung von A, B, C und a, b, c folgt hieraus weiter:

$$B - B^* = \frac{F^*}{3\varrho^2}\left\{1 + \frac{7m^2 - 2b^2}{40\varrho^2} + \frac{31n^4 - 10b^4 + 93m^4 - 30m^2b^2}{5040\varrho^4} + Gl_6\right\},$$

$$C - C^* = \frac{F^*}{3\varrho^2}\left\{1 + \frac{7m^2 - 2c^2}{40\varrho^2} + \frac{31n^4 - 10c^4 + 93m^4 - 30m^2c^2}{5040\varrho^4} + Gl_6\right\}.$$

Die Addition dieser 3 Formeln giebt linker Hand ε falls die Winkel $< 180^0$ sind. Sind die Winkel $> 180^0$, so ist $A^* + B^* + C^* = 900^0$ und daher

$$(A + B + C) - (A^* + B^* + C^*) = \text{Excefs} - 720^0,$$

welchen negativen Wert wir aber wie früher mit ε bezeichnen. Man hat somit:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho'' \frac{F^*}{\varrho^2}\left(1 + \frac{m^2}{8\varrho^2} + \frac{n^4 + 3m^4}{240\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \log \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \log\left(\varrho'' \frac{F^*}{\varrho^2}\right) + M\left(\frac{m^2}{8\varrho^2} + \frac{8n^4 + 9m^4}{1920\varrho^4} + Gl_6\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nimmt man von ε ein Dritteil und subtrahiert es von $A - A^*$ u. s. f., so ergiebt sich weiter:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{3\varrho^2}\left(\frac{m^2 - a^2}{20\varrho^2} + \frac{(n^4 - a^4) + 3m^2(m^2 - a^2)}{504\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{B - B^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{3\varrho^2}\left(\frac{m^2 - b^2}{20\varrho^2} + \frac{(n^4 - b^4) + 3m^2(m^2 - b^2)}{504\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{C - C^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{3\varrho^2}\left(\frac{m^2 - c^2}{20\varrho^2} + \frac{(n^4 - c^4) + 3m^2(m^2 - c^2)}{504\varrho^4} + Gl_6\right). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

In den Formeln (2) und (3) ist das Vorzeichen von F^* der Berechnung aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel entsprechend zu nehmen. Benutzt man (2), um aus (3) überhaupt F^* zu eliminieren, dann erhält man:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - a^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\} \\ B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - b^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - b^4) - 3m^2(m^2 - b^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\} \\ C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - c^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - c^4) - 3m^2(m^2 - c^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die hierbei notwendigen Divisionen der 1. Parenthese von (2) in die Parenthesen von (3) sind jedenfalls zulässig wegen der zur Brauchbarkeit der vorstehenden Entwicklungen erforderlichen Beschränkung auf kleine Seitenlängen.

Legendre gab sein Theorem zuerst in den Memoiren der französischen Akademie fürs Jahr 1787; er reproduzierte es 12 Jahre später in dem Werk *Delambres: Méthodes analytiques* ..., und zwar ging er vom Sinussatz aus, indem er

$$\sin\alpha : \sin\beta = \sin A : \sin : B$$

durch

$$\alpha : \beta = \sin(A - u) : \sin(B - u)$$

ersetzte und die Unbekannte u danach bestimmte. Da $u = \frac{\varepsilon}{3}$ wird, so ergab sich die Möglichkeit, überhaupt das sphärische Dreieck auf ein ebenes zu reduzieren. Den Cosinussatz wandte (nach *Puissant*, *Traité de Géodésie*) *Lagrange* an in dem *Mémoire sur la Trigonometrie sphérique* (*Journal de l'École Polytechnique,* Nr. 6).

Wir benutzten zum Teil *Grunerts* Abhandlung im *Archiv für Math. und Physik* Bd. 9, S. 8 (1847), die es sich zur Aufgabe stellt, eine beliebig weit anwendbare Entwicklung zu geben. *Grunert* erwähnt auch ältere Darstellungen. Neuerdings ging *Nell* von der 3. Formel (2) S. 80 aus in der *Zeitschr. für Math. und Phys.* von *Schlömilch* Bd. 19, 1874, S. 324 bis 344.

In ganz anderer Weise ging *Andrae* vor (1. Bd. der *Dänischen Gradmessung,* 1867, S. 544), indem er zwei Ausdrücke für den Cosinus des zum sphärischen Winkel A gehörigen Sehnenwinkels $\mathfrak{A}$ einander gleich setzt: einen der Ausdrücke giebt die ebene Trigonometrie aus dem Sehnendreieck, den andern die sphärische Trigonometrie aus A und den Neigungswinkeln der Schenkel von $\mathfrak{A}$ gegen die Tangentialebene in A. Diese Methode, welche *Zachariae* in seinem Werke *Die geodätischen Hauptpunkte*... (deutsch von *Lamp,* 1878, S. 126—128) reproduziert, hat den Vorteil, unmittelbar auch bei kleinen Dreiecken auf dem Ellipsoid angewandt werden zu können.

Auch *Hansen* entwickelt das Theorem und giebt die Glieder 6. Ordnung in ε und $A - A^*$, u. s. f. S. 219—221 der *Geodätischen Untersuchungen* (1865) an.

Neuerdings hat *Meissel* in den Astronom. Nachr. Bd. 95 (1879) S. 70, Nr. 2261 mittelst der elliptischen Funktionen Formeln abgeleitet, die die Auflösung eines beliebig grofsen sphärischen Dreiecks auf die eines *ebenen* zurückführen. Diese Formeln sind aber für Dreiecke mit *kurzen* Seiten, wie man leicht findet, viel weniger einfach als *Legendres* Satz, namentlich auch im Hinblick auf spitze Dreiecke. *Meissels* eigne Formelangaben für diesen Fall sind zu sehr abgekürzt.

§ 16. **Numerischer Betrag der höhern Glieder.** Ein gleichseitiges Dreieck mit $0{,}1\,\varrho$ als Wert der Seiten a, b, c giebt, weil $m = n = 0{,}1\varrho$ wird:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = 2062{,}65 \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{0{,}01}{8} + \frac{0{,}0001}{60}\right)$$

oder

$$\varepsilon = 893{,}16'' + 1{,}12'' + 0{,}0015''. \tag{1}$$

Andere Dreiecke mit demselben Durchschnitt m^2 für die Quadrate der Seitenlängen haben kleinere Flächen F^*; führt man nämlich im Ausdruck (5) S. 91 für F^* die Gröfse m und die Hilfsgröfse

$$\vartheta^2 = b^2 - c^2$$

ein — wobei man sich immer $b > c$ denken kann —, so wird

$$F^{*2} = \frac{1}{16}(6a^2m^2 - 3a^4 - \vartheta^4), \tag{2}$$

und dies zeigt, dafs $\vartheta = 0$ und $a = m$, d. h. das gleichseitige Dreieck, die Fläche F^* zu einem Maximum machen.

Hiernach nehmen das 1. und 2. Glied von ε ab, sobald bei gleichem Werte von m das Dreieck sich von der gleichseitigen Form entfernt.

Was nun das 3. Glied anbetrifft, so ist zunächst mit Rücksicht auf die Bedeutung von n nach Formel (1) S. 92

$$n^4 = \frac{1}{6}(9m^4 - 6m^2a^2 + 3a^4 + \vartheta^4) \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{6}(9m^4 - 16F^{*2}). \quad (3)$$

Dies in das Produkt $F^*(n^4 + 3m^4)$, von welchem das 3. Glied wesentlich abhängt, eingeführt, findet sich leicht für dieses der Ausdruck

$$\varrho'' \frac{F^*(27m^4 - 16F^{*2})}{1440\varrho^6}, \quad (4)$$

dessen Differentialquotient nach F^* stets positiv ist, weil für das gleichseitige Dreieck (dessen F^* ein Maximum ist) F^{*2} nur $3m^4 : 16$ beträgt.

Sonach sind alle drei Glieder des Excesses für das gleichseitige Dreieck ein Maximum mit Bezug auf alle Dreiecke gleichen Durchschnittswertes der Quadrate der 3 *Seiten.**)

Man hat damit unter Zugrundelegung der Werte (1) folgendes Täfelchen der

Maximalwerte der Glieder in ε:

$m =$	$m =$	2. Glied	3. Glied
$0{,}2\varrho$	1274^{km}	18″	0,1″
0,1	637	1,12″	0,0015″
0,05	319	0,070	.
0,02	127	0,0018	.
0,01	64	0,0001	.
0,001	6,4	$\varepsilon = 0{,}09''$	

(5)

Um nunmehr den Einflufs derjenigen Glieder, um welche die

*) Für die Annahme eines konstanten Durchschnittswertes der 1. Potenzen der Seiten würde nichts wesentlich anderes resultieren; der Kalkül ist aber mit konstantem m^2 einfacher und aufserdem ist es praktisch ganz gleichgültig, was von beiden genommen wird. Dagegen würde ein Resultat in Bezug auf verschiedene Dreiecke konstanten Inhalts wenig Wert besitzen, weil die Geodäsie die Dreiecke in Ordnungen nach ihrer Seitenlänge und *nicht* nach dem Inhalt klassifiziert.

Reduktionen $A - A^*$, u. s. f. von $\frac{\varepsilon}{3}$ abweichen, zu untersuchen, betrachten wir zunächst das 2. Glied in $\left(A - A^* - \frac{\varepsilon}{3}\right)$ nach Formel (3) S. 93:

$$\frac{\varrho'' F^* (m^2 - a^2)}{60 \varrho^4}. \tag{6}$$

Die Einführung von (2) zeigt sofort, dafs zu einem Maximum des Gliedes jedenfalls $\vartheta = 0$ erforderlich ist. Weiter giebt die Differentiation nach a als Bedingung $a^2 = m^2 \left(1 \pm \sqrt{0{,}5}\right)$ an, mit

$$\mp \varrho'' \frac{\sqrt{3}}{480} \frac{m^4}{\varrho^4} \tag{7}$$

als Maximalwert von (6). Derselbe beträgt sonach:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{für } m \text{ gleich} & 0{,}2\varrho & 0{,}1\varrho & 0{,}05\varrho & 0{,}02\varrho \\ & \mp 1{,}2'' & \mp 0{,}074'' & \mp 0{,}005'' & \mp 0{,}0001''. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Er ist weit geringer als der Maximalwert des entsprechenden Gliedes in $\frac{\varepsilon}{3}$. Man kann daher sagen:

Eine gleichmäfsige Verteilung des Excesses auf die 3 Winkel reicht jedenfalls aus, sobald ε nach der einfachen Formel $\varrho'' F^* : \varrho^2$ berechnet werden darf.

Hierbei ist als selbstverständlich vorausgesetzt, dafs das 3. Glied in den Reduktionen $A - A^* - \frac{\varepsilon}{3}$ u. s. f. nach den Formeln (3) S. 93 und ebenso in denen nach den Formeln (4) S. 93 gegen das 2. Glied zurücktritt, weil es von höherer Ordnung ist. Man sieht aber auf einen Blick, dafs dies Glied notwendig kleiner ist, als das entsprechende in $\frac{\varepsilon}{3}$, Formel (2) S. 93, man darf es also mit diesem gleichzeitig vernachlässigen.

Anstatt die Glieder 4. und 6. Ordnung zu entwickeln, kann man auch zur Ermittlung der Genauigkeit des *Legendre*schen Theorems einen Grenzwert für die Summe aller höhern Glieder aufsuchen, welchen sie nicht überschreiten können. Vergl. hierzu *Mertens, Zeitschr. für Math. und Phys.* von *Schlömilch* 1875, S. 286.

Ein anderes Verfahren wandte *Gaufs* an, indem er für $(a \sin B^* : b \sin A^*)$ einen strengen Ausdruck aufstellte, der für sehr kleine Dreiecke augenscheinlich von der Einheit nur wenig abweicht. (*Crelles Journal* 1841, Bd. 22, S. 96 u. ff. oder *Bauernfeinds Vermessungskunde* Bd. 2, 6. Aufl., S. 259).

§ 17. Excefsanteile aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel.

Der Fall, dafs 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben

sind, ist ohne Zweifel häufiger als derjenige, dafs die 3 Seiten bekannt sind. Wir müssen ihn daher besonders betrachten, wobei wir zunächst die Formeln des § 15 zu einer indirekten Rechnung benutzen.

Sind gegeben b, c und A, so ist bei diesem Verfahren

$$\left.\begin{aligned} F^* &= \frac{1}{2}\, bc \sin A^* \\ \text{und} \qquad a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A^* \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

durch *successive Annäherung* aufzusuchen. In 1. Annäherung nimmt man $A^* = A$, berechnet mittelst Formel

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \frac{\varrho'' bc \sin A}{2\varrho^2} + Gl_4 \tag{2}$$

den Excefs, nimmt sodann in 2. Annäherung $A^* = A - \frac{\varepsilon}{3}$ und erhält nun aus den Formeln (1) die Gröfsen F^* und a^2 jedenfalls so genau, dafs man für die Formeln (2), (3) und (4) S. 93 die 2. und 3. Glieder bereits definitiv berechnen kann, während das Hauptglied in ε noch einen Fehler 6. Ordnung aufweist, der durch eine folgende Annäherung beseitigt wird.

Diese Annäherungsrechnung ist nicht unbequem. Will man aber *direkte Formeln*, so mufs man diese Rechnung einmal mit den allgemeinen Ausdrücken selbst durchführen.

Die Formeln (1) geben, darin $A^* = A - (A - A^*)$ gesetzt und $\sin(A - A^*)$, sowie $\cos(A - A^*)$ in Reihen verwandelt:

$$F^* = \frac{1}{2}\, bc \left\{ \sin A - (A - A^*) \cos A - \frac{(A - A^*)^2}{2\varrho^2} \sin A + Gl_6 \right\},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2bc \{ \sin A\, (A - A^*) + Gl_4 \}.$$

Nach S. 92 hat man aber in einer für den Zweck der Substitution in vorstehende Formeln passenden Gestalt:

$$A - A^* = \frac{F^*}{3\varrho^2} \left(1 + \frac{7m^2 - 2a^2}{40\varrho^2} + Gl_4 \right)$$

und diese Formel giebt mit jenen bei successiver gegenseitiger Substitution:

$$F^* = \frac{1}{2}\, bc \sin A \left(1 - \frac{bc \cos A}{6\varrho^2} + Gl_4 \right),$$

$$bc \cos A = \frac{3}{2}\, m^2 - a^2 + bc\, Gl_2,$$

$$A - A^* = \frac{1}{6}\, bc \sin A \left(1 + \frac{14a^2 - 9m^2}{120\varrho^2} + Gl_4\right),$$

$$bc \cos A = \frac{3}{2}\, m^2 - a^2 - \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{6\varrho^2} + bc\, Gl_4,$$

$$F^* = \frac{1}{2}\, bc \sin A \left(1 - \frac{3m^2 - 2a^2}{12\varrho^2} - \frac{(3m^2 - 2a^2)(14a^2 - 9m^2)}{1440\varrho^4} + \frac{b^2c^2\sin^2 A}{72\varrho^4} + Gl_6\right),$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho''\, \frac{bc \sin A}{2\varrho^2} \left(1 + \frac{4a^2 - 3m^2}{24\varrho^2} + \frac{14a^4 - 15a^2m^2 + 3n^4}{720\varrho^4} + \frac{b^2c^2\sin^2 A}{72\varrho^4} + Gl_6\right). \tag{3}$$

Bei diesen Entwicklungen ist nur das Eine fraglich, ob es nämlich zulässig ist, in F^* und damit in ε $\sin A$ als Faktor zu ziehen. Die Entscheidung behalten wir uns vor.

Mit Benutzung der bekannten Reihe $\log(1+u) = M\left(u - \frac{u^2}{2} + \cdots\right)$ stellen wir nun ε in logarithmischer Form dar und erhalten schliefslich mit Benutzung der (4) S. 93 nachstehendes Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a^2}{\varrho^2} &= \frac{b^2}{\varrho^2} + \frac{c^2}{\varrho^2} - \frac{2bc \cos A}{\varrho^2} - \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{3\varrho^4} + Gl_6 \\
\log \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \log \frac{\varrho'' bc \sin A}{2\varrho^2} + M\left\{\frac{4a^2 - 3m^2}{24\varrho^2} + \frac{32a^4 - 45m^4 + 24n^4}{5760\varrho^4} + \frac{b^2c^2\sin^2 A}{72\varrho^4}\right\} + Gl_6 \\
A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - a^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\} \\
B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - b^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - b^4) - 3m^2(m^2 - b^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\} \\
C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - c^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - c^4) - 3m^2(m^2 - c^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

In Bezug auf die Gültigkeit vorstehender Entwicklung bemerken wir, dafs man (3) auch als eine Umformung der 2. Formel (3) S. 84, welche in Anwendung auf β, γ und A

$$\varepsilon = 2 \operatorname{arctan} \frac{\tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2} \sin A}{1 + \tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2} \cos A}$$

ergiebt, auffassen darf. Da die Reihe für arctan u für val. abs. $u < 1$ gilt, so mufs man sich jedenfalls auf val. abs. $\varepsilon < 90^0$ beschränken. Die Auflösung des Nenners $1 + \tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2} \cos A$ in eine Reihe im Zähler und die weitere Verwandlung in eine Reihe nach Potenzen von β und γ fordern sodann noch β und $\gamma < \frac{\pi}{2}$,

und man bemerkt nun leicht die Zulässigkeit der Entwicklung (3) für kleine Werte von β und γ; aufserdem sieht man sogleich, dafs ε den Faktor sin A hat.

Der Einflufs des 2. Gliedes in ε und log ε auf ε ist näherungsweise gleich

$$\varrho'' \frac{F^*}{\varrho^2} \frac{4a^2 - 3m^2}{24\varrho^2}, \tag{5}$$

worin man nach (2) S. 94 einem Maximum entsprechend mit $\vartheta = 0$ d. h. $b = c$ setzen kann:

$$F^{*2} = \frac{3}{16} a^2(2m^2 - a^2). \tag{6}$$

Die Differentiation nach a zeigt bei konstantem m^2 ein Maximum an für a^2 nahezu gleich $\frac{3}{2} m^2$, wofür (5) übergeht in

$$\varrho'' \frac{3}{64} \frac{m^4}{\varrho^4}. \tag{7}$$

Für $m = 0{,}1\,\varrho$ giebt dies den Betrag von 1″, nahe übereinstimmend mit dem entsprechenden Glied in (2) S. 93.

Das 3. und 4. Glied in log ε haben auf ε einen Einflufs näherungsweise gleich

$$\varrho'' \frac{F^*}{\varrho^2} \frac{32a^4 - 45m^4 + 24n^4 + 320F^{*2}}{5760\varrho^4}$$

d. i. für $\vartheta = 0$ mit F^* nach (6) und n^4 nach (3) S. 95 auch gleich

$$\varrho'' \frac{\sqrt{3a^2(2m^2 - a^2)}}{4\varrho^2} \frac{96m^2a^2 - 16a^4 - 9m^4}{5760\varrho^4}. \tag{8}$$

Dies ist im Maximum nicht erheblich kleiner als der Einflufs entsprechender Glieder in (2) S. 93.

Täfelchen (5) S. 95 gilt daher im wesentlichen auch für den Fall, dafs Formel (4) zur Anwendung gelangt.

§ 18. **Beliebige drei Stücke gegeben.** In anderen als den bisher betrachteten beiden Fällen kann man sich immer durch successive Annäherung nach den Formeln des § 15 S. 92 helfen, in der Weise, dafs ähnlich wie S. 97 F^* wiederholt aus verbesserten Näherungswerten derjenigen Stücke des ebenen Hilfsdreiecks berechnet wird, die den gegebenen Stücken des sphärischen Dreiecks entsprechen.

Wir gehen darauf nicht weiter ein, teilen dagegen noch eine Formel mit, die für ungewöhnlich grofse beobachtete Dreiecke, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel als bekannt vorausgesetzt werden, von nutzen ist.

Hier wird zwar immer eine gleichmäfsige Verteilung von ε auf die drei Winkel ausreichen, aber unter Umständen der Wunsch entstehen, den Einflufs der Glieder 4. Ordnung auf ε kennen zu lernen. Nun ist nach S. 83 (1)

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin^2\frac{a}{2}\,\frac{\sin B\sin C}{\sin\left(B+C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}. \tag{1}$$

Setzt man hierin $\frac{\varepsilon}{2}$ für $\sin\frac{\varepsilon}{2}$, so giebt dies einen Fehler von der Ordnung ε^3 oder 6. Ordnung. Ferner ist nach S. 32 (1)

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt[3]{\cos\frac{a}{2}} + Gl_5.$$

Man hat daher

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\varrho^2}\,\frac{\sin B\sin C}{\sin\left(B+C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\sqrt[3]{\cos^2\frac{a}{2}} + Gl_6.$$

Führt man rechter Hand die 1. Formel (5) S. 81 ein, so folgt:

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\varrho^2}\,\frac{\sqrt[3]{\sin^2 B\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^2 C\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\sin\left(B+C-\frac{\varepsilon}{2}\right)} + Gl_6. \tag{2}$$

Hieraus ergiebt sich endlich für logarithmische Rechnung, wenn $\Delta\log\sin$ die Änderung des Briggischen Logarithmus für eine Sekunde anzeigt:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \log\frac{\varrho'' a^2\sin B\sin C}{2\varrho^2\sin(B+C)} \tag{3}$$

$$+\frac{\varepsilon \text{ in Sek.}}{2}\left\{\Delta\log\sin(B+C) - \frac{\Delta\log\sin B + \Delta\log\sin C}{3}\right\} + \cdots.^{*)}$$

Sind alle drei Winkel beobachtet, so wird man es vorziehen, mit A anstatt mit $(B+C)$ zu rechnen, und zwar genügt es, in vorstehender Formel $(B+C)$ durch A zu ersetzen, wie leicht zu finden.

Ist z. B. $a = 0{,}05\varrho$ mit B und $C = 300^0$, so wird, da abgesehn vom Vorzeichen des Sinus $\Delta\log\sin(B+C) = +\Delta\log\sin 60^0$ ist,

$$\log\varepsilon = 2{,}348866_n - 0{,}000227;\quad \varepsilon = -223{,}172'';$$

übereinstimmend mit einer Rechnung nach der strengen Ausgangsformel (1).

§. 19. **Zahlenbeispiel.** $b = c = 0{,}25\varrho$; $A = 270^0$.

---

*) Mit Benutzung eines Gedankens von *Kummell*, *Astronom. Nachr.* Bd. 89, S. 54 (Nr. 2116).

Die *Gaufsischen Gleichungen* geben hierzu, da $\beta = \gamma = 14^0 19' 26{,}202''$ wird und die oberen Zeichen gelten:

$$\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = [9{,}2428916.5 - 10]$$

$$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = [9{,}8494850.0_n - 10]$$

$$\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = [9{,}8357695.2 - 10].$$

Hierin ist die 8. Ziffer nur Interpolationsziffer aus den Proportionalteilen bei Anwendung 7ziffriger Logarithmen. Die 3. und 4. Gleichung geben, wenn man $\alpha < \pi$ fordert:

$$\frac{B+C}{2} = 360^0 - 45^0 54' 16{,}489'', \text{ dazu die 1. und 2.}$$

$$\frac{B-C}{2} = 0$$

$$B = C = 314^0 5' 43.511''$$

$$\varepsilon = 718^0 11' 27{,}022'' = -1^0 48' 32{,}978''.$$

Die 1. und 2., bezw. die 3. und 4. Gleichung geben ferner:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = [9{,}2428916.5 - 10] \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = [9{,}9932505.3 - 10],$$

$$\frac{\alpha}{2} = 10^0 4' 30{,}813'' \quad \alpha = 20^0 9' 1{,}626'',$$

$$a = 0{,}35169173\varrho.$$

Zur *Kontrolle* kann eine der Formeln (3) S. 84 dienen. Die 2. giebt:

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = -\tan^2\frac{\beta}{2} \text{ also } \varepsilon = -6512{,}978''.$$

Die *Formeln* (*4*) *S. 98* führen dagegen zu nachstehenden Zahlen:

$$b^2 = c^2 = 0{,}0625\varrho^2, \quad a^2 = 0{,}123698\varrho^2, \quad m^2 = 0{,}082899\varrho^2,$$

$$b^4 = c^4 = 0{,}003906\varrho^4, \quad a^4 = 0{,}015301\varrho^4, \quad n^4 = 0{,}007704\varrho^4,$$

$$m^4 = 0{,}006872\varrho^4,$$

$$\log \varepsilon_{\text{in Sek.}} = 3{,}8092751.5_n + 44532.4 + 275.5 + 235.7$$

$$= 3{,}8137795.1_n$$

$$\varepsilon = -6512{,}976'' = -1^0 48' 32{,}976''.$$

$$A - A^* = -2170{,}992 + 4{,}429 + 0{,}033 - 0{,}002 = -2166{,}532'',$$

$$\left.\begin{array}{l} B - B^* = \\ C - C^* = \end{array}\right\} - 2170{,}992 - 2{,}215 - 0{,}016 + 0{,}001 = - 2173{,}222''.$$

Hieraus folgt

$$A^* = 270^0\, 36'\, 6{,}532'' \text{ und da } A^* + B^* + C^* = 900^0 \text{ ist,}$$

$$B^* = C^* = 314^0\, 41'\, 56{,}734'', \text{ also}$$

$$B = C = 314 \quad 5 \; 43{,}512.$$

Ferner giebt *der Sinussatz*

$$a = 0{,}25\varrho \sin A^* : \sin B^* = 0{,}35169173\varrho.$$

§ 20. **Polarkoordinaten.** Für Gradmessungszwecke kann es zweckmäfsig erscheinen, aus dem Dreiecksnetze die Entfernungen der astronomisch bestimmten Dreieckspunkte zu ermitteln. Man wird damit zu der Aufgabe geführt, aus einer Reihe von Seiten beobachteter Dreiecke, etwa P_0P_1, $P_1P_2, \ldots P_{n-1}P_n$, welche an einen astronomischen Dreieckspunkt P_0 anschliefsen, successive die Radienvektoren P_0P_2, $P_0P_3, \ldots P_0P_n$ und ihre Azimute gegen eine durch P_0 gehende Anfangsrichtung zu berechnen.

Es genügt, das Verfahren für P_0P_2 zu erörtern. Der Einfachheit halber schreiben wir nur die Indices der Punkte P an.

Im Dreieck 0 . 1 . 2 sind gegeben die Seiten 0 . 1 und 1 . 2, sowie der Zwischenwinkel als Differenz der Azimute α der Seiten. Wir führen folgende Bezeichnungen ein, wobei die cyklische Reihenfolge 0 . 1 . 2 . 0 zu beachten ist (vergl. S. 71):

$$\left.\begin{array}{c} \text{Seite } 0.1 \text{ mit } b, \quad \text{Seite } 0.2 \text{ mit } a, \\ \text{Seite } 1.2 \text{ mit } c, \\ \sphericalangle\binom{2\,.\,0}{1} = -\alpha_{1.2} + \alpha_{1.0} \text{ mit } A, \\ \sphericalangle\binom{1\,.\,2}{0} = -\alpha_{0.1} + \alpha_{0.2} \text{ „ } C, \\ \sphericalangle\binom{0\,.\,1}{2} = -\alpha_{2.0} + \alpha_{2.1} \text{ „ } B. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Jetzt ist das Formelsystem (4) S. 98 anzuwenden und das ebene Dreieck aufzulösen mittelst der Formeln

$$\left.\begin{array}{l} a \sin \frac{B^* - C^*}{2} = (b - c) \sin \frac{B^* + C^*}{2}, \\ a \cos \frac{B^* - C^*}{2} = (b + c) \cos \frac{B^* + C^*}{2}, \\ \frac{B^* + C^*}{2} \begin{cases} = 90^0 - \frac{A^*}{2};\ A^* < 180, \\ = 450^0 - \frac{A^*}{2};\ A^* > 180. \end{cases} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Diese Formeln der ebenen Trigonometrie gehen aus den beiden ersten *Gaufs*ischen Gleichungen S. 79 hervor, wenn man die Sinus der Seiten in Reihen verwandelt, beiderseits mit ϱ multipliziert und dann $\varrho = \infty$ setzt. Die 3. und 4. Gleichung (10) S. 79 geben die Gleichung für $\frac{B^* + C^*}{2}$.

Aus B^* und C^* folgen nun B und C mittelst der (4) S. 98 und es ist sodann:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{0.2} &= C + \alpha_{0.1}, \\ \alpha_{2.0} &= \alpha_{2.1} - B, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

womit man alles hat, um die Rechnung im Dreieck 0.2.3 fortsetzen zu können.

Sind die Logarithmen von b und c gegeben, so ist bequemer als (2) das Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned} &\log \cot \lambda = \log b - \log c, \\ &\tan \frac{B^* - C^*}{2} = \tan \frac{B^* + C^*}{2} \cot (\lambda + 45^0), \\ &\frac{B^* + C^*}{2} \begin{cases} = 90^0 - \frac{A^*}{2}; & A^* < 180^0, \\ = 450^0 - \frac{A^*}{2}; & A^* > 180^0, \end{cases} \\ &a = b \frac{\sin A^*}{\sin B^*} = c \frac{\sin A^*}{\sin C^*}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

zu welchem man gelangt, wenn man den Ausdruck

$$\frac{\frac{\sin B^*}{\sin C^*} - 1}{\frac{\sin B^*}{\sin C^*} + 1} = \frac{\cot \lambda - 1}{\cot \lambda + 1} \tag{5}$$

bildet. Dies System (4) setzt aber voraus, dafs das Dreieck nicht sehr stumpf ist, welcher Fall bei Berechnung von Polarkoordinaten gerade häufig eintritt.

§ 21. **Die Additamentenmethode.** Das *Legendre*sche Theorem gewährt die Möglichkeit, ohne Benutzung der sphärischen Trigonometrie nach den Formeln der ebenen Trigonometrie von einer gegebenen Basis ausgehend alle Seiten des Dreiecksnetzes zu berechnen. Soweit es sich hierbei um beobachtete Dreiecke handelt, ist die Anwendung des Theorems noch durch den Umstand erleichtert, dafs behufs Ausgleichung der Dreieckswinkel nach der Methode der kleinsten

Quadrate jedenfalls die Excesse schon vorher berechnet werden müssen und somit für die weitere Rechnung nur die geringfügige Arbeit der Subtraktion von $\frac{\varepsilon}{3}$ von jedem sphärischen Winkel erforderlich ist, um danach sofort die ebene Trigonometrie anwenden zu können. Aber auch dann, wenn ε erst berechnet werden mufs, ist das Verfahren ein so einfaches und übersichtliches, dafs es jetzt wohl ausschliefslich benutzt werden dürfte. Immerhin ist doch zweier anderen Methoden zu gedenken, die vielleicht unter Umständen mit dieser Berechnungsweise zu konkurrieren imstande sind, mindestens aber ein wissenschaftliches Interesse beanspruchen. Zunächst die Additamentenmethode.

Dieselbe setzt allgemein für eine Dreieckseite s

$$\log \sin \frac{s}{\varrho} = \log \frac{s}{\varrho} - A_s = \log s - \log \varrho - A_s. \tag{1}$$

Handelt es sich nur um die *Anwendung des Sinussatzes* auf a, b, A und B, so hat man also in der Gleichung

$$\sin \frac{b}{\varrho} = \sin \frac{a}{\varrho} \frac{\sin B}{\sin A}$$

zu substituieren:

$$\log \sin \frac{b}{\varrho} = \log b - \log \varrho - A_b,$$

$$\log \sin \frac{a}{\varrho} = \log a - \log \varrho - A_a.$$

Dies giebt:

$$(\log b - A_b) = (\log a - A_a) + \log \sin B - \log \sin A. \tag{2}$$

Steht eine Tafel der A_s mit dem Argument $\log \sin s$ zur Disposition, so kann man in einer zusammenhängenden Dreieckskette nun in der Weise rechnen, dafs man den log Basis um sein Additament vermindert und nach (2) von Dreieck zu Dreieck für alle Seiten $(\log s - A_s)$ aufsucht, schliefslich aber alle diese Werte um A_s vermehrt.

Die Additamentenmethode erfordert die Konstruktion einer Tabelle für A_s. Man kann dazu $\log \sin \frac{s}{\varrho}$ in eine Reihe entwickeln, einfacher aber die S der Logarithmentafeln anwenden (S. 33). Es wird

$$S = \log \sin \frac{s}{\varrho} - \log \frac{\varrho'' s}{\varrho};$$

vergleicht man dies mit Formel (1), so folgt zur Bestimmung von A_s:

$$A_s = -S - \log \varrho'' = -S - 5{,}3144251.3, \tag{3}$$

S zum Argument $\frac{\varrho'' s}{\varrho}$ gehörig.

Beispielsweise giebt $\log s = 5{,}48000$ mit $\log \varrho = 6{,}80416$ zunächst

$$\log \frac{\varrho'' s}{\varrho} = 3{,}99027 \text{ mit } S = 4{,}6854121.8 - 10$$

und daraus folgt nun

$$A_s = 10 - 9{,}9998373.1 = +\,1626.9.$$

Man kann A_s als Differenz von log sin und log arc auch aus *Bremikers* Logarithmentafeln mit 6 Stellen entnehmen, wo es als b neben den Sinuslogarithmen steht — allerdings nur zur Rechnung mit 7 Decimalstellen geeignet. Für 8ziffrige Rechnung vergl. eine Tafel in *Bremikers Studien* S. 80.

Da für Dreiecke mit Seiten gröfser als $0{,}05\varrho$ nach S. 96 (8) eine gleichmäfsige Verteilung des Excesses auf die 3 Dreieckswinkel nicht mehr zulässig ist, so wird hier die Additamentenmethode zur Seitenberechnung nach dem Sinussatz jedenfalls bequemer als *Legendres* Theorem. Wir werden aber später sehen, dafs Dreiecke von derartigen Dimensionen überhaupt nicht mehr als sphärische berechnet werden können und (ohne dafs wir darauf zurückkommen) wird sich zeigen, dafs der Sinussatz für Dreiecke auf dem Rotationsellipsoid auf die Anwendung von *Legendres* Theorem (in erweiterter Gestalt) *allein* hinweist.

Insoweit die Kugelgestalt der Niveauflächen eine zulässige Hypothese ist, führt die Additamentenmethode aber zu einem brauchbaren Verfahren.

Sie wurde in der 1. Hälfte dieses Jahrhunderts für süddeutsche Triangulierungen angewandt, namentlich von *Soldner* für die bayerische Landesvermessung, seit 1810. Vergl. *Die bayerische Landesvermessung u. s. w.* München 1873. S. 222; ferner *Jordan, Handbuch der Vermessungskunde* Bd. 2, S. 132, sowie *Nell* in der *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 19. 1874. S. 344—353. Hier finden sich auch Anwendungen der Additamentenmethode auf andere Fälle als den Sinussatz. In dieser Beziehung mag noch bemerkt werden, dafs man z. B. bei Auflösung der *Gaufs*ischen Gleichungen bei Seitenlängen bis zu $0{,}05\varrho$ genügend genau für Rechnung mit 7 Decimalen der Logarithmen

$$\log \cos \frac{s}{\varrho} = -\,3A_s$$

setzen kann, wie die 1. Formel (1) S. 32 § 10 zeigt.

§ 22. Strenge Formeln für Sehnen und Horizontalwinkel. Wenn man nicht unmittelbar die Dreiecksseiten auf der Kugelfläche, sondern vorerst die zugehörigen Sehnen aus der Basissehne und den Winkeln ableitet, so giebt es dazu *strenge* Relationen zwischen den Sehnen und den Horizontalwinkeln.

Der Winkel der Sehnendreiecke bedarf man nicht. Die Sehnen

bezeichnen wir mit gotischen Buchstaben und setzen voraus, dafs a, b und $c < \pi\varrho$*) seien; dann erhalten wir sofort aus bekannten, einfachen geometrischen Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a} = 2\varrho \sin \frac{a}{2\varrho}, \quad \mathfrak{b} = 2\varrho \sin \frac{b}{2\varrho}, \quad \mathfrak{c} = 2\varrho \sin \frac{c}{2\varrho}, \\ \text{oder} \\ \mathfrak{a} = 2\varrho \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \mathfrak{b} = 2\varrho \sin \frac{\beta}{2}, \quad \mathfrak{c} = 2\varrho \sin \frac{\gamma}{2}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Setzt man dies in die Formel (8) S. 82, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c} = \cos \frac{\alpha}{2} \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) : \cos \frac{\beta}{2} \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) : \cos \frac{\gamma}{2} \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Nun hat man aber nach der 1. Formel (5) S. 81, indem man sie auf α, β und γ anwendet:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} : \cos^2 \frac{\beta}{2} : \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin A}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)} : \frac{\sin B}{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)} : \frac{\sin C}{\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)};$$

eliminiert man hiermit α, β, γ aus der vorigen Proportion, so folgt eine strenge Formel zur Berechnung der Seiten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bei gegebener Seite $\mathfrak{a}$ und bekannten 3 Winkeln A, B, C:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\sin A \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{\sin B \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \frac{\mathfrak{c}}{\sqrt{\sin C \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}}. \quad (2)$$

Zu der Berechnung von ε aus einer Sehne $\mathfrak{a}$ und den Horizontalwinkeln giebt Formel (1) § 11 S. 83 die Gleichung

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\mathfrak{a}^2}{4\varrho^2} \frac{\sin B \sin C}{\sin\left(B + C - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{\mathfrak{a}^2}{4\varrho^2} \frac{\sin B \sin C}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \quad (3)$$

deren Auflösung durch Annäherungen schon am genannten Orte mit Bezug auf die in der Geodäsie in der Regel nur in betracht kommenden Werte von ε behandelt ist.

Zur vollständigen Berechnung eines Dreiecksnetzes sind auch Formeln für zwei Seiten und ihren Zwischenwinkel als gegebene Stücke unter Umständen erforderlich. Der Versuch, auch hierzu strenge Formeln aufzustellen, führt nicht völlig zum Ziele, insofern

---

*) Da zu 3 Punkten auf der Kugel nur *ein* Sehnendreieck gehört, welches immer mit einem sphärischen Dreieck korrespondiert, dessen Seiten dieser Bedingung genügen, so liegt in derselben keine Beschränkung.

man nur zu Formeln gelangt, die eine successive Annäherungsrechnung erheischen und sich wenig zur Anwendung eignen. Wir unterlassen daher deren Mitteilung und gehen sogleich zu den Näherungsformeln über.

§ 23. Näherungsformeln. Grunerts Satz. Zur Reduktion von der Sehne $\mathfrak{a}$ auf die Seite a und umgekehrt erhält man mittelst der 1. Formeln von (3) und (4) S. 29 u. 30 für $u = \frac{a}{2\varrho}$ und $\sin u = \frac{\mathfrak{a}}{2\varrho}$ leicht die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \log \mathfrak{a} &= \log a - \frac{1}{6} M \left\{\left(\frac{a}{2\varrho}\right)^2 + \frac{1}{30}\left(\frac{a}{2\varrho}\right)^4 + \cdots\right\}, \\ \log a &= \log \mathfrak{a} + \frac{1}{6} M \left\{\left(\frac{\mathfrak{a}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{11}{30}\left(\frac{\mathfrak{a}}{2\varrho}\right)^4 + \cdots\right\}\cdot \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

In der Regel wird man sich aber der S. 105 erwähnten Hilfstafeln für die Differenz von Sinus und Arcus bedienen.

Es folgt nun ferner ohne weiteres aus den Relationen (2) des vorigen Paragraphen mit Vernachlässigung von Gliedern 4. Ordnung (in Bezug auf $\frac{s}{\varrho}$):

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c} = \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right) : \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right) : \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right)\cdot \quad (2)$$

Dies ist Grunerts Satz. Er unterscheidet sich von *Legendres* Satz dadurch, dafs die reduzierten Winkel *keinem* Dreieck angehören.

Zur Kenntnis der Glieder 4. Ordnung führt folgende Rechnung. Die Proportion

$$\mathfrak{b} : \mathfrak{c} = \sqrt{\sin B \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)} : \sqrt{\sin C \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \quad (3)$$

giebt durch Auflösung von $\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ und $\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ in die Bestandteile und Division beider Wurzeln mit $\cos\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin B}{\sin C}\sqrt{\frac{1 - \cot B \tan\frac{\varepsilon}{2}}{1 - \cot C \tan\frac{\varepsilon}{2}}}. \quad (4)$$

Zähler und Nenner der Wurzel dieser Formel lassen sich für kleine Dreiecke nach dem binomischen Satze entwickeln. Es ist nämlich z. B. für den Nenner nach S. 84 2. Formel (3):

$$\cot C \tan\frac{\varepsilon}{2} = 1 : \left(1 + \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\sec C\right) \quad (5)$$

und für kleine α und β ist demnach das Produkt $\cot C \tan \frac{\varepsilon}{2}$ stets zwischen -1 und $+1$ enthalten. Im allgemeinen und bei beliebigen Werten von C findet dies sicher statt, so lange $\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} > 2$ ist, d. h. die Dreiecksseiten in Gradmafs genommen ca. 70° nicht übersteigen. Beschränkt man sich auf kleine Werte von α, β und γ und betrachtet diese wie bisher als Gröfsen 1. Ordnung, so sind die Ausdrücke $\cot C \tan \frac{\varepsilon}{2}$, $\cot B \tan \frac{\varepsilon}{2}$ u. s. f., wie (5) zeigt, Gröfsen 2. Ordnung.

Man erhält nun aus (4)

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin B}{\sin C} \frac{1 - \frac{1}{2} \cot B \tan \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \cot B \tan \frac{\varepsilon}{2}\right) + Gl_6}{1 - \frac{1}{2} \cot C \tan \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \cot C \tan \frac{\varepsilon}{2}\right) + Gl_6}$$

und hieraus folgt, wenn man Zähler und Nenner mit

$$1 - \frac{1}{8} \cot B \cot C \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32}$$

multipliziert, sowie unter der Annahme, dafs ε wie früher bei aufserhalb gezählten Dreieckswinkeln negativ genommen wird:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin B}{\sin C} \frac{1 - \frac{1}{2} \cot B \tan \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \tan \frac{\varepsilon}{2} [\cot B + \cot C]\right) - \frac{\varepsilon^2}{32} + Gl_6}{1 - \frac{1}{2} \cot C \tan \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \tan \frac{\varepsilon}{2} [\cot B + \cot C]\right) - \frac{\varepsilon^2}{32} + Gl_6},$$

oder mit Benutzung einer (wie man rückwärts verificieren kann) völlig zulässigen einfachen Umformung in Zähler und Nenner:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin \left(B - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{32\varrho''} [\cot B + \cot C]\right) + Gl_6}{\sin \left(C - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{32\varrho''} [\cot B + \cot C]\right) + Gl_6}. \tag{6}$$

In dieser Formel ist angenommen, dafs ε in Sekunden ausgedrückt sei. Aufserdem mag bemerkt werden, dafs die Glieder 6. Ordnung u. s. f. im Zähler und Nenner ε nicht immer in Verbindung mit $\cot B$ und $\cot C$ enthalten, sondern auch *ein*mal wenigstens frei davon, dafs sie mithin wie $\sin B$ und $\sin C$ (also wie die Hauptglieder im Zähler und Nenner) verschwinden. Es ist aber *nicht* angänglich, sie ohne weiteres mit in diese Hauptglieder (als Incremente von B und C) hereinzunehmen.

Zur Berechnung des Excesses ε dient, mit Benutzung logarithmischer Differenzen, bis auf Glieder 6. Ordnung genau wieder Formel

(3) des vorigen Paragraphen, wobei es genügt, linker Hand $\sin\frac{\varepsilon}{2}$ mit (ε in Sek.) : $2\varrho''$ zu vertauschen.

§ 24. 2 Sehnen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und der Horizontalwinkel A gegeben. Indem man $(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}):(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ bildet, folgt aus (6) S. 108 zunächst nachstehende Formel zur Berechnung von $(B+C)$:

$$\frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)+Gl_6}{\tan\left(\frac{B+C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{32}[\cot B+\cot C]\right)+Gl_6}, \tag{1}$$

wobei man beachten mag, daſs die Gl_6 für $B=C$ verschwinden, wie die oben gegebene Entwicklung unzweifelhaft nachweist. Linker Hand führt man einen Hilfswinkel ein wie S. 103, um die logarithmische Rechnung zu erleichtern, und rechter Hand setzt man im Nenner besser

$$\frac{\varepsilon^2}{32}[\cot B+\cot C] = \frac{\varepsilon\mathfrak{a}^2}{64\varrho^2}+\cdots. \tag{2}$$

Daſs diese Substitution zulässig ist, erkennt man leicht mittelst nachstehender, aus (4) S. 98 zu entnehmender Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2ab\cos C}{\varrho^2} &= \frac{a^2+b^2-c^2}{\varrho^2}+Gl_4 = \frac{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}{\varrho^2}+Gl_4,\\ \frac{ab\sin C}{\varrho^2} &= 2\varepsilon+Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hieraus folgt für $\varepsilon\cot C$ und analog für $\varepsilon\cot B$:

$$\left.\begin{aligned} 4\varepsilon\cot C &= \frac{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}{\varrho^2}+Gl_4,\\ 4\varepsilon\cot B &= \frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}{\varrho^2}+Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Entnimmt man nun noch zur Berechnung des Excesses die Formel (2) S. 85 mit gehöriger Vertauschung der Stücke des Dreiecks, so hat man:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\sin A}{4\varrho^2\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{5}$$

Durch Reihenentwicklung von $\cos\frac{\alpha}{2}$ gelangt man weiter zu der Formel:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\sin A}{2\varrho^2}\left(1+\frac{\mathfrak{a}^2}{8\varrho^2}+Gl_4\right). \tag{6}$$

Somit gestaltet sich endlich das Formelsystem zur Auflösung des Dreiecks aus $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und A wie folgt:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{a}^2}{\varrho^2} &= \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos A}{\varrho^2} + Gl_4, \\
\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \frac{\varrho''\mathfrak{b}\mathfrak{c}\sin A}{2\varrho^2}\left(1 + \frac{\mathfrak{a}^2}{8\varrho^2} + Gl_4\right), \\
\log\cot\lambda &= \log\mathfrak{b} - \log\mathfrak{c}, \\
\frac{B+C}{2} &\begin{cases} = 90^0 - \frac{A}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, & A < 180^0, \\ = 450^0 - \frac{A}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, & A > 180^0, \end{cases} \\
\tan\frac{B-C}{2} &= \tan\left(\frac{B+C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\left[1 + \frac{\mathfrak{a}^2}{16\varrho^2}\right]\right)\cot(\lambda + 45^0) + Gl_6,
\end{aligned}\right\} \quad (7)
$$

$\mathfrak{a}$ folgt aus Formel (6) des vorigen Paragraphen, welche Formel auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ angewandt werden kann, nachdem B und C bekannt geworden sind.

Diese Rechnung genügt aber nur, wenn A nicht sehr stumpf ist. Da nun ein dem System (2) S. 102 analoges System selbst dann kompliziert wird, wenn man ε^2 in genannter Formel (6) vernachlässigt, so mufs man noch eine Formel nach Art des Cosinussatzes der ebenen Geometrie für $\mathfrak{a}^2$ aufstellen. Es ist aber im Sehnendreieck:

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\mathfrak{A}, \tag{8}$$

worin $\mathfrak{A}$ den Sehnenwinkel zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bezeichnet. Die Vertikale in der Ecke A und die Sehnen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bilden eine dreiseitige Ecke mit den Seiten $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$ und $\mathfrak{A}$; letzterer Seite liegt der Flächenwinkel A gegenüber. Daher ist

$$\cos\mathfrak{A} = \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos A. \tag{9}$$

Führt man hier die Formeln (5) S. 81, angewandt auf β und γ, ein, so folgt nach einfacher Reduktion:

$$\cos\mathfrak{A} = \cos\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{\frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}} = \cos\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{10}$$

Entwickelt man noch $\cos\frac{\alpha}{2}$ nach Potenzen von $\sin\frac{\alpha}{2}$, so ergiebt sich nunmehr für $\mathfrak{a}^2$ die Gleichung:

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{a}^2}{8\varrho^2} - \frac{\mathfrak{a}^4}{128\varrho^4}\right) + \varrho^2 Gl_8. \tag{11}$$

Vorstehende Entwicklungen dürften zeigen, dafs die Rechnung mit Sehnen und Horizontalwinkeln nicht mühsamer ist, als diejenige

mit horizontalen Entfernungen und Horizontalwinkeln, namentlich wenn man auf Polarkoordinaten verzichtet. Doch ist hervorzuheben, dafs die Gl_4 bei der Sehnenrechnung im allgemeinen rascher als beim *Legendre*schen Theorem merklich werden. Das Glied $\frac{1}{32}\varepsilon^2[\cot B+\cot C]$ $=\frac{1}{64}\varepsilon\mathfrak{a}^2:\varrho^2$ im Zähler von (6) S. 108 insbesondere ist im allgemeinen weit gröfser als das entsprechende Glied $\frac{1}{60}\varepsilon(m^2-a^2):\varrho^2$ in der 1. Formel (4) S. 93, wie die Substitution $a^2=m^2$ zeigt.

Ob man wirklich eine Triangulation mit Benutzung von Sehnen und Horizontalwinkeln zu berechnen für vorteilhaft erachten kann, wird davon abhängen, wie sich die entsprechenden Formeln fürs Rotationsellipsoid gestalten und wie sich die weitere Verwertung der Resultate einer Triangulation in der Form von Sehnen und Horizontalwinkeln gestaltet. Diese Erörterung bleibt vorbehalten.

In früherer Zeit (u. A. bei den französischen Vermessungen zu Ende des vorigen Jahrhunderts durch *Delambre* [vgl. *Méthodes analytiques* p. 36—42] und bei den österreichischen Vermessungen im 1. Viertel dieses Jahrhunderts durch General *Fallon* [vgl. *Nagels* weiter unten citierte Abh.]) wurden die gemessenen Winkel auf Sehnenwinkel bezw. Horizontalwinkel reduziert, eine allerdings mühsame Arbeit, die aber dann nicht zu umgehen ist — auch nicht bei Anwendung des *Legendre*schen Satzes —, wenn wie damals in Frankreich die schiefen Winkel mit dem *Borda*schen *Kreis* und nicht wie jetzt allgemein geschieht, die Horizontalwinkel mit dem Theodolit gemessen werden. Die Reduktion der direkt gemessenen Horizontalwinkel auf Sehnenwinkel ist jedoch eine nutzlose Weitläufigkeit, wie man aus den dazu aufgestellten und überdies nur bis auf Glieder 4. Ordnung genauen Formeln *Fabers* und *Grunerts* ersehen kann. Man findet dieselben neben *Grunerts* oben erwähntem Satz, sowie andern interessanten Sätzen *Riedl von Leuensterns* (1827), die eine geometrische Interpretation der Reduktionsgröfsen der Winkel gestatten, in der umfassenden Abhandlung *Nagels: Über die Reduktion eines sphärischen Dreiecks von geringer Krümmung auf sein Sehnendreieck,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. von *Schlömilch*, Bd. 1, 1856, S. 257—275 dargestellt.

Die strenge Relation (2) § 22, S. 106 lernte Verfasser durch *Kummells* Aufsatz, Astronom. Nachr. Bd. 89, 1877. Nr. 2116 kennen. Der Satz (2) des vorigen Paragraphen wurde von *Grunert* im 25. Bde. des Archivs f. Math. u. Phys. (1855) bewiesen, gelegentlich andrer Entwicklungen zur Reduktion der Horizontalwinkel auf Sehnenwinkel. Dieser Satz ist leider nicht so bekannt geworden, als er es verdient, namentlich weil man der Meinung gewesen zu sein scheint, dafs man ihn nur verwenden könne, wenn 1 Sehne und 3 Horizontalwinkel gegeben sind. Dafs er bei *gehöriger* Anwendung aber auch eine Auflösung in jedem andern Falle gestattet, und daher *die wirkliche Reduktion auf Sehnenwinkel ganz überflüssig* macht, dürfte aus unsern Entwicklungen hervorgehen.

§ 25. Zahlenbeispiel. Gegeben $\mathfrak{a}=0{,}15\varrho$; $B=350^0$; $C=330^0$. *Formel* (3) S. 106 giebt hier $\log\sin\frac{\varepsilon}{2}=6{,}880696_n-2.51\frac{\varepsilon}{2}$, das

2. Glied in Einheiten der 6. Decimalstelle mit ε in Sek., und da $\frac{\varepsilon}{2}$ klein genug ist, folgt durch Addition von 5,314425 sofort:

$$\log \frac{\varepsilon}{2} \text{ in Sek.} = 2{,}195121_n - 2.51 \frac{\varepsilon}{2} \text{ in Sek.}; \quad \frac{\varepsilon}{2} = -2'36{,}861''.$$

Ferner ist $A = 900^0 - 5'13{,}722'' - 680^0 = 219^0\,54'\,46{,}278''$ und man hat zur Anwendung der strengen *Formel* (2) S. 106 und unter Benutzung 8ziffriger Logarithmen:

$A = 219^0 54' 46{,}278''$	$A - \frac{\varepsilon}{2} = 219^0 57' 23{,}139''$	$\log \sqrt{\sin A \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ $= 9{,}8074763.3_n - 10$
$B = 350\ 0\ 0$	$B - \frac{\varepsilon}{2} = 350\ \ 2\ 36{,}861$	$\log \sqrt{\sin B \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ $= 9{,}2387316.0_n - 10$
$C = 330\ 0\ 0$	$C - \frac{\varepsilon}{2} = 330\ \ 2\ 36{,}861$	$\log \sqrt{\sin C \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ $= 9{,}6986837.2_n - 10.$

Da nun $\log \frac{\mathfrak{a}}{\varrho} = 9{,}1760912.6 - 10$ ist, so folgt weiter nach genannter Formel (2):

$$\log \frac{\mathfrak{b}}{\varrho} = 8{,}6073465.3 - 10; \quad \log. \frac{\mathfrak{c}}{\varrho} = 9{,}0672986.5 - 10.$$

Gehen wir nun *umgekehrt* von diesen letzten beiden Zahlen und dem Winkel $A = 219^0\,54'\,46{,}278''$ aus, so giebt das *Formelsystem* (7) des vorigen Paragraphen zunächst:

$$\mathfrak{a}^2 = (0{,}00164 + 0{,}01363 + 0{,}00725)\,\varrho^2 = 0{,}02252\,\varrho^2$$

$$\varepsilon = -312{,}838'' \left(1 + \frac{0{,}02252}{8}\right) \text{ d. i. } -5'\,13{,}719''.$$

Die Differenz in ε mit dem oben erhaltenen Wert beruht auf der Vernachlässigung der Glieder 6. Ordnung, denn eine strenge Formel giebt aus $\log \mathfrak{b}$, $\log \mathfrak{c}$ und A wieder den frühern Wert. Man erhält ferner

$$\lambda = 70^0\,52'\,29{,}024''; \ \log \cot(\lambda + 45^0) = 9{,}6857676.8_n - 10$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{B+C}{2} &= 450^0 - 109^0\,57'\,23{,}139'' - 2'\,36{,}860'' = 340^0\,0'\,0{,}001''\\ -\frac{\varepsilon}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{a}^2}{16\varrho^2}\right) &= +78{,}431''.1{,}00141 = +\ 1\ 18{,}542\end{aligned}\right\}$$

$$\text{Summa} = 340\ 1\ 18{,}543$$

$$\log \tan 340^0\,1'\,18{,}543'' = 9{,}5605510.8_n - 10$$

$$\log \tan \frac{B-C}{2} = 9{,}2463187.6 - 10; \quad \frac{B-C}{2} = 9^0\,59'\,59{,}999''$$

$$B = 350^0\,0'\,0{,}000'' \quad C = 330^0\,0'\,0{,}002''.$$

Hieraus folgt wieder mittelst *Formel* (2) S. 106 die dritte Seite $\mathfrak{a}$ und zwar ist bezw. aus beiden Winkeln

$$\log \frac{\mathfrak{a}}{\varrho} = 9{,}1760912.5 \text{ und } .6 - 10,$$

also im Mittel gleich 9,1760912.6 — 10, wie oben angenommen.

Will man sich der *Formel* (6) S. 108 bedienen, so hat man zunächst

$$\frac{\varepsilon}{4} = -\,1'\,18{,}430''$$

$$-\frac{\varepsilon''^2}{32\varrho''} \cot A = -\,0{,}0178''$$

$$-\frac{\varepsilon''^2}{32\varrho''} \cot B = +\,0{,}0848''$$

$$-\frac{\varepsilon''^2}{32\varrho''} \cot C = +\,0{,}0258''$$

und hiermit:

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \sin(219^0\,56'\,4{,}708'' + 0{,}067''):\sin(330^0\,1'\,18{,}430'' + 0{,}067'')$$

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{c} = \sin(219\;\;56\;\;4{,}708\;\; + 0{,}008\;\;):\sin(350\;\;1\;\;18{,}430\;\; + 0{,}008\;\;),$$

woraus übereinstimmend folgt:

$$\log \frac{\mathfrak{a}}{\varrho} = 9{,}1760912.5 - 10\,.$$

Wenden wir nun die *2. Formel* (1) S. 107 an, um die horizontalen Entfernungen a, b, c zu erhalten, so folgt für a zunächst:

$$\log \frac{a}{\varrho} = 9{,}1760912.6 - 10 + 4071.5 + 8.4 = 9{,}1764992.5 - 10$$

und entsprechend

$$\log \frac{b}{\varrho} = 8{,}6073762.0 - 10 \quad \log \frac{c}{\varrho} = 9{,}0675456.7 - 10.$$

Es ist nicht ohne Interesse diese Zahlen noch mittelst der Formeln (4) § 15 S. 93 zu prüfen. Die Berechnung von ε nach Formel (2) dieses Paragraphen unterdrückend, setzen wir sofort $\frac{\varepsilon}{3} = -\,104{,}574''$. Nun ist:

$a^2 = 0{,}0225\varrho^2$	$m^2 - a^2 = -\,0{,}0099\varrho^2$	$\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{m^2-a^2}{20\varrho^2} = +\,0{,}052''$
$b^2 = 0{,}0016\varrho^2$	$m^2 - b^2 = +\,0{,}0110\varrho^2$	$\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{m^2-b^2}{20\varrho^2} = -\,0{,}058$
$c^2 = 0{,}0136\varrho^2$	$m^2 - c^2 = -\,0{,}0010\varrho^2$	$\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{m^2-c^2}{20\varrho^2} = +\,0{,}005$
$m^2 = 0{,}0126\varrho^2$		

$A - A^* = -1'44{,}522''$ $A^* = 219^0 56' 30{,}800''$ log sin $= 9{,}8075420.2 - 10$

$B - B^* = -1\ 44{,}632$ $B^* = 350\ \ 1\ 44{,}632$ $9{,}2384189.7 - 10$

$C - C^* = -1\ 44{,}569$ $C^* = 330\ \ 1\ 44{,}569$ $9{,}6985884.3 - 10.$

Diese log sin geben mit den Logarithmen der Gegenseiten bezw. die Differenzen

$$9{,}3689472.3;\ .3;\ .4 - 10.$$

---

3. Kapitel.

Rechtwinklige und geographische Koordinaten auf der Kugel.*)

§ 1. **Rechtwinklige sphärische Koordinaten.** Für Zwecke einer Landesvermessung ist es vorteilhaft, zur Erhöhung der Bequemlichkeit in der Benutzung der Resultate einer Triangulierung, rechtwinklige Koordinaten der Dreieckspunkte abzuleiten. Man wählt als Axe der x einen gröfsten Kreis und zählt x von einem Anfangspunkte bis zum Fufspunkte desjenigen gröfsten Kreisbogens, der normal zur x-Axe durch einen Punkt, um dessen Lage es sich handelt, gelegt werden kann. Das Perpendikel bezeichnet die Ordinate y. Derartige Koordinaten hat *Soldner* zu Anfange des Jahrhunderts für die bayerische Landesvermessung angewandt (vergl. das betreffende Werk S. 271) und seitdem sind sie zu fast ausschliefslichem Gebrauche gelangt.

Ein anderes System rechtwinkliger sphärischer Koordinaten erhält man dadurch, dafs normal zur x-Axe ein gröfster Kreis als y-Axe gelegt wird, und dafs man unter x und y die Längen der Perpendikel von einem Punkte bis zu den betreffenden Axen versteht. Wir werden jedoch diesen Modus hier nicht verfolgen, weil er weniger vollkommen als der zuerst angeführte ist. Mängel zeigen sich bei der Übertragung des Systems aufs Ellipsoid und bei der Berechnung geographischer Koordinaten, sowie in dem Umstande, dafs die Linien der konstanten x und y nicht normal auf einander stehen.

Indem wir also zu dem *Soldner*schen System zurückkehren, tritt uns als erste Aufgabe unmittelbar die entgegen, aus den Koordinaten

---

*) Wir behandeln in diesem Kapitel nur den Fall, dafs mit horizontalen Entfernungen gerechnet wird. *Sehnen* erweisen sich für rechtwinklige Koordinaten direkt nicht bequem, man geht besser erst zu horizontalen Entfernungen über. Für die Berechnung geographischer Positionen sind sie dagegen sehr gut direkt verwendbar; trotzdem haben wir auch dafür die Ausführung nicht gegeben, weil das 4. Kapitel diese Aufgabe fürs Rotationsellipsoid behandelt und die Lösung für die Kugel an sich kein Interesse bietet.

eines Punktes P_1 und der horizontalen Entfernung $P_1\,P_2$ eines zweiten Punktes P_2 sowie der Richtung nach demselben, die Koordinaten dieses Punktes P_2 abzuleiten. Es ist dazu vor allem nötig anzugeben, wie die Richtung eines gröfsten Kreisbogens $P_1\,P_2$ festgestellt wird.

Man denke sich durch P_1 eine Parallele zur x-Axe, d. h. eine Linie im Abstand y gelegt (ein kleiner Kreis, dessen Ebene parallel zur Ebene der x-Axe ist). Von der positiven Seite dieser Linie aus zählt man nun *Richtungswinkel* von 0^0 bis 360^0, dergestalt, dafs der Richtungswinkel wachsender y 90^0 beträgt. Da man selbstverständlich die Richtung positiver y so nehmen wird, dafs dieser Drehungssinn für Richtungswinkel und gemessene Winkel übereinstimmt, man also die letztern als Differenzen der ersteren für beide Schenkel auffassen kann wie S. 71 (1), so ergiebt sich zur Berechnung des Richtungswinkels für $P_1\,P_3$ aus demjenigen für $P_1\,P_2$ und dem Zwischenwinkel die Relation:

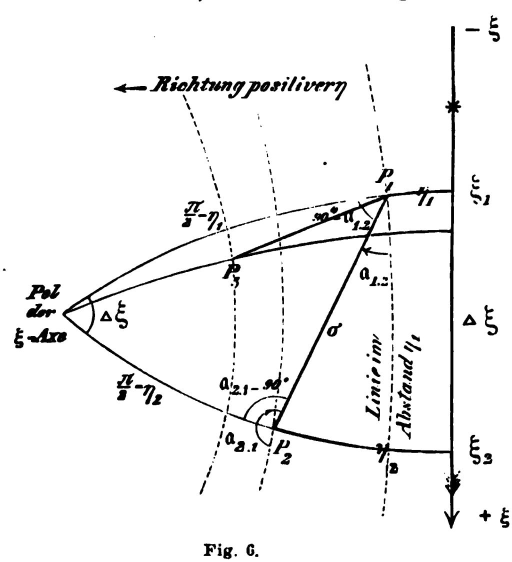


Fig. 6.

$$\mathfrak{a}_{1.3} = \mathfrak{a}_{1.2} + \sphericalangle\binom{2.3}{1}, \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{a}_{1.3}$ und $\mathfrak{a}_{1.2}$ die Richtungswinkel für $P_1 P_3$ bezw. $P_1 P_2$ im Punkte P_1 bezeichnen. Fig. 6 zeigt die Kugeloberfläche; der Radius ist als Einheit der Längen genommen und es bedeuten demgemäfs

$$\left.\begin{aligned} \xi &\text{ den Quotient } \frac{x}{\varrho}, \\ \eta &\text{ den Quotient } \frac{y}{\varrho}, \\ \sigma &\text{ den Quotient } \frac{s}{\varrho}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

§ 2. **Ordinatendifferenz und Abscissendifferenz.** Zur Berechnung von η_2 hat man im sphärischen Dreieck mit den Ecken P_1, P_2 und dem Pol der ξ-Axe nach dem Cosinussatz:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta_2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right)\cos\sigma + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right)\sin\sigma\cos\left(90^0 - \mathfrak{a}_{1.2}\right)$$

oder

$$\sin \eta_2 = \sin \eta_1 \cos \sigma + \cos \eta_1 \sin \sigma \sin \mathfrak{a}_{1.2}. \quad (1)$$

Hieraus folgt, wenn man noch $\eta_2 = \eta_1 + \Delta\eta$ setzt und ferner zur Vereinfachung $\mathfrak{a}_{1.2}$ kurz mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet, nach leichter Reduktion:

$$\sin \Delta\eta = \sin \sigma \sin \mathfrak{a} + \tan \eta_1 (\cos \sigma - \cos \Delta\eta). \quad (2)$$

In diese Gleichung führen wir nachstehende Reihenentwicklungen ein, wobei wir uns auf Werte von σ und η beschränken, die als Gröfsen 1. Ordnung bezeichnet werden können (S. 25), sodafs die Zulässigkeit dieser Substitutionen und der nachfolgenden Entwicklungen aufser Frage steht:

$$\sin \sigma = \sigma - \frac{1}{6}\sigma^3 + \frac{1}{120}\sigma^5 + Gl_7$$

$$\tan \eta_1 = \eta_1 + \frac{1}{3}\eta_1^3 + Gl_5$$

$$\cos \sigma = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{24}\sigma^4 + Gl_6$$

$$\cos \Delta\eta = 1 - \frac{1}{2}\Delta\eta^2 + \frac{1}{24}\Delta\eta^4 + Gl_6.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung v für $\sigma \sin \mathfrak{a}$, dann findet sich

$$\sin \Delta\eta = v - \frac{v\sigma^2}{6} + \frac{v\sigma^4}{120} - \eta_1 \frac{\sigma^2 - \Delta\eta^2}{2}\left(1 - \frac{\sigma^2 + \Delta\eta^2}{12}\right) - \eta^3 \frac{\sigma^2 - \Delta\eta^2}{6} + Gl_7. \quad (3)$$

Führt man dies in die beiden ersten Glieder der Arcussinusreihe S. 29 ein, so folgt

$$\Delta\eta = v - v\frac{\sigma^2 - v^2}{6} - \eta_1 \frac{\sigma^2 - \Delta\eta^2}{2} + Gl_5,$$

oder auch, wenn $\sigma \cos \mathfrak{a}$ mit u bezeichnet wird und wenn man beachtet, dass $u^2 + v^2 = \sigma^2$ also $\sigma^2 - v^2 = u^2$, dafs ferner $\Delta\eta^2 = v^2 + Gl_4$ ist:

$$\Delta\eta = v - \frac{1}{6}u^2 v - \frac{1}{2}u^2\eta_1 + Gl_5.$$

Substituiert man den hieraus folgenden Wert von $\Delta\eta^2$ in der Reihe (3), so ergiebt sich

$$\sin \Delta\eta = v - \frac{1}{6}v\sigma^2 - \frac{1}{2}u^2\eta_1 + \frac{1}{120}v\sigma^4 + \frac{1}{24}u^4\eta_1$$
$$- \frac{1}{12}u^2v^2\eta_1 - \frac{1}{2}u^2v\eta_1^2 - \frac{1}{6}u^2\eta_1^3 + Gl_7.$$

Dies ist nunmehr in die bereits oben angeführte Arcussinusreihe

mit Beachtung der 3 ersten Glieder derselben einzusetzen und führt zu der Formel:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\eta = v - \frac{1}{6}u^2v - \frac{1}{2}u^2\eta_1 \\ + \frac{1}{24}u^4\eta_1 - \frac{1}{3}u^2v^2\eta_1 - \frac{1}{2}u^2v\eta_1^2 \\ - \frac{1}{6}u^2\eta_1^3 - \frac{1}{15}u^2v^3 + \frac{1}{120}u^4v + Gl_7;\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\varDelta\eta = \eta_2 - \eta_1.$$

Zur Berechnung von $\varDelta\xi$ giebt das sphärische Dreieck P_1P_2Pol, indem man den Sinussatz anwendet:

$$\sin\varDelta\xi = \sin\sigma\cos\mathfrak{a}_{1.2}\sec\eta_2\,. \quad (5)$$

Unter Substitution der Reihenentwicklungen für $\sin\sigma$ und $\sec\eta_2$ folgt hieraus:

$$\sin\varDelta\xi = \left(\sigma - \frac{1}{6}\sigma^3 + \frac{1}{120}\sigma^5\right)\left(1 + \frac{1}{2}\eta_2^2 + \frac{5}{24}\eta_2^4\right)\cos\mathfrak{a} + Gl_7,$$

oder

$$\begin{aligned}\sin\varDelta\xi = u - \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{6}uv^2 + \frac{1}{2}u\eta_2^2 \\ + \frac{1}{120}u^5 + \frac{1}{60}u^3v^2 + \frac{1}{120}uv^4 - \frac{1}{12}u^3\eta_2^2 \\ - \frac{1}{12}uv^2\eta_2^2 + \frac{5}{24}u\eta_2^4 + Gl_7\,.\end{aligned}$$

Führt man diesen Ausdruck für $\sin\varDelta\xi$ in die Arcussinusreihe S. 29 ein, so folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\xi = u - \frac{1}{6}uv^2 + \frac{1}{2}u\eta_2^2 \\ - \frac{1}{15}u^3v^2 + \frac{1}{120}uv^4 + \frac{1}{6}u^3\eta_2^2 \\ - \frac{1}{12}uv^2\eta_2^2 + \frac{5}{24}u\eta_2^4 + Gl_7;\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\varDelta\xi = \xi_2 - \xi_1.$$

Man kann mittelst Formel (4) hieraus η_2 eliminieren, indem man $\eta_2 = \eta_1 + \varDelta\eta$ setzt; es ergiebt sich dann

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\xi = u + \frac{1}{3}uv^2 + \frac{1}{2}u\eta_1^2 + uv\eta_1 \\ - \frac{1}{15}u^3v^2 + \frac{2}{15}uv^4 - \frac{1}{3}u^3v\eta_1 \\ + \frac{2}{3}uv^3\eta_1 - \frac{1}{3}u^3\eta_1^2 + \frac{7}{6}uv^2\eta_1^2 + \frac{5}{6}uv\eta_1^3 \\ + \frac{5}{24}u\eta_1^4 + Gl_7;\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

doch ist diese Formel augenscheinlich weniger vorteilhaft als (6).

Restituieren wir nun in den Formeln (4) und (6) für ξ und η bezw. $x:\varrho$ und $y:\varrho$ und ändern die Bedeutung von u und v wie weiter unten angegeben ab, so findet sich:

$$\left.\begin{aligned} y_2 - y_1 &= v - \left(y_1 + \frac{1}{3}v\right)\frac{u^2}{2\varrho^2} \\ &\quad + \left(y_1 + \frac{1}{5}v\right)\left(\frac{u^4}{24\varrho^4} - \frac{u^2v^2}{3\varrho^4}\right) - (y_1 + 3v)\frac{u^2y_1^2}{6\varrho^4} + \varrho\, Gl_7 \\ x_2 - x_1 &= u\left\{1 + \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{6\varrho^2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{5\varrho^2}\right)\frac{u^2}{3\varrho^2} + \frac{5}{6}\left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{10\varrho^2}\right)^2\right\} + \varrho\, Gl_7; \end{aligned}\right\}(8)$$

$$s \sin \mathfrak{a}_{1.2} = v \quad s \cos \mathfrak{a}_{1.2} = u.$$

Von vorstehenden Formeln reichen für das praktische Bedürfnis die Glieder bis zur 3. Ordnung incl. völlig aus. Die höheren Glieder gewähren aber die Möglichkeit, die begangene Vernachlässigung zu schätzen. Diese Schätzung versparen wir auf § 4.

Es ist noch hervorzuheben, dafs vorstehende Entwicklungen nicht nur für die spezielle Form der Figur 6, sondern allgemein gelten, da die Bildung der Ausdrücke für die Dreieckswinkel zu den Formeln (1) und (5) der systematischen Herleitung nach (2) S. 71 entspricht.

§ 3. **Differenz der Richtungswinkel.** Bei dem Übergange vom Punkte P_1 zu dem Punkte P_2 ist nächst den Differenzen der Koordinaten auch noch diejenige der Richtungswinkel im Anfangs- und Endpunkt der Linie P_1P_2 von Wichtigkeit, um für andere von P_2 ausgehende Linien die Rechnung fortsetzen zu können. Das mehrfach benutzte sphärische Dreieck der Fig 6 giebt hier mittelst der 1. *Neper*schen Analogie (5) S. 77:

$$\tan\frac{(\mathfrak{a}_{2.1} - 90^0) + (90^0 - \mathfrak{a}_{1.2})}{2} = \frac{\cos\dfrac{\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \eta_2\right)}{2}}{\cos\dfrac{\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \eta_2\right)}{2}} \cot\frac{\varDelta\xi}{2}$$

und zwar gilt diese Formel allgemein für jede Lage von P_1P_2 (wie die Formeln des vorigen Paragraphen).

Wir setzen nun mit Rücksicht darauf, dafs für $\varrho = \infty$ das Azimut $\mathfrak{a}_{2.1} = \mathfrak{a}_{1.2} + 180^0$ ist und bei endlichem ϱ und kleinen Distanzen diese Gleichung noch näherungsweise gelten mufs:

$$\mathfrak{a}_{2.1} = \mathfrak{a}_{1.2} + 180^0 + \varDelta\mathfrak{a} \tag{1}$$

und erhalten nach einfacher Reduktion, rechts und links reziproke Werte nehmend:

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{\Delta\mathfrak{a}}{2} &= -\tan\frac{\Delta\xi}{2}\,\frac{\sin\eta}{\cos\frac{\Delta\eta}{2}}\,, \\ \eta &= \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

In (2) führen wir nun nachstehende Reihenentwicklungen ein:

$$\sin\eta = \eta\left(1-\frac{1}{6}\eta^2+Gl_4\right)$$

$$\sec\frac{\Delta\eta}{2} = 1+\frac{v^2}{8\varrho^2}+Gl_4$$

$$\tan\frac{\Delta\xi}{2} = \frac{1}{2}\Delta\xi\left(1+\frac{u^2}{12\varrho^2}+Gl_4\right)$$

und erhalten damit die folgenden Umformungen von (2):

$$\tan\frac{\Delta\mathfrak{a}}{2} = -\frac{\Delta x}{2\varrho}\,\frac{y}{\varrho}\left(1-\frac{y^2}{6\varrho^2}+\frac{u^2}{12\varrho^2}+\frac{v^2}{8\varrho^2}+Gl_4\right) \quad (3)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} &= -\varrho''\,\frac{\Delta x}{\varrho}\,\frac{y}{\varrho}\left(1-\frac{y^2}{6\varrho^2}+\frac{u^2}{12\varrho^2}+\frac{v^2}{8\varrho^2}+Gl_4\right) \\ \Delta x &\doteq x_2-x_1 \qquad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2) \\ \mathfrak{a}_{2.1} &= \mathfrak{a}_{1.2}+180^0+\Delta\mathfrak{a}\,. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die Zulässigkeit dieser Entwicklung bleibt ebenso wie diejenige der (8) im vorigen Paragraphen für kleine Werte σ und η im Betrage von Gröfsen 1. Ordnung aufser Zweifel.

Eliminiert man Δx und y_2 (auch insofern es in y vorkommt) mittelst (4) und (7) des vorigen Paragraphen, so folgt endlich noch:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = -\varrho''\,\frac{u}{\varrho}\left\{\left(\frac{y_1}{\varrho}+\frac{v}{2\varrho}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{y_1}{\varrho}+\frac{v}{4\varrho}\right)\frac{5v^2-u^2}{6\varrho^2}+\left(\frac{y_1}{3\varrho}+\frac{v}{\varrho}\right)\frac{y_1^2}{\varrho^2}+Gl_5\right\}\cdot \quad (5)$$

§ 4. **Numerischer Betrag der höhern Glieder.** Sieht man von der Krümmung der Kugel ab, so ist

$$(x_2-x_1)=u;\quad (y_2-y_1)=v;\quad \Delta\mathfrak{a}=\text{null}.$$

Für sehr kleine Bezirke darf in der That nach diesen Relationen gerechnet werden. Um nun genauer zu erfahren, bis zu welcher Ausdehnung man alle höhern Glieder vernachlässigen darf, nehmen wir eine Schätzung vor. In y_2-y_1 ist das gröfste vernachlässigte Glied nach (8) S. 118 gleich $\frac{u^2}{2\varrho^2}\left(y_1+\frac{1}{3}v\right)$, in x_2-x_1 ist es $u\left(\frac{y_1^2}{2\varrho^2}-\frac{v^2}{6\varrho^2}\right)$. Setzen wir nun den Maximalwert von Dreiecksseiten *und* Ordinaten

gleich s, so sind diese Glieder beide kleiner als $\frac{1}{2}\frac{s^3}{\varrho^2}$. Halten wir dies als Grenzwert fest und nehmen den letzteren $< 0{,}001^m$, so folgt als Bedingung

$$\frac{1}{2}\frac{s^3}{\varrho^2} < 0{,}001^m$$

und für $\varrho = 6370000$ hieraus $\frac{s}{\varrho} < \frac{1}{1500}$ rund oder

$$s < 4^{km}. \tag{1}$$

Für diesen Betrag von $(x_2 - x_1)$ und y wird das Glied 2. Ordnung in $\Delta\mathfrak{a}$ nach Formel (4) S. 119 gleich 0,1″, ein bei so kleinen Distanzen zu vernachlässigender Betrag. Dies führt zu dem Satze:

Die rechtwinkligen Koordinaten auf der Kugel können als ebene Koordinaten bis auf den Millimeter genau berechnet werden, so lange die größten Längen der Seiten und Ordinaten ca. 4^{km} nicht wesentlich überschreiten.

In Bezug auf die Glieder 5. Ordnung in $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ nach (8) S. 118 findet sich zunächst, daſs die darin vorkommenden Produkte $u^2v^2 = \frac{1}{4}\,s^4 \sin 2\mathfrak{a}_{1.2}$ und $u^2v = s^3 \cos^2 \mathfrak{a}_{1.2} \sin \mathfrak{a}_{1.2}$ wie die Differentiation nach $\mathfrak{a}_{1.2}$ zeigt, die Maximalwerte $0{,}25s^4$ und $0{,}38s^3$ erlangen können. Nehmen wir als Maximalwert der Ordinaten ebenfalls s wie für die Seiten und vernachlässigen in $y_2 - y_1$ das Glied mit dem Faktor $\frac{1}{24}$, in $x_2 - x_1$ die negativen Glieder, so folgt als Maximalbetrag der Glieder 5. Ordnung rund $0{,}4s^5 : \varrho^4$. Setzen wir nun

$$0{,}4\,\frac{s^5}{\varrho^4} < 0{,}001^m,$$

so wird für $\varrho = 6370000$ hiernach $\frac{s}{\varrho} < \frac{1}{75}$ rund oder

$$s < 100^{km}. \tag{2}$$

Für diesen Betrag werden die Glieder 4. Ordnung von $\Delta\mathfrak{a}$ nach (4) S. 119 sicher $< 0{,}002''$, was völlig ausreicht und der Genauigkeit von $y_2 - y_1$ und $x_2 - x_1$ entspricht, da $0{,}002''$ auf 100^{km} $0{,}001^m$ Verschiebung geben.

Die Glieder 3. Ordnung in $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ und diejenigen 2. Ordnung in $\Delta\mathfrak{a}$ genügen daher zu einer Genauigkeit auf $0{,}001^m$, so lange die Dreiecksseiten und Ordinaten $< 100^{km}$ bleiben.

Aus Tafel (5) S. 95 läſst sich nun ersehen, daſs bei der Berechnung eines sphärischen Dreiecks als ebenes Dreieck mit denselben Seiten die Glieder 2. und 4. Ordnung (1. und 2. Glied) in den Winkel-

reduktionen bis zu mittleren Seitenlängen von demselben Betrage vernachlässigt werden dürfen, wie (1) und (2) festsetzen. Man kann hieraus schliefsen, dafs die Mitnahme der Glieder bis zur 5. Ordnung incl. in den Formeln für $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ und $\Delta\mathfrak{a}$ ebenso lange ausreichen wird, als diejenige der 6. Ordnung incl. (3. Glied) in jenen Winkelreduktionen, d. i. also bis zu Dimensionen von ca. 600^{km}. Dies wird aus dem folgenden Paragraphen noch schärfer hervortreten.

§ 5. **Anderer Entwicklungsgang.** *Zachariae* entwickelt in seinem Werke: *Die geodätischen Hauptpunkte*, die Formeln für rechtwinklige sphärische Koordinaten mittelst des *Legendre*schen Satzes, indem er ein Hilfsdreieck konstruiert, von welchem P_1 und P_2 2 Ecken sind, die dritte aber durch einen Punkt mit den Koordinaten x_2 und y_1 gegeben ist; die 3 Seiten sind also σ, $\eta_2 - \eta_1$ und ein gröfster Kreisbogen durch P_1 und den Punkt (x_2, y_1). Die Formeln werden dann:

$$x_2 - x_1 = s \cos\left(\mathfrak{a}_{1.2} - 2(E + \varepsilon)\right) \cdot \left(1 + \frac{y_1^2}{2\varrho^2}\right) + \varrho G l_5$$

$$y_2 - y_1 = s \sin\left(\mathfrak{a}_{1.2} - (E + \varepsilon)\right) + \varrho G l_5$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{E} = \frac{1}{2}\varrho'' \frac{u y_1}{\varrho^2}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \frac{1}{6}\varrho'' \frac{u v}{\varrho^2}$$

$$\Delta\mathfrak{a} = -(2E + 3\varepsilon),$$

übereinstimmend mit den hier gegebenen Entwicklungen. Die Bedeutung von $2E$ und 3ε als sphärischer Excesse eines Vierecks und eines Dreiecks springt in die Augen.

§ 6. **Distanz und Richtungswinkel aus den Koordinaten.** Mittelst der Formeln (8) S. 118 hat man in successiver Annäherung, $x_2 - x_1 = \Delta x$, $y_2 - y_1 = \Delta y$ gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} u &= \Delta x + \varrho G l_3 \\ v &= \Delta y + \varrho G l_3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \Delta x\left(1 - \frac{y_1^2}{2\varrho^2} - \frac{y_1 \Delta y}{\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{3\varrho^2}\right) + \varrho G l_5 \\ v &= \Delta y + \left(y_1 + \frac{\Delta y}{3}\right)\frac{\Delta x^2}{2\varrho^2} + \varrho G l_5. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Aus der 2. Formel (8) S. 118 folgt nach Division beider Seiten durch den Faktor von u:

$$u = \Delta x \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{6\varrho^2} \right) \\ + \left(\frac{y_2^4}{24\varrho^2} - \frac{y_2^2 v^2}{12\varrho^2} + \frac{7 v^4}{360\varrho^4} \right) - \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{5\varrho^2} \right) \frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} \end{array} \right\} + \varrho\, Gl_7 .$$

Setzt man hierin für v in den Gliedern 3. und 5. Ordnung den Ausdruck (2) bezw. (1), so findet sich:

$$\left. \begin{array}{l} u = \Delta x \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{6\varrho^2} \right) \\ + \left(\frac{y_2^4}{24\varrho^4} - \frac{y_2^2 \Delta y^2}{12\varrho^4} + \frac{7\Delta y^4}{360\varrho^4} \right) - \left(\frac{y_1 y_2}{2\varrho^2} + \frac{2\Delta y^2}{15\varrho^2} \right) \frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} \end{array} \right\} + \varrho\, Gl_7 ; \\ \qquad\qquad u = s \cos \mathfrak{a}_{1.2} . \end{array} \right\} \quad (3)$$

Führt man ferner die Ausdrücke (2) für u und v in die Glieder 3. Ordnung der 1. Formel (8) auf S. 118 ein, in die Glieder 5. Ordnung daselbst aber die Ausdrücke (1), so ergiebt sich nach einfacher Reduktion:

$$\left. \begin{array}{l} v = \Delta y + \left(y_1 + \frac{1}{3} \Delta y \right) \frac{\Delta x^2}{2\varrho^2} \\ \quad - \left\{ \left(y_1 + 2\Delta y \right) \frac{y_1^2}{\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{2}{15} \Delta y \right) \frac{\Delta y^2}{\varrho^2} \right\} \frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{7}{15} \Delta y \right) \frac{\Delta x^4}{24\varrho^4} + \varrho\, Gl_7 ; \\ \qquad\qquad v = s \sin \mathfrak{a}_{1.2} \\ \qquad \Delta y = y_2 - y_1 \qquad \Delta x = x_2 - x_1 . \end{array} \right\} \quad (4)$$

Diese und die vorige Formel geben ein Mittel zur Berechnung von s und $\mathfrak{a}_{1.2}$ und die Formel (4) S. 119 giebt dann noch $\mathfrak{a}_{2.1}$, welches aber auch durch vorstehende beiden Formeln nach erfolgter Vertauschung der beiden Punkte bestimmt werden kann.

Aus den Formeln für u und v kann man auch noch Formeln für s^2 und $\tan \mathfrak{a}_{1.2}$ ableiten, von denen aber nur erstere bequem ist. Substituiert man die Ausdrücke für u und v in die Gleichung $s^2 = u^2 + v^2$, so findet sich, wenn man $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ und $\Delta y = y_2 - y_1$ anstatt y_1 und y_2 zu weiterer Abkürzung der Formel einführt:

$$\left. \begin{array}{l} s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 - \left(\frac{y^2}{\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{12\varrho^2} \right) \Delta x^2 \\ \quad + \left(\frac{y^4}{3\varrho^4} - \frac{y^2 \Delta y^2}{6\varrho^4} - \frac{\Delta y^4}{720\varrho^4} \right) \Delta x^2 - \left(\frac{y^2}{12\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{720\varrho^2} \right) \frac{\Delta x^4}{\varrho^2} + \varrho^2 Gl_8 . \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Einige Vereinfachung der Formeln (3) und (4) würde sich wahrscheinlich noch erzielen lassen, wenn man ausgehend von den *Gaußischen*

Gleichungen anstatt der zu beiden Punkten unsymmetrischen Gröfsen $\cos \mathfrak{a}_{1.2}$ und $\sin \mathfrak{a}_{1.2}$ die symmetrischen $s \cos\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)$ und $s \sin\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)$ berechnen wollte. Indessen ziehen wir obige Formeln vor, insofern sie im oben angedeuteten Sinne eine Kontrolle gestatten, und begnügen uns, die erwähnten Ausdrücke nur bis auf die 5. Ordnung genau mittelst der bereits entwickelten Formeln herzustellen.

Zunächst ist in einfacher Entwicklung:

$$s \cos\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{\Delta\mathfrak{a}}{2}\right) = u - v\frac{\Delta\mathfrak{a}}{2} + \varrho Gl_5$$

$$s \sin\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{\Delta\mathfrak{a}}{2}\right) = v + u\frac{\Delta\mathfrak{a}}{2} + \varrho Gl_5.$$

Hieraus resultiert nach Substitution der Ausdrücke für u und v, sowie für $\Delta\mathfrak{a}$:

$$\left.\begin{aligned} s \cos\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{\Delta\mathfrak{a}}{2}\right) &= \Delta x\left(1 - \frac{y^2}{2\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{24\varrho^2}\right) + \varrho Gl_5 \\ s \sin\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{\Delta\mathfrak{a}}{2}\right) &= \Delta y\left(1 - \frac{\Delta x^2}{12\varrho^2}\right) + \varrho Gl_5 \\ \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} &= -\varrho''\frac{\Delta x}{\varrho}\frac{y}{\varrho} + Gl_4. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§ 7. **Übertragung geographischer Länge und Breite mittelst horizontaler Entfernung und Azimut.** Auf der Kugeloberfläche denken wir uns, insofern sie die mathematische Erdoberfläche repräsentirt, nach S. 7 einen gröfsten Kreis und seine 2 Pole bezw. als Äquator und Nord- und Südpol angenommen, ferner einen Meridian als 1. Meridian gewählt und das Koordinatensystem der geographischen Breiten und Längen eingeführt.

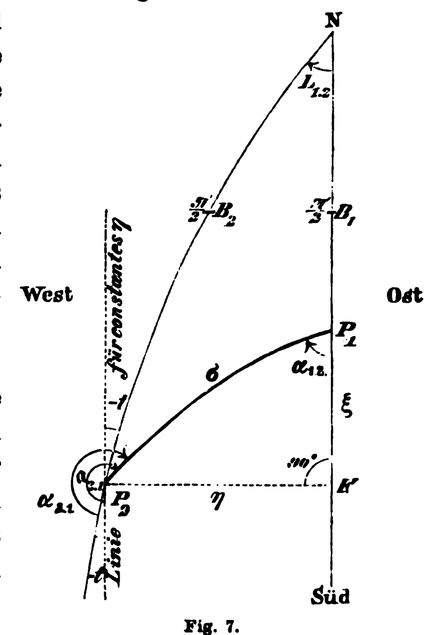


Fig. 7.

Den Meridian eines durch seine geographische Breite gegebenen Ausgangspunktes P_1 nehmen wir für den Augenblick als 1. Meridian und zählen von demselben aus Längenunterschiede in demselben Drehungssinne wie Azimute von seinem südlich von P_1 gelegenen Teile aus. In der Fig. 7 ist die Längendifferenz $L_{1.2}$ ostwestlich, das Azimut $\alpha_{1.2}$ südwestlich gezählt. Der Kugelradius dient als Längeneinheit.

Die Auflösung des Dreiecks zwischen Nordpol N, P_1 und P_2 kann mittelst der *Gaufs*ischen Gleichungen geschehen. Dieses übergehend, wenden wir uns sogleich zu einer andern von *Gaufs* gegebenen Methode, welche für kleine σ vorteilhaft ist. Hierbei wird zunächst der gröfste Kreis $P_2 F$ rechtwinklig zum 1. Meridian gelegt und das Dreieck $P_1 P_2 F$ aufgelöst. Die Formeln (1) S. 76 geben dazu, wenn die Ecken F, P_1, P_2 als A, B, C und also

$$\left.\begin{array}{ll} A = 90^0 & \alpha = \sigma \\ B = \alpha_{1.2} & \beta = \eta \\ C = 270^0 - \mathfrak{a}_{2.1} = 90^0 - \mathfrak{a}_{1.2} - \Delta\mathfrak{a} & \gamma = \xi \end{array}\right\} \quad (1)$$

genommen werden, nachstehendes System zur Berechnung von η, ξ und $\Delta\mathfrak{a}$, welche letztere Gröfse dieselbe Bedeutung wie bei den rechtwinkligen Koordinaten hat, indem $\alpha_{1.2}$ identisch mit dem Richtungswinkel $\mathfrak{a}_{1.2}$ ist:

$$\left.\begin{array}{r} \sin\eta = \sin\sigma\sin\alpha_{1.2} \\ \cos\eta\sin\xi = \sin\sigma\cos\alpha_{1.2} \\ \cos\eta\cos\xi = \cos\sigma \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\sigma\sin(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a}) = \sin\eta\cos\xi \\ \sin\sigma\cos(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a}) = \sin\xi. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Diese Gleichungen gelten für jede Lage von P_2 gegen P_1, vergleiche den Schlufs des § 2, S. 118. Da ferner val. abs. $\eta < \frac{\pi}{2}$ ist, wird die Auflösung auch ganz bestimmt.

Die (2) sind für die Ermittlung von η und ξ sehr geeignet; die Gleichungen (3) aber, welche $\Delta\mathfrak{a}$ geben, wandelt man mit Rücksicht auf den vorausgesetzten geringen Betrag von σ besser um, indem man sie, sowie die 1. und 2. Formel (2) in die rechte Seite der Identität $\sin\Delta\mathfrak{a} = \sin(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a})\cos\alpha_{1.2} - \cos(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a})\sin\alpha_{1.2}$ substituiert. Dies giebt

$$\sin\Delta\mathfrak{a} = \sin\xi\sin\eta\,\frac{\cos\xi\cos\eta - 1}{\sin^2\sigma} = \sin\xi\sin\eta\,\frac{\cos\sigma - 1}{\sin^2\sigma},$$

woraus endlich folgt, indem man noch für $\sin\eta$ seinen Wert aus (2) setzt:

$$\sin\Delta\mathfrak{a} = -\sin\xi\tan\frac{\sigma}{2}\sin\alpha_{1.2}. \quad (4)$$

Bei beliebig grofsen σ kann diese Formel mit den (3) natürlich nicht konkurrieren; sie gestattet dagegen kleine $\Delta\mathfrak{a}$, die kleinen Werten von σ entsprechen, schärfer zu berechnen.

Dass bei dieser Voraussetzung über σ auch $\Delta\mathfrak{a}$ klein ist und nicht, wie Formel (4) allein zulassen würde, nahe 180° beträgt, zeigen die (3), die mittelst der (2) reduziert, übergehen in:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a}) &= \sin\alpha_{1.2}\cos\xi \\ \cos(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a}) &= \cos\alpha_{1.2}\sec\eta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ist nun σ klein, so sind ξ und η kleine positive oder negative Werte, $\cos\xi$ und $\sec\eta$ mithin nahezu $+1$, und es ist daher $\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a}$ in gleichem Quadranten mit $\mathfrak{a}_{1.2}$ gelegen und wenig von ihm verschieden.

Das grofse rechtwinklige Dreieck zwischen Nordpol N, F und P_2 giebt nunmehr nach dem Formelsystem (1) S. 76, wenn gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} A &= 90^0 & \alpha &= \frac{\pi}{2} - B_2 \\ B &= L_{1.2} & \beta &= \eta \\ C &= 90^0 + t & \gamma &= \frac{\pi}{2} - F \\ t &= \alpha_{2.1} - \mathfrak{a}_{2.1} & F &= B_1 - \xi, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

die nachstehenden Gleichungen zur Bestimmung von B_2, $L_{1.2}$ und t, welche letztere Grösse *Meridiankonvergenz* heifst:

$$\left.\begin{aligned} \sin B_2 &= \cos\eta\sin F \\ \cos B_2\sin L_{1.2} &= \sin\eta \\ \cos B_2\cos L_{1.2} &= \cos\eta\cos F \\ \cos B_2\sin t &= -\sin\eta\sin F \\ \cos B_2\cos t &= \cos F. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Diese Gleichungen gelten ebenso wie die (2) und (3) ganz allgemein und insbesondere auch für negative Werte von η.

Die 2. und 3. der Gleichungen (7) geben $\tan L_{1.2}$, die 4. und 5. $\tan t$, und da $\cos B_2$ positiv ist, so ist $L_{1.2}$ seinem Quadranten nach völlig bestimmt.

Was nun B_2 anlangt, so empfiehlt es sich, weil $F - B_2$ für kleine Werte σ auch klein ist, diese Differenz direkt herzuleiten. Dazu eliminiert man aus der Identität $\sin(F - B_2) = \sin F\cos B_2 - \cos F\sin B_2$ mittelst der 1. und 3. Gleichung (7) die Breite B_2 und erhält zunächst (den Index von L unterdrückend)

$$\sin(F - B_2) = \sin F\cos F\cos\eta\,\frac{1 - \cos L}{\cos L}.$$

Multipliziert man dies rechter Hand mit $\cot L\tan\eta\sec F$, — das ist soviel als 1, — so gelangt man zu der Formel:

$$\sin(F - B_2) = \sin\eta\tan\frac{L_{1.2}}{2}\sin F. \tag{8}$$

Hieraus folgt $F - B_2$ unzweideutig, da bei mäfsigen Distanzen $F - B_2$ ein kleiner positiver oder negativer Wert sein mufs.

Alles zusammengestellt und mit Benutzung einiger einfacher Transformationen erhält man endlich zur Lösung der Aufgabe das Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned} \sin \eta &= \sin \sigma \sin \alpha_{1.2} \\ \tan \xi &= \tan \sigma \cos \alpha_{1.2} \\ F &= B_1 - \xi \\ \tan L_{1.2} &= \tan \eta \sec F = \sin \xi \tan \alpha_{1.2} \sec F \\ \tan t &= - \sin \eta \tan F \\ \sin (F - B_2) &= \sin \eta \tan \frac{L_{1.2}}{2} \sin F = - \tan t \tan \frac{L_{1.2}}{2} \cos F \\ \sin \Delta \mathfrak{a} &= - \tan \eta \tan \frac{\sigma}{2} \cos \alpha_{1.2} = - \sin \xi \tan \frac{\sigma}{2} \sin \alpha_{1.2} \\ \alpha_{2.1} &= \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta \mathfrak{a} + t. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Die zweiten Ausdrücke rechter Hand sind etwas bequemer als die ersten, weil sie $\tan \eta$ und $\sin F$ nicht enthalten und anstatt dessen nur $\sin \xi$ erfordern, welches indes leicht aufzuschlagen ist, da auch ξ gesucht werden mufs. Die Berechnung beider Systeme von Ausdrücken würde einige Kontrolle bieten, die man indes, wie sich später zeigen wird, meist auf andere Art erlangt — ohnehin ist sie keine vollständige.

Bei der Auflösung der (9) werden die S und T der 7ziffrigen Logarithmentafeln gute Dienste leisten, so lange eben solche Tafeln eine ausreichende Genauigkeit gewähren. In andern Fällen wird man meist Reihenentwicklungen vorteilhaft finden, um das direkte Aufschlagen der Logarithmen trigonometrischer Funktionen kleiner Winkel zu umgehen.

§ 8. Reihenentwicklungen zur vorigen Aufgabe. Man hat, wenn η, ξ und F vorläufig als bekannt angesehen werden, aus der 4. Formel (9) sofort:

$$\tan L_{1.2} = \eta \left(1 + \frac{1}{3} \eta^2 + \frac{2}{15} \eta^4 + Gl_6\right) \sec F. \qquad (1)$$

Entwickelt man hieraus $L_{1.2}$ mittelst der Arcustangensreihe (2) S. 29 so folgt:

$$\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = \varrho'' \eta \sec F \left\{ 1 - \frac{1}{3} \eta^2 \tan^2 F + \frac{1}{15} \eta^4 \tan^2 F [3 \tan^2 F + 1] + Gl_6 \right\}. \qquad (2)$$

Dagegen giebt die Einführung von $\tan L_{1.2}$ in die 2. Formel (4) S. 30, $L_{1.2}$ für u gesetzt:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = \log (\varrho'' \eta \sec F) - \frac{1}{3} M \eta^2 \tan^2 F + \frac{1}{90} M \eta^4 \tan^2 F [13 \tan^2 F + 6] + Gl_6. \qquad (3)$$

Was die Brauchbarkeit dieser Entwicklungen anbetrifft, so sieht man leicht, dafs dieselbe für (1) gesichert bleibt, so lange η nur eine Gröfse 1. Ordnung ist. Dagegen fordern (2) und (3), insofern sie Entwicklungen von $L_{1.2}$ sind, dafs dieses eine Gröfse 1. Ordnung sei. Nun ist aber $L_{1.2}$ absolut genommen < val. abs. η sec F. Man erhält somit zu (2) und (3) als Bedingung der Brauchbarkeit: Es mufs η sec F eine kleine Gröfse sein.*)

Die 6. Formel (9) giebt nun ferner durch Einführung von Reihenentwicklungen rechter Hand (den Index von L einstweilen unterdrückt):

$$\sin(F - B_2)$$
$$= \frac{1}{2}\eta L \sin F\left(1 - \frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{120}\eta^4 + Gl_6\right)\left(1 + \frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{120}L^4 + Gl_6\right).$$

Hieraus folgt mit Benutzung von (2) ohne Schwierigkeit:

$$\sin(F - B_2) = \frac{1}{2}\eta^2 \tan F \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{12}\eta^2[3\tan^2 F + 1] \\ + \frac{1}{360}\eta^4[45\tan^4 F + 15\tan^2 F + 1] + Gl_6 \end{array} \right\}$$

Führt man dies endlich in die Arcussinusreihe ein, 1. Formel (2) S. 29, so ergiebt sich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{F - B_2} = \frac{1}{2}\varrho''\eta^2 \tan F \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{12}\eta^2[3\tan^2 F + 1] \\ + \frac{1}{360}\eta^4[45\tan^4 F + 30\tan^2 F + 1] + Gl_6 \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Dagegen giebt die Einführung in die 1. Reihe (4) S. 30 sofort:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \log\left(\frac{1}{2}\varrho''\eta^2 \tan F\right) - \frac{1}{12}M\eta^2[3\tan^2 F + 1]$$
$$+ \frac{1}{1440}M\eta^4[135\tan^4 F + 90\tan^2 F - 1] + Gl_6. \quad (5)$$

Aus der 5. Gleichung (9) wird durch Entwicklung von $\sin\eta$ in eine Reihe und Anwendung der 2. Reihe (2) S. 29 auf den Übergang von $\tan t$ zu t, erhalten:

$$\underset{\text{in Sek.}}{t} = -\varrho''\eta \tan F \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{6}\eta^2[2\tan^2 F + 1] \\ + \frac{1}{120}\eta^4[24\tan^4 F + 20\tan^2 F + 1] + Gl_6 \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Dagegen giebt die Anwendung der 2. Reihe (4) S. 30 die Formel:

*) Auch bei unbeschränkter Fortsetzung gelten diese Entwicklungen nur für Längenunterschiede bis 45°.

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log t} = \log(-\varrho''\eta \tan F) - \frac{1}{6} M\eta^2 [2\tan^2 F + 1] + \frac{1}{180} M\eta^4 [26\tan^4 F + 20\tan^2 F - 1] + Gl_6. \tag{7}$$

Auch diese Entwicklungen (4) bis (7) gewähren eine genügende Konvergenz nur so lange, als $\eta \sec F$ eine kleine Gröfse bleibt.

§ 9. **Fortsetzung.** Um nun jetzt auch noch zu Reihen für η, ξ und $\Delta\mathfrak{a}$ zu gelangen, genügt es in den Formeln (4) und (7) S. 117 und in Formel (5) S. 119 $\eta_1 = 0$ zu setzen. Man hat alsdann:

$$\left.\begin{aligned} u &= s\cos\alpha_{1.2} \\ v &= s\sin\alpha_{1.2} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{v}{\varrho}\left(1 - \frac{u^2}{6\varrho^2} - \frac{u^2v^2}{15\varrho^4} + \frac{u^4}{120\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{\xi} &= \varrho''\frac{u}{\varrho}\left(1 + \frac{v^2}{3\varrho^2} - \frac{u^2v^2}{15\varrho^4} + \frac{2v^4}{15\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} &= -\varrho''\frac{uv}{2\varrho^2}\left(1 + \frac{5v^2 - u^2}{12\varrho^2} + Gl_4\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Es ist aber auch jetzt für die Benutzung von η und ξ bequemer, die logarithmische Form herzustellen. Dazu dient die 1. Reihe (1) § 5 S. 27 und man erhält ohne Schwierigkeit die nachfolgenden, wie die (2) für kleine Werte von $s:\varrho$ brauchbaren Entwicklungen:

$$\left.\begin{aligned} \log\eta &= \log\frac{v}{\varrho} - M\left(\frac{u^2}{6\varrho^2} + \frac{u^2v^2}{15\varrho^4} + \frac{u^4}{180\varrho^4}\right) + Gl_6 \\ \log\underset{\text{in Sek.}}{\xi} &= \log\varrho''\frac{u}{\varrho} + M\left(\frac{v^2}{3\varrho^2} - \frac{u^2v^2}{15\varrho^4} + \frac{7v^4}{90\varrho^4}\right) + Gl_6 \\ \log\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} &= \log\left(-\varrho''\frac{uv}{2\varrho^2}\right) + M\frac{5v^2 - u^2}{12\varrho^2} + Gl_6 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\mathfrak{a} + t.$$

An Stelle der Formeln (3) kann man sich auch der Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten σ, η und ξ nach *Legendres* Satz (unter Berücksichtigung der höhern Glieder) bedienen. Um ebenso genau zu rechnen, wie die (3) es gestatten, sind 2 Annäherungsrechnungen auszuführen.

§ 10. **Gegeben geographische Breite und Länge für 2 Punkte.** Um in diesem Falle Entfernung und Azimute herzuleiten, kann man ebenfalls sich des Systemes rechtwinkliger Koordinaten als Zwischengliedes bedienen. Im Anschlufs an Fig. 7 S. 123 und die Formeln (7) und (9) S. 125 und 126 erhält man leicht:

$$\left.\begin{aligned}\sin\eta &= \cos B_2 \sin L_{1.2}\\ \sin(F - B_2) &= \tan\eta \tan\frac{L_{1.2}}{2}\sin B_2 = \sin^2\frac{L_{1.2}}{2}\sec\eta\sin 2B_2\\ \tan t &= -\sin\eta\sec L_{1.2}\tan B_2 = -\tan L_{1.2}\sin B_2\,.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Die (2) und (4) auf S. 124 geben, wenn η, F und t gefunden sind:

$$\left.\begin{aligned}\sin\sigma\sin\alpha_{1.2} &= \sin\eta\\ \sin\sigma\cos\alpha_{1.2} &= \cos\eta\sin\xi\\ \xi &= B_1 - F\\ \sin\Delta\mathfrak{a} &= -\sin\xi\tan\frac{\sigma}{2}\sin\alpha_{1.2}\\ \alpha_{2.1} &= \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\mathfrak{a} + t\,.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Bei der Anwendung dieser Formeln ist (wie § 7 S. 124) Voraussetzung, dafs σ klein sei. Für beliebige Werte von σ gelten sie zwar noch, verlieren aber ihre Brauchbarkeit zu scharfer Berechnung der unbekannten Gröfsen.

Eine vollständige Kontrolle der Rechnung gewährt eine 2. Auflösung mit Vertauschung der Punkte.

Erscheint bei der Auflösung die Anwendung der Formeln unbequem, weil etwa die S und T nicht genügende Schärfe gestatten, so kann man wieder Reihenentwicklungen vornehmen. Die Formeln (1) geben zunächst durch Entwicklung der rechten Seiten (und mit Unterdrückung des Index von $L_{1.2}$):

$$\begin{aligned}\sin\eta &= L\cos B_2\left(1 - \frac{1}{6}L^2 + \frac{1}{120}L^4 + Gl_6\right)\\ \sin(F - B_2) &= \frac{1}{4}L^2\sin 2B_2\left(1 - \frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{360}L^4 + Gl_6\right)\\ &\times\left(1 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{5}{24}\eta^4 + Gl_6\right)\\ \tan t &= -L\sin B_2\left(1 + \frac{1}{3}L^2 + \frac{2}{15}L^4 + Gl_6\right).\end{aligned}$$

Führt man dies in die Reihen (2) S. 29 ein, so ergiebt sich weiter:

$$\left.\begin{aligned}\eta &= L\cos B_2\left(1 - \frac{1}{6}L^2\sin^2 B_2 - \frac{1}{120}L^4\sin^2 B_2\,[8 - 9\sin^2 B_2] + Gl_6\right)\\ \underset{\text{in Sek.}}{F - B_2} &= \frac{1}{4}\varrho'' L^2\sin 2B_2\left\{\begin{aligned}&1 + \frac{1}{12}L^2\,[5 - 6\sin^2 B_2]\\ &+ \frac{1}{6}L^4\cos^2 B_2\,[1 - 2\sin^2 B_2] + \frac{1}{360}L^4 + Gl_6\end{aligned}\right\}\\ \underset{\text{in Sek.}}{t} &= -\varrho'' L\sin B_2\left\{\begin{aligned}&1 + \frac{1}{3}L^2\cos^2 B_2\\ &+ \frac{1}{15}L^4\cos^2 B_2\,[2 - 3\sin^2 B_2] + Gl_6\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$L = \frac{L_{1.2}\text{ in Sek.}}{\varrho''}\,.$$

Was insbesondere die Entwicklung der 2. dieser Formeln anlangt, so wird dabei als Zwischenglied erhalten:

$$\sin(F - B_2) = \frac{1}{4} L^2 \sin 2B_2 \Big(1 + \frac{1}{12} L^2 [5-6 \sin^2 B_2] + \frac{1}{24} L^4 \cos^2 B_2 [4-9 \sin^2 B_2] + \frac{1}{360} L^4 + Gl_6\Big).$$

Zur logarithmischen Rechnung bequemer findet sich durch Anwendung der (4) S. 30 auf $\sin\eta$, $\sin(F-B_2)$ und $\tan t$:

$$\left.\begin{aligned}
\log\eta &= \log(L\cos B_2) - \frac{1}{6} ML^2 \sin^2 B_2 \\
&\quad - \frac{1}{120} ML^4 \sin^2 B_2 [12-11 \sin^2 B_2] + Gl_6 \\
\log \underset{\text{in Sek.}}{(F-B_2)} &= \log\Big(\frac{1}{4}\varrho'' L^2 \sin 2B_2\Big) + \frac{1}{12} ML^2 [5-6\sin^2 B_2] \\
&\quad + \frac{1}{1440} ML^4 [119-420 \sin^2 B_2 + 300 \sin^4 B_2] + Gl_6 \\
\log \underset{\text{in Sek.}}{t} &= \log(-\varrho'' L \sin B_2) + \frac{1}{8} ML^2 \cos^2 B_2 \\
&\quad + \frac{1}{90} ML^4 \cos^2 B_2 [7-13 \sin^2 B_2] + Gl_6;
\end{aligned}\right\} (4)$$

$$L = \frac{L_{1.2\ \text{in Sek.}}}{\varrho''}.$$

Vorstehende Entwicklungen (3) und (4) gelten sicher und genügen, so lange L nur eine Gröſse 1. Ordnung ist, wie unschwer zu ersehen.

Die den Formeln (2) entsprechenden Reihen entnimmt man nun am einfachsten den Formeln (1) und (2) für v und u S. 122, indem man darin $y_1 = 0 = x_1$ setzt und den Index von y_2 und x_2 unterdrückt. Es ist danach, sicher ausreichend, sobald die (3) und (4) genügen und $s:\varrho$ eine Gröſse 1. Ordnung ist:

$$\left.\begin{aligned}
s \sin\alpha_{1.2} &= \varrho\eta \Big(1 + \frac{1}{6}\xi^2 - \frac{2}{45}\eta^2\xi^2 + \frac{7}{360}\xi^4 + Gl_6\Big) \\
s \cos\alpha_{1.2} &= \varrho\xi \Big(1 - \frac{1}{3}\eta^2 - \frac{2}{45}\eta^2\xi^2 - \frac{1}{45}\eta^4 + Gl_6\Big) \\
\xi &= \frac{(B_1 - F)\ \text{in Sek.}}{\varrho''} \\
\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{A}} &= -\frac{1}{2}\varrho''\xi\eta \Big(1 + \frac{1}{12}(\eta^2+\xi^2) + Gl_4\Big) \\
\alpha_{2.1} &= \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\mathfrak{A} + t,
\end{aligned}\right\} (5)$$

und in logarithmischer Form hieraus:

$$\left.\begin{aligned}
\log(s\sin\alpha_{1.2}) &= \log(\varrho\eta) + \frac{1}{6}M\xi^2 - \frac{2}{45}M\eta^2\xi^2 + \frac{1}{180}M\xi^4 + Gl_6\\
\log(s\cos\alpha_{1.2}) &= \log(\varrho\xi) - \frac{1}{3}M\eta^2 - \frac{2}{45}M\eta^2\xi^2 - \frac{7}{90}M\eta^4 + Gl_6\\
\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} &= \log\left(-\frac{1}{2}\varrho''\xi\eta\right) + \frac{1}{12}M(\eta^2+\xi^2) + Gl_4\,.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

§ 11. Lösung der vorigen Aufgabe mittelst Gaufs' Gleichungen. Wir bezeichnen die beiden gegebenen Punkte wieder mit P_1 und P_2 und wenden die Gleichungen (10) S. 79 an, indem wir substituieren:

$$\left.\begin{matrix}
L_{1.2} \text{ für } A & \sigma \text{ für } \alpha\\
\alpha_{2.1} - 180^0 \;\;\text{„}\;\; B & \frac{\pi}{2} - B_1 \;\;\text{„}\;\; \beta\\
180^0 - \alpha_{1.2} \;\;\text{„}\;\; C & \frac{\pi}{2} - B_2 \;\;\text{„}\;\; \gamma\,.
\end{matrix}\right\}\quad(1)$$

Es ergeben sich dann unmittelbar folgende Formeln zur Bestimmung von $\alpha_{1.2}$, $\alpha_{2.1}$ und σ:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\sigma}{2} &= -\sin\frac{B_2-B_1}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\sigma}{2} &= -\cos\frac{B_2+B_1}{2}\sin\frac{L_{1.2}}{2}\\
\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\sigma}{2} &= +\cos\frac{B_2-B_1}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\sigma}{2} &= +\sin\frac{B_2+B_1}{2}\sin\frac{L_{1.2}}{2}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Hierbei sind von den genannten Formeln nur die oberen Zeichen benutzt, weil die Seiten des Dreiecks bis auf die eine σ immer $< \pi$ sind. σ selbst kann $\gtrless \pi$ genommen werden; in der Regel interessiert aber die kürzere Verbindung $< \pi$ und hiermit ist die Auflösung der (2) eine ganz bestimmte.

Die Anwendung der (2) setzt voraus, dafs die Winkel des Dreiecks (1) positiv zwischen null und 360^0 gelegen sind. Wenn indessen $L_{1.2} > 180^0$ wird, so werden im Falle $\sigma < \pi$ die Ausdrücke (1) für B und C gleichzeitig negativ. Denkt man sich daher zu B und C 360^0 addiert, so ergeben sich doch wieder die Formeln (2). Mithin gelten die (2) allgemein für jede Lage von $P_1\,P_2$.

Setzen wir in vorstehenden Formeln (2) zur Abkürzung ein:

$$\left.\begin{aligned}
B_2 - B_1 = \Delta B \qquad & \frac{B_2+B_1}{2} = B\\
\frac{\alpha_{1.2}+\alpha_{2.1}-180^0}{2} &= \alpha\\
\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 &+ \Delta\alpha\,,
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

wo $\Delta\alpha$ nichts anderes als $\Delta\mathfrak{a} + t$ in der Bezeichnung der vorhergehenden Paragraphen ist, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha\sin\frac{\sigma}{2} &= -\sin\frac{\Delta B}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\sin\alpha\sin\frac{\sigma}{2} &= +\cos B\sin\frac{L_{1.2}}{2}\\
\cos\frac{\Delta\alpha}{2}\cos\frac{\sigma}{2} &= +\cos\frac{\Delta B}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\cos\frac{\sigma}{2} &= -\sin B\sin\frac{L_{1.2}}{2};
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{1.2} &= \alpha - \frac{\Delta\alpha}{2}\\
\alpha_{2.1} &= \alpha + \frac{\Delta\alpha}{2} + 180^0.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Diese Formeln geben eine möglichst scharfe Auflösung, die auch für kleine gegenseitige Entfernungen der Punkte bei Anwendung der Hilfsgröfsen S und T bequem ist.

Gaufs benutzt (in den *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* Teil 1 (1844) S. 33) diese Formeln zu einer indirekten Auflösung der Aufgabe des § 7 dieses Kapitels, S. 123, wobei sehr stark konvergente Reihenentwicklungen entstehen. Wir gehen im Folgenden nur auf diejenigen Reihenentwicklungen ein, welche der Aufgabe dieses Paragraphen entsprechen.

§ 12. **Reihenentwicklungen zur vorigen Aufgabe.** Man hat zunächst aus den (4) die *Nepersche* Analogie:

$$\tan\alpha = -\tan\frac{L_{1.2}}{2}\csc\frac{\Delta B}{2}\cos B.$$

Diese Formel logarithmieren wir und substituieren darin die Reihen (3) S. 29 für $\log\tan\frac{L_{1.2}}{2}$ und $\log\sin\frac{\Delta B}{2}$. Das führt zu der Formel:

$$\left.\begin{aligned}
\log\tan\alpha = \log\left(-\frac{L\cos B}{\Delta B}\right) &+ \frac{1}{24}M[2L^2 + \Delta B^2]\\
&+ \frac{1}{2880}M[14L^4 + \Delta B^4] + Gl_6
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$L = \frac{L_{1.2}\text{ in Sek.}}{\varrho''}\qquad \Delta B = \frac{\Delta B\text{ in Sek.}}{\varrho''}.$$

Hierbei ist $L_{1.2}$ als kleiner positiver oder negativer Wert vorausgesetzt. Zur Bestimmung des Quadranten für α hat man die aus Fig. 7 S. 123 unter Annahme eines kleinen Wertes für $\Delta\alpha$ ersichtliche Bedingung, dafs $\alpha \lessgtr 180^0$ für $\pm L_{1.2}$.

Man erhält nun weiter aus den genannten Formeln (4):

$$\tan\frac{\varDelta\alpha}{2} = -\tan\frac{L_{1.2}}{2}\sin B\sec\frac{\varDelta B}{2}.$$

Rechter Hand setzen wir für $\tan\frac{L_{1.2}}{2}$ die Reihenentwicklung und führen dann den Ausdruck für $\tan\frac{\varDelta\alpha}{2}$ in die 2. Reihe (2) S. 29 ein, womit sich findet:

$$\varDelta\alpha = -Lb\left(1 + \frac{1-b^2}{12}L^2 + \frac{(1-b^2)(2-3b^2)}{240}L^4 + Gl_6\right),$$

wenn $\sin B\sec\frac{\varDelta B}{2}$ vorübergehend mit b bezeichnet wird. Unter Restitution dieses Ausdrucks und zu Logarithmen übergehend, folgt:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\alpha} = \log\left(-\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}}\sin B\sec\frac{\varDelta B}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{12}ML^2\cos B_1\cos B_2\sec^2\frac{\varDelta B}{2}\left(1 - \frac{1}{120}L^2[13\sin^2 B - 7]\right) + Gl_6, \qquad (2)$$

wobei die leicht zu verificierende Identität $1 - b^2 = \cos B_1 \cos B_2 \sec^2\frac{\varDelta B}{2}$ benutzt und im letzten Gliede rechter Hand $b^2 = \sin^2 B + Gl_2$ gesetzt ist.

Die Entwicklungen (1) und (2) sind brauchbar, wenn L und $\varDelta B$ als Gröfsen 1. Ordnung angesehen werden können (die Bedingung, dafs σ klein sei, genügt somit, ebenso wie bei den vorhergehenden Aufgaben, allein noch nicht).

Zur Berechnung von σ und s geben die beiden ersten Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen zur Auswahl die Formeln:

$$\sin\frac{\sigma}{2} = \left(-\cos\frac{L_{1.2}}{2}\sec\alpha\right)\sin\frac{\varDelta B}{2} = (\cos B\csc\alpha)\sin\frac{L_{1.2}}{2}.$$

Beide haben die Gestalt $\sin\frac{\sigma}{2} = p\sin\frac{q}{2}$. Die Anwendung der Sinusreihe auf $\sin\frac{q}{2}$ und der Arcussinusreihe (2) S. 29, bezw. der Reihe für deren Logarithmus, S. 30 (4), auf $\sin\frac{\sigma}{2}$ giebt aber mit Rücksicht auf die Gleichung $s = \sigma\varrho$:

$$\left.\begin{aligned} s &= pq\varrho\left(1 - \frac{1-p^2}{24}q^2 + \frac{(1-p^2)(1-9p^2)}{1920}q^4 + Gl_6\right) \\ \log s &= \log(pq\varrho) - \frac{1}{24}Mq^2[1-p^2]\left(1 + \frac{1}{120}q^2[1+11p^2]\right) + Gl_6. \end{aligned}\right\} (3)$$

Hierbei ist zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} p &= -\cos\frac{L_{1.2}}{2}\sec\alpha & q &= \frac{\varDelta B \text{ in Sek.}}{\varrho''} \\ &\text{oder} \\ p &= \cos B\csc\alpha. & q &= \frac{L_{1.2} \text{ in Sek.}}{\varrho''} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die schärfste Rechnung hat man (wie bei Berechnung einer Hypotenuse aus den Katheten) mittelst des kleinsten p-Wertes.

Wäre $\log \sin \frac{\sigma}{2}$ erwünscht, so würde man die Substitutionen (4) in die Formel

$$\log \sin \frac{\sigma}{2} = \log \frac{pq}{2} - \frac{1}{24} Mq^2 - \frac{1}{2880} Mq^4 + Gl_6 \tag{5}$$

einzuführen haben.

Die Entwicklungen (3) und (5) sind bezüglich ihrer Brauchbarkeit an dieselben Bedingungen wie die (1) und (2) geknüpft.

---

4. Kapitel.

Der vertikale Schnitt und das Sehnendreieck für das abgeplattete Rotationsellipsoid.

§. 1. Abweichung gegenseitiger Vertikalschnitte von einander. Indem wir uns nunmehr zu der Geodäsie auf einer Niveaufläche von der Form des abgeplatteten Rotationsellipsoids spezieller wenden, sei zunächst hervorgehoben, dafs wir *von der Krümmung der Lotlinien absehen*, dafs also in den Fällen, wo Punkte betrachtet werden müssen, die nicht auf der zu grunde gelegten Niveaufläche selbst liegen, auch *deren* Lotrichtungen stets als Normalen dieser Niveaufläche gedacht werden.*)

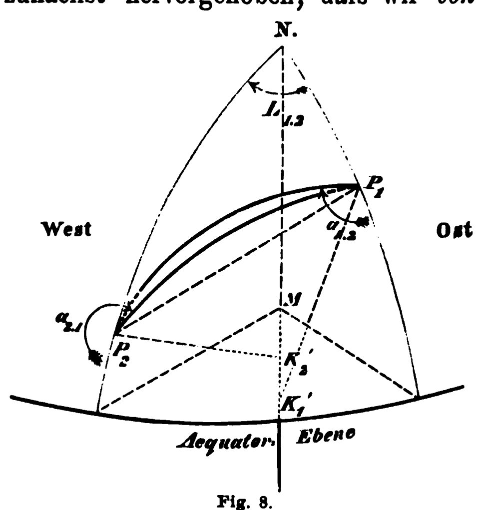


Fig. 8.

Legt man von einem Punkte P_1 eine Vertikalebene, also eine die Lotlinie $P_1 K_1'$ enthaltende Ebene, durch einen andern Punkt P_2 der Oberfläche (Fig. 8), so liegt des letztern Lotlinie $P_2 K_2'$ im allgemeinen nicht in der genannten Vertikalebene, weil die Schnittpunkte K_1' und K_2' der Lotlinien mit der Rotationsaxe im allgemeinen nicht zusammenfallen. Nach S. 41 (9) ist

*) Diese Annahme wird nicht nur in Kapitel 4, sondern auch in allen folgenden Kapiteln, welche die Geodäsie auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid betreffen, beibehalten werden.

$$K_1' K_2' = a_0 c^2 \left(\frac{\sin B_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} - \frac{\sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \right) = a_0 c^2 \frac{\sin \beta_2 - \sin \beta_1}{\sqrt{1 - e^2}},$$

mithin genähert für kurze Distanzen $P_1 P_2$, und $\varDelta B$ als Gröfse 1. Ordnung, c^2 als Gröfse 2. Ordnung genommen:

$$K_1' K_2' = a_0 c^2 (\cos B \sin \varDelta B + Gl_3) \tag{1}$$

für

$$\varDelta B = B_2 - B_1 \qquad B = \frac{1}{2}(B_2 + B_1). \tag{2}$$

Haben beide Punkte gleiche geographische Breite B, so fallen die beiden Punkte K_1' und K_2' zusammen; alsdann haben P_1 und P_2 auch eine gemeinsame Vertikalebene. Ebenso ist dies der Fall, wenn sie in einem und demselben Meridian liegen. In allen andern Fällen erzeugen aber die von einander abweichenden Vertikalebenen von P_1 nach P_2 und von P_2 nach P_1 auf der Oberfläche *zwei Vertikalschnitte*, die in P_1 und P_2 sich unter kleinen Winkeln schneiden.

Zeigt sich nun bereits hier ein wesentlicher Unterschied gegen die Kugel, so bemerkt man sogleich einen andern, wenn man sich die Punkte P_1 und P_2 in ihren Lotlinien emporgehoben denkt; dann tritt P_2 aus der Vertikalebene von P_1 nach der Anfangslage von P_2, und P_1 aus derjenigen von P_2 nach der Anfangslage von P_1 heraus. Oder mit andern Worten:

Die Höhe des Objekts über der zu grunde gelegten Niveaufläche hat einen Einflufs auf die astronomischen Azimute der Vertikalebenen (S. 7) und also auch auf die Horizontalwinkel.

§. 2. **Gleichung des Ellipsoids und des Vertikalschnitts.** Dieselbe lautet in rechtwinkligen Koordinaten, bezogen auf den Mittelpunkt als Ursprung und die Rotationsaxe als z-Axe:

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{a_0^2} + \frac{z^2}{a_0^2 (1 - e^2)} = 1. \tag{1}$$

Denken wir uns nun die Meridianebene von P_1 als xz-Ebene, in 90^0 westlichem Längenunterschied dazu die yz-Ebene und nehmen positive z nach Norden, dann folgt mit Rücksicht auf die Formeln des § 2 S. 39 und mit Beachtung von Fig. 8:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_0 \cos \beta_1 = \frac{a_0 \cos B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= b_0 \sin \beta_1 = \frac{a_0 (1 - e^2) \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= a_0 \cos\beta_2 \cos L_{1.2} = \frac{a_0 \cos B_2 \cos L_{1.2}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} \\ y_2 &= a_0 \cos\beta_2 \sin L_{1.2} = \frac{a_0 \cos B_2 \sin L_{1.2}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} \\ z_2 &= b_0 \sin\beta_2 \qquad\quad = \frac{a_0 (1 - e^2) \sin B_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Bezüglich der Bildung von x_2 und y_2 ist zu bemerken, dafs $a_0 \cos\beta_2$ (d. i. das x auf S. 40) in der Äquatorebene gegen die x-Axe die Neigung $L_{1.2}$ besitzt.

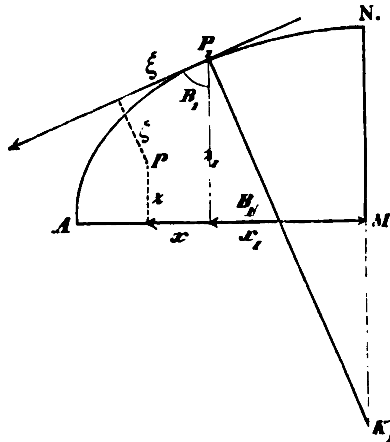


Fig. 9. Projektion auf die xz-Ebene.

Wir denken uns ferner in der xz-Ebene, wie es Fig. 9 zeigt, eine Axe der ξ als Tangente der Meridiankurve, positiv nach Süden, und normal dazu, also in der Richtung der Lotlinie, eine Axe der ζ, positiv nach dem Innern des Ellipsoids. Legen wir endlich eine Axe der η durch P_1 parallel zur y-Axe, so ergeben sich für einen beliebigen Punkt P des Raumes folgende Relationen zwischen den Koordinaten xyz und $\xi\eta\zeta$:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (x - x_1) \sin B_1 - (z - z_1) \cos B_1 \\ \eta &= y \\ \zeta &= -(x - x_1) \cos B_1 - (z - z_1) \sin B_1 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \xi \sin B_1 - \zeta \cos B_1 \\ y &= \eta \\ z &= z_1 - \xi \cos B_1 - \zeta \sin B_1, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

wie man leicht durch Projektion auf die verschiedenen Axen findet.

Substituiert man die (5) in die Gleichung (1), so geht sie über in:

$$\xi^2(1 - e^2 \sin^2 B_1) + \eta^2(1 - e^2) + \zeta^2(1 - e^2 \cos^2 B_1) + 2\xi\zeta e^2 \sin B_1 \cos B_1$$
$$+ 2\xi\left(x_1(1 - e^2)\sin B_1 - z_1 \cos B_1\right) - 2\zeta\left(x_1(1 - e^2)\cos B_1 + z_1 \sin B_1\right)$$
$$= a_0^2 (1 - e^2) - x_1^2 (1 - e^2) - z_1^2,$$

was sich mit Rücksicht auf die (2) wesentlich vereinfacht, wie folgt:

$$\xi^2 (1 - e^2 \sin^2 B_1) + \eta^2 (1 - e^2) + \zeta^2 (1 - e^2 \cos^2 B_1)$$
$$+ 2\xi\zeta e^2 \sin B_1 \cos B_1 - 2\zeta \frac{a_0 (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} = 0. \qquad (6)$$

Setzt man hierin wie S. 58 für ξ und η die Ausdrücke in Polarkoordinaten:

$$\xi = \vartheta \cos \alpha \qquad \eta = \vartheta \sin \alpha, \tag{7}$$

so ergiebt sich, falls α konstant bleibt, eine Gleichung zwischen ϑ und ζ allein, *die Gleichung des Vertikalschnittes*, welcher von P_1 im Azimut α ausgeht:

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta^2 (1 - e^2 + e^2 \cos^2 B_1 \cos^2 \alpha) + \zeta^2 (1 - e^2 \cos^2 B_1) \\ + 2\vartheta\zeta e^2 \sin B_1 \cos B_1 \cos \alpha - 2\zeta \dfrac{a_0 (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \end{array}\right\} = 0. \tag{8}$$

Diese Schnittkurve ist eine Ellipse, weil die Gleichung vom 2. Grade und die Kurve geschlossen ist; die kleine Axe liegt in derjenigen Meridianebene, welche normal zur Schnittebene steht und die grofse Axe liegt in der Äquatorebene, wie mit Rücksicht darauf folgt, dafs jene Meridianebene des Rotationsellipsoids und ebenso die Äquatorebene Symmetrieebenen sind, die grofse Axe aber jedenfalls nur in der Äquatorebene liegen kann.

Die Meridianebene, welche normal zur Schnittebene steht, ist auch die Ebene des *Neigungswinkels der Rotationsaxe zur Schnittebene*, den wir mit $90^0 - U$ bezeichnen.

Um denselben zu ermitteln, denken wir uns um K_1' eine Kugel vom Radius 1 gelegt und zu allen interessierenden Linien Parallelen durch K_1' gezogen. Dann geben die gröfsten Kreisbögen zwischen den Durchschnitten der Linien durch K_1' mit der Kugeloberfläche die Neigungswinkel der Linien an. Fig. 10 zeigt die entstehende Figur auf der Kugelfläche. N entspricht dem nördlichen Teile der Rotationsaxe, P_1 der Lotlinie von P_1, NP_1 der Meridianebene durch P_1, $P_0P_1P_2$ der Vertikalebene P_1P_2 und NP_0 derjenigen Meridianebene, welche normal zu jener steht.

Fig. 10.

Das sphärische Dreieck NP_0P_1 ist in P_0 rechtwinklig. Der Winkel bei P_1, das astronomische Azimut der Vertikalebene von P_1 nach P_2, soll jetzt mit $a_{1.2}$ bezeichnet werden. Man hat dann nach dem Sinussatz

$$\cos U = \cos B_1 \sin a_{1.2}. \tag{9}$$

Auf die Rektifikation der Bogenlänge gehen wir hier nicht ein, da wir dieselbe später, für den beabsichtigten Zweck besser passend, mit der

Sehne in Beziehung bringen werden. (Vgl. überdies über die Rektifikation *Hansen, Geodät. Untersuchungen* S. 66.)

Hier notieren wir nur noch die Gleichung des Vertikalschnitts, dargestellt mittelst der Polarkoordinaten $K_1' P = r$ und $\sphericalangle \binom{P_0 P}{K_1'} = \Theta$; sie lautet:

$$r^2 (1 - e^2 + e^2 \cos^2 U \cos^2 \Theta) - r \frac{2 a_0 e^2 \cos U \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \cos \Theta = \frac{a_0^2 (1 - e^2 - e^2 \sin^2 B_1)}{1 - e^2 \sin^2 B_1},$$

wie man durch die folgenden Substitutionen aus (8) herleiten kann:

$$\vartheta = r \sin (\Theta - \Theta_1) \text{ und } \zeta = \left(\frac{a_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} - r \cos (\Theta - \Theta_1)\right).$$

§ 3. **Das astronomische Azimut als Funktion der geographischen Positionen.** Für die Vertikalebene von P_1 nach P_2 ist das astronomische Azimut $a_{1.2}$ durch die Formeln gegeben (vergl. (7) und (4) des vorigen Paragraphen):

$$\left.\begin{aligned} \cot a_{1.2} &= \frac{\xi_2}{\eta_2} \\ \xi_2 &= (x_2 - x_1) \sin B_1 - (z_2 - z_1) \cos B_1 \\ \eta_2 &= y_2, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei man für x_1, z_1, x_2, y_2 und z_2 noch die Formeln (2) und (3) des vorigen Paragraphen zu benutzen hat.

Wendet man die Ausdrücke an, welche die *reduzierten* Breiten enthalten, so ergiebt sich:

$$\cot a_{1.2} = \frac{(\cos \beta_2 \cos L_{1.2} - \cos \beta_1) \sin B_1 - (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \cos B_1 \sqrt{1 - e^2}}{\cos \beta_2 \sin L_{1.2}}.$$

Wird hierin

$$\sin B_1 = \sin \beta_1 : \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}$$

und

$$\cos B_1 = \cos \beta_1 \sqrt{1 - e^2} : \sqrt{1 - e^2 \cos \beta_1}$$

gesetzt, S. 40 (5), so geht dieser Ausdruck über in:

$$\cot a_{1.2} = \frac{(\cos \beta_2 \sin \beta_1 \cos L_{1.2} - \sin \beta_2 \cos \beta_1) + 2 e^2 \sin \frac{\Delta \beta}{2} \cos \beta \cos \beta_1}{\cos \beta_2 \sin L_{1.2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}}, \quad (2)$$

$$\Delta \beta = \beta_2 - \beta_1; \qquad \beta = \frac{1}{2} (\beta_2 + \beta_1). \quad (3)$$

Indem wir für $\cos L_{1.2}$ schreiben $\left(1 - 2 \sin^2 \frac{L_{1.2}}{2}\right)$ und $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}$ wie früher mit w_1 bezeichnen, ergiebt sich folgende zu scharfer Rechnung geeignete Transformation:

$$\cot a_{1.2} = -\frac{1}{w_1} \left\{ \frac{\sin \Delta \beta}{\cos \beta_2 \sin L_{1.2}} \left(1 - e^2 \cos \beta_1 \cos \beta \sec \frac{\Delta \beta}{2}\right) + \sin \beta_1 \tan \frac{L_{1.2}}{2} \right\}. \quad (4)$$

Für $a_{2.1}$, d. i. das astronomische Azimut des Vertikalschnitts von P_2 nach P_1, bedarf es einer besondern Formel nicht, denn es geht $\cot a_{2.1}$ aus $\cot a_{1.2}$ hervor, wenn man der Vertauschung der Punkte entsprechend die Indices 1 und 2 mit einander vertauscht und daher, wenn $\Delta\beta$ immer noch $\beta_2 - \beta_1$ bedeuten soll, es negativ nimmt. Auch kann man noch hervorheben, dafs

$$L_{2.1} = - L_{1.2}.$$

Wir geben nunmehr den Ausdruck für $\cot a_{1.2}$ mittelst *geographischer* Breiten. Derselbe läfst sich am bequemsten direkt durch Substitution der passenden Werte für die x, y und z in die Gleichung (1) herstellen. Es findet sich:

$$\cot a_{1.2} = \frac{(\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1) + e^2 \cos B_1 \left(\sin B_2 - \sin B_1 \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \right)}{\cos B_2 \sin L_{1.2}}, \quad (5)$$

und hieraus geeigneter zu scharfer Rechnung und mittelst Einführung von W für $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$:

$$\cot a_{1.2} = -\left\{ \frac{\sin \Delta B}{\sin L_{1.2} \cos B_2} + \sin B_1 \tan \frac{L_{1.2}}{2} + \frac{e^2 \cos B_1}{\sin L_{1.2} \cos B_2} \left(\sin B_1 \frac{W_2}{W_1} - \sin B_2 \right) \right\} \cdot (6)$$

Die Formeln (4) und (6) lassen $a_{1.2}$ um 180^0 unbestimmt, jedoch ist das unwesentlich, weil beide Werte von $a_{1.2}$ dieselbe Vertikalebene bezeichnen. Aufserdem erkennt man ohne weiteres, dafs die Sehne $P_1 P_2$ immer westlich vom Meridian durch P_1 liegt, wenn die *westliche* geographische Länge von P_2 gegen $P_1 < 180^0$ ist; hingegen östlich, wenn sie $> 180^0$ ist.

Demgemäfs wird man setzen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{das südwestl. Azimut } a_{1.2} < 180^0 \text{ für die westliche Länge } L_{1.2} < 180^0 \\ \quad\text{"} \quad\quad \text{"} \quad\quad\quad \text{"} \quad a_{1.2} > 180^0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad\quad \text{"} \quad\quad \text{"} \quad L_{1.2} > 180^0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

§ 4. **Reihenentwicklungen zur vorigen Aufgabe.** Die Formel (6) kann man noch dadurch weiter entwickeln, dafs man das in e^2 multiplizierte Glied in folgender Weise transformiert. Es ist zunächst

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2} = \sqrt{1 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2} \cos (2B_1 + 2\Delta B)}.$$

Löst man den Cosinus auf, so ergiebt eine einfache Reduktion:

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2} = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1} \sqrt{1 - \left\{ \frac{e^2 \sin 2B \sin \Delta B}{1 - e^2 \sin^2 B_1} \right\}}.$$

Die Reihenentwicklung nach dem binomischen Satze giebt hieraus in endlicher Form (2. Formel (3) S. 27 § 4):

$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} = 1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{e^2\sin 2B\sin \varDelta B}{1-e^2\sin^2 B_1}\right\}\left(1+\frac{1}{4}\left\{\div\right\}+\frac{\varkappa}{8(1-\{\div\})}\left\{\div\right\}^2\right), \quad (1)$$

worin $\varkappa$ einen echten Bruch bedeutet. Führt man Vorstehendes in die Formel für $\cot a_{1.2}$ ein und betrachtet e^2 wie bisher als Gröfse 2. Ordnung, so resultiert:

$$\cot a_{1.2} = -\left\{\frac{\sin \varDelta B}{\sin L_{1.2}\cos B_2}\left[\begin{array}{l}1-e^2\cos B_1\cos B\sec\frac{\varDelta B}{2}+Gl_8\\ -\frac{e^4\sin 2B_1\sin 2B}{4(1-e^2\sin^2 B_1)}\left(1+\frac{e^2\sin 2B\sin \varDelta B}{4(1-e^2\sin^2 B_1)}\right)\end{array}\right]+\sin B_1\tan\frac{L_{1.2}}{2}\right\}. \quad (2)$$

Diese Formel giebt stets eine für die Anwendung 10ziffriger Logarithmen ausreichende Schärfe. Es betragen nämlich mit Vernachlässigung einiger Faktoren im Nenner, die jederzeit nahezu 1 geben, die Gl_8 in der eckigen Klammer nur

$$+\frac{1}{32}\varkappa e^8\sin 2B_1\sin^3 2B\sin^2\varDelta B,$$

das ist weniger als 1 : 16000 000000. Der Einflufs auf den Logarithmus der eckigen Klammer ist somit $< M : 16000\,000000$ d. i. nur 2 Einheiten der 11. Decimalstelle.

Ist $\varDelta B$ eine kleine Gröfse 1. Ordnung, so fällt das kleingedruckte Glied in (2) auch noch weg, weil alsdann der kurzen Distanz wegen $a_{1.2}$ nicht so scharf berechnet zu werden braucht, wie für grofse Distanzen.

Die Formel (2) läfst sich mit Vorteil noch weiter umformen, wenn man kleine Werte für $\varDelta B$ und $L_{1.2}$ voraussetzt.

Wir führen in die eckige Parenthese von (2) anstatt B_1 und B eine Breite

$$B' = \frac{3B_1+B_2}{4} = B_1 + \frac{\varDelta B}{4} \quad (3)$$

ein, sodafs zu substituieren ist $B_1 = B' - \frac{\varDelta B}{4}$ und $B = B' + \frac{\varDelta B}{4}$. Löst man dann die betreffenden Cosinus und Sinus auf, so ergiebt sich für die eckige Klammer:

$$\left[\div\right] = 1 - e^2\sec\frac{\varDelta B}{2}\left(\cos^2 B' - \sin^2\frac{\varDelta B}{4}\right) - \frac{e^4}{4}\,\frac{\sin^2 2B' - \sin^2\frac{\varDelta B}{2}}{1-e^2\sin^2 B_1} + Gl_7.$$

Im letzten Nenner rechts kann man für B_1 einfach B' setzen; denn der dabei begangene Fehler ist von der 7. Ordnung. Hiermit und durch einige einfache Reduktionen erhält man:

$$\left[\div\right] = \left(1 - e^2 \cos^2 B' - \frac{e^4}{4} \frac{\sin^2 2B'}{1 - e^2 \sin^2 B'}\right)$$

$$- \frac{e^2}{2} \cos 2B' \left(\sec \frac{\varDelta B}{2} - 1\right) + \frac{e^4}{4} \frac{\sin^2 \dfrac{\varDelta B}{2}}{1 - e^2 \sin^2 B'} + Gl_7 .$$

Das erste dieser Glieder ist in Strenge $(1 - e^2) : W^2$, W für die Breite B'; denn man hat

$$\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 B'} = (1 - e^2) \left(1 + e^2 \sin^2 B' + \frac{e^4 \sin^4 B'}{1 - e^2 \sin^2 B'}\right),$$

woraus sofort jenes 1. Glied folgt. Führt man dies und die Reihen für Secante und Sinus ein, so folgt:

$$\left[\div\right] = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 B'} - \frac{e^2}{2} \cos 2B' \left(\frac{\varDelta B^2}{8} + \frac{5 \varDelta B^4}{384}\right) + \frac{e^4 \varDelta B^2}{16} + Gl_7$$

oder

$$\left[\,:\,\right] = \frac{1 - e^2}{W'^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{16} e^2 \varDelta B^2 \left(\cos 2B' \left[1 + \frac{5}{48} \varDelta B^2\right]\right. \\ \left. - e^2 \sin^2 B' \,[2 + \cos 2B']\right) + Gl_7 \end{array} \right\}, \quad (4)$$

wobei neuerdings nur Glieder 8. Ordnung vernachlässigt worden sind. Für kleine Werte von $\varDelta B$ und $L_{1.2}$ können wir nun ferner setzen, den Index von L unterdrückend:

$$\frac{\sin \varDelta B}{\sin L} = \frac{\varDelta B}{L} \left(1 - \frac{1}{6} \varDelta B^2 + \frac{1}{120} \varDelta B^4 + Gl_6\right) \left(1 + \frac{1}{6} L^2 + \frac{7}{360} L^4 + Gl_6\right).$$

Multipliziert man rechts aus und führt den entstehenden Ausdruck, sowie (4) in (2) ein, so folgt endlich:

$$\left.\begin{array}{l} \cot a_{1.2} = - \dfrac{(1 - e^2)\, \varDelta B}{W'^2 \, L \cos B_2} F - \dfrac{1}{2} L \sin B_1 \left(1 + \dfrac{1}{12} L^2 + \dfrac{1}{120} L^4 + Gl_6\right), \\ \text{wobei} \\ F = \left\{1 - \dfrac{1}{6} [\varDelta B^2 - L^2] \left(1 - \dfrac{1}{60} [3 \varDelta B^2 - 7 L^2]\right) - \dfrac{1}{16} e^2 \varDelta B^2 \cos 2B' + Gl_6\right\} \\ \varDelta B = \dfrac{\varDelta B \text{ in Sek.}}{\varrho''} \qquad L = \dfrac{L_{1.2} \text{ in Sek.}}{\varrho''} . \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die gröfsten hierbei vernachlässigten Glieder sind folgende Glieder 6. Ordnung der geschlungenen Parenthese F:

$$+ \frac{1}{16} e^4 \varDelta B^2 \sin^2 B' \,[2 + \cos 2B'] + \frac{1}{256} e^2 \varDelta B^4 \cos 2B'$$

$$- \frac{1}{96} e^2 \varDelta B^2 L^2 \cos 2B' + \frac{31}{15120} L^6 . \quad (6)$$

Multipliziert man dieselben in M, so ergiebt sich der Einflufs auf den Logarithmus der geschlungenen Parenthese. Den gröfsten Einflufs haben das 1. und 3. Glied. Er ist im Maximum in Einheiten der 7. Decimalstelle des Logarithmus näherungsweise gleich

$$13\,\varDelta B^2 \text{ bezw. } 300\,\varDelta B^2 L^2, \tag{7}$$

sodafs selbst für $\varDelta B = 0{,}1$ und $L = 0{,}1$ erst die 8. Decimalstelle der geschlungenen Parenthese in (5) (und zwar nur allein wegen des 1. Gliedes) um 1 Einheit irrig wird.

Wendet man (5) auf $\varDelta B = 0{,}02$ und $L = 0{,}08$ an, so ist der Fehler des Logarithmus der geschlungenen Parenthese in (5) mit Rücksicht auf alle vernachlässigten Glieder im Maximum 8 Einheiten der 10. Decimalstelle.

§ 5. **Sehne und Azimute aus der geographischen Lage zweier Punkte mittelst Benutzung der reduzierten Breiten.** Bisher wurde angenommen, dafs nur *ein* Azimut zu berechnen sei. Sind aber beide Azimute und auch die Sehne zu ermitteln, so wird man die Formeln zur Berechnung des Azimuts angemessen abändern. Zunächst betrachten wir die Sehne $P_1 P_2 = \mathfrak{k}$. Für diese hat man unmittelbar die Gleichung:

$$\mathfrak{k}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Substituiert man die Ausdrücke der Koordinaten mittelst der reduzierten Breiten nach (2) und (3) S. 135 u. 136, so ergiebt sich hieraus:

$$\mathfrak{k}^2 = a_0^2 \left\{ (\cos\beta_2 \cos L_{1.2} - \cos\beta_1)^2 + \cos^2\beta_2 \sin^2 L_{1.2} + (1-e^2)(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)^2 \right\},$$

was nach einiger Reduktion und insbesondere nach Einführung der halben Winkel übergeht in:

$$\mathfrak{k}^2 = 4a_0^2 \left(\sin^2\frac{\varDelta\beta}{2}\cos^2\frac{L_{1.2}}{2} + \cos^2\beta\,\sin^2\frac{L_{1.2}}{2} - e^2\sin^2\frac{\varDelta\beta}{2}\cos^2\beta\right). \tag{1}$$

Diese Formel wird zur Vermeidung der Rechnung mit vielziffrigen Zahlen zweckmäfsig dadurch transformiert, dafs man setzt:

$$\left.\begin{aligned} -\sin\frac{\varDelta\beta}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2} &= \sin\frac{\sigma'}{2}\cos\alpha' \\ +\cos\beta\,\sin\frac{L_{1.2}}{2} &= \sin\frac{\sigma'}{2}\sin\alpha' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\sin q' = \frac{e}{\sin\frac{\sigma'}{2}}\sin\frac{\varDelta\beta}{2}\cos\beta. \tag{3}$$

Es geht damit die Formel (1) über in die weit einfachere:

$$k = 2a_0 \sin\frac{\sigma'}{2} \cos q'. \tag{4}$$

Die Bedeutung der Hilfsgröfsen a' und σ' ergiebt sich aus der Betrachtung eines sphärischen Dreiecks mit nachstehenden Seiten und Winkeln:

$$\left.\begin{array}{c|c|c} \sigma' & \frac{\pi}{2} - \beta_1 & \frac{\pi}{2} - \beta_2 \\ L_{1.2} & a'_{2.1} - 180^0 & 180^0 - a'_{1.2}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Setzt man nämlich zugleich

$$\left.\begin{array}{l} a'_{2.1} = a'_{1.2} + 180^0 + \varDelta a' \\ \dfrac{a'_{1.2} + a'_{2.1} - 180^0}{2} = a' \end{array}\right\} \tag{6}$$

so geben die *Gaufs*ischen Gleichungen für dieses Dreieck, vergl. S. 131:

$$\left.\begin{array}{l} \cos a' \sin\frac{\sigma'}{2} = - \sin\frac{\varDelta\beta}{2} \cos\frac{L_{1.2}}{2} \\ \sin a' \sin\frac{\sigma'}{2} = + \cos\beta \sin\frac{L_{1.2}}{2} \\ \cos\frac{\varDelta a'}{2} \cos\frac{\sigma'}{2} = + \cos\frac{\varDelta\beta}{2} \cos\frac{L_{1.2}}{2} \\ \sin\frac{\varDelta a'}{2} \cos\frac{\sigma'}{2} = - \sin\beta \sin\frac{L_{1.2}}{2}; \\ \varDelta\beta = \beta_2 - \beta_1 \qquad \beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1) \\ a'_{1.2} = a' - \frac{\varDelta a'}{2} \qquad a'_{2.1} = a' + \frac{\varDelta a'}{2} + 180^0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Denkt man sich hieraus, den (2) entsprechend, σ', aufserdem aber auch noch $a'_{1.2}$ und $a'_{2.1}$ berechnet, so lassen sich nun damit auch die astronomischen Azimute $a_{1.2}$ und $a_{2.1}$ finden. Offenbar nämlich geht die Formel (2) S. 138 in eine Formel für $\cot a'_{1.2}$ über, wenn man $e =$ null setzt. Damit aber läfst sich jene wie folgt reduzieren:

$$\cot a_{1.2} = \frac{\cot a'_{1.2} + 2e^2 \dfrac{\sin\frac{\varDelta\beta}{2} \cos\beta \cos\beta_1}{\sin L_{1.2} \cos\beta_2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta_1}}.$$

Setzen wir den 2. Teil des Zählers gleich $\tan \varepsilon_{1.2}$ und benutzen die Bezeichnung $w_1 = \sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta_1}$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \tan a_{1.2} &= \frac{w_1 \sin a'_{1.2} \cos \varepsilon_{1.2}}{\cos (a'_{1.2} - \varepsilon_{1.2})} \\ \tan \varepsilon_{1.2} &= 2e^2 \frac{\sin \frac{\Delta \beta}{2} \cos \beta \cos \beta_1}{\sin L_{1.2} \cos \beta_2}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Vertauschung der Indices 1 und 2 giebt hieraus, da $L_{2.1} = -L_{1.2}$ ist,

$$\left.\begin{aligned} \tan a_{2.1} &= \frac{w_2 \sin a'_{2.1} \cos \varepsilon_{2.1}}{\cos (a'_{2.1} - \varepsilon_{2.1})} \\ \tan \varepsilon_{2.1} &= 2e^2 \frac{\sin \frac{\Delta \beta}{2} \cos \beta \cos \beta_2}{\sin L_{1.2} \cos \beta_1}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Die gesamte Auflösung ist nunmehr in den Formeln (7), (3), (4), (8) und (9) enthalten. Zu (7) ist noch zu bemerken, dafs man σ' stets $< \pi$ zu nehmen hat, damit die Azimute der Lage der Sehne entsprechen (vergl. S. 139 § 3). Hierdurch wird die Auflösung der (7) eine ganz bestimmte.

Wendet man die Formeln dieses Paragraphen auf 2 Punkte in geringer Entfernung von einander an, so wird es unter Umständen passend erscheinen, an die Formeln (7) Reihenentwicklungen zu knüpfen. Da nun die (7) völlig den (4) S. 132 entsprechen, so kann man mit ganz geringen Änderungen in der Bezeichnung die Formeln des § 12 S. 132 auf vorliegenden Fall übertragen, wobei nun auch Formel (5) daselbst zur Anwendung gelangt.

Die ε, zu deren Bestimmung 7ziffrige Logarithmen (event. unter Anwendung der Hilfslogarithmen T) immer ausreichen dürften, können aber wie oben ermittelt werden, nur wird man in den Ausdrücken für $\tan \varepsilon$ mittelst der ersten beiden Gleichungen (7)

$$\frac{\sin \frac{\Delta \beta}{2}}{\sin L_{1.2}} \text{ ersetzen durch } \left(-\frac{1}{2} \sec^2 \frac{L_{1.2}}{2} \cos \beta \cot a'\right).$$

§ 6. **Sehne und Azimute mittelst der geographischen Breiten und des Längenunterschieds zweier Punkte.** Wir betrachten zunächst das sphärische Hilfsdreieck mit den nachstehenden Seiten und Winkeln:

$$\left.\begin{array}{c|c|c} \sigma' & \frac{\pi}{2} - B_1 & \frac{\pi}{2} - B_2 \\ L_{1.2} & a'_{2.1} - 180^0 & 180^0 - a'_{1.2}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Für dasselbe ergeben sich wie im ähnlichen Falle des vorigen Paragraphen die zur Bestimmung von σ', $a'_{2.1}$ und $a'_{1.2}$ geeigneten Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\cos a' \sin\frac{\sigma'}{2} &= -\sin\frac{\Delta B}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\sin a' \sin\frac{\sigma'}{2} &= +\cos B \sin\frac{L_{1.2}}{2}\\
\cos\frac{\Delta a'}{2}\cos\frac{\sigma'}{2} &= +\cos\frac{\Delta B}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\sin\frac{\Delta a'}{2}\cos\frac{\sigma'}{2} &= -\sin B \sin\frac{L_{1.2}}{2}\\
\Delta B = B_2 - B_1 \qquad & B = \frac{1}{2}(B_2 + B_1)\\
a'_{1.2} = a' - \frac{\Delta a'}{2} \qquad & a'_{2.1} = a' + \frac{\Delta a'}{2} + 180^0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

In diesen Formeln bedeuten $a'_{1.2}$ u. s. f. nicht dieselben Gröfsen wie im vorigen Paragraphen. Dagegen ist $a'_{1.2}$ identisch mit demjenigen Wert von $a_{1.2}$, welchen Formel (6) S. 139 für e^2 = null ergiebt. Man hat daher

$$\cot a_{1.2} = \cot a'_{1.2} + \frac{e^2 \cos B_1}{\sin L_{1.2} \cos B_2}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right). \tag{3}$$

Setzt man den Zusatz zu $\cot a'_{1.2}$ gleich $\tan \varepsilon'_{1.2}$, so folgt leicht für $a_{1.2}$ und zugleich durch Vertauschung der Indices 1 und 2 auch für $a_{2.1}$:

$$\left.\begin{aligned}
\tan a_{1.2} &= \frac{\sin a'_{1.2}\cos\varepsilon'_{1.2}}{\cos(a'_{1.2}-\varepsilon'_{1.2})} \qquad \tan a_{2.1} = \frac{\sin a'_{2.1}\cos\varepsilon'_{2.1}}{\cos(a'_{2.1}-\varepsilon'_{2.1})}\\
\tan\varepsilon'_{1.2} &= \frac{e^2\cos B_1}{\sin L_{1.2}\cos B_2}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right)\\
\tan\varepsilon'_{2.1} &= \frac{e^2\cos B_2}{\sin L_{1.2}\cos B_1}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right)\frac{W_1}{W_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Für die Sehne $\mathfrak{k}$ erhält man ähnlich wie zu Beginn des vorigen Paragraphen die Gleichung:

$$\mathfrak{k}^2 = a_0^2\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\cos B_2 \cos L_{1.2}}{W_2} - \frac{\cos B_1}{W_1}\right)^2 + \left(\frac{\cos B_2 \sin L_{1.2}}{W_2}\right)^2\\ &+ (1-e^2)^2\left(\frac{\sin B_2}{W_2} - \frac{\sin B_1}{W_1}\right)^2\end{aligned}\right\}.$$

Hieraus folgt mit Beachtung des Umstandes, dafs für e = null $\mathfrak{k}^2$ in $4a_0^2 \sin^2\frac{\sigma'}{2}$ übergehen mufs:

$$\mathfrak{k} = 2a_0 \sin\frac{\sigma'}{2}\cos q' : \sqrt{W_1 W_2} \tag{5}$$

$$2\sin\frac{\sigma'}{2}\sin q' = \sqrt{\frac{W_1}{W_2}}\sqrt{e^2(2-e^2)\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right)^2 - \left(1-\frac{W_2}{W_1}\right)^2}\cdot \tag{6}$$

Die letztere Relation für $\sin q'$ schreibt man mit Rücksicht darauf, dafs der 2. Teil im Radikanden unter dem grofsen Wurzelzeichen immer e^4 als Faktor hat, der erste aber nur e^2, während in Bezug auf $\varDelta B$ die Ordnung die gleiche ist, besser wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}\sin q' &= \frac{e\sqrt{2-e^2}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right)}{2\sin\frac{\sigma'}{2}}\sqrt{\frac{W_1}{W_2}}\cos q'' \\ \sin q'' &= \left(1-\frac{W_2}{W_1}\right) : e\sqrt{2-e^2}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right).\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Es kann vorteilhaft sein, einige der Ausdrücke, welche in den obigen Formeln vorkommen, durch Reihen zu berechnen. Nach S. 140 (1) ist aber, und zwar mit einer in allen Fällen, wo zehnziffrige Logarithmen zur Berechnung von $\mathfrak{k}$ genügen, ausreichenden Genauigkeit:

$$1-\frac{W_2}{W_1} = \left\{\frac{e^2\sin 2B\sin\varDelta B}{2W_1^2}\right\}\left(1+\frac{1}{2}\left\{\frac{e^2\sin 2B\sin\varDelta B}{2W_1^2}\right\}+Gl_4\right).$$

Man hat hieraus:

$$\left.\begin{aligned}\log\left(1-\frac{W_2}{W_1}\right) &= \log E + \frac{M}{2}E + Gl_4 \\ E &= \frac{e^2\sin 2B\sin\varDelta B}{2W_1^2}.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Gl_4 haben die 4. Ordnung wegen des Faktors e^4. Da noch der Faktor $\sin^2\varDelta B$ vorhanden ist, erhalten sie die 6. Ordnung für kleine $\varDelta B$. Nach S. 140 (1) folgt nun weiter:

$$\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1 = 2\sin\frac{\varDelta B}{2}\cos B + E\sin B_1\left(1+\frac{1}{2}E+Gl_4\right)$$

und durch Logarithmieren hieraus:

$$\left.\begin{aligned}&\log\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right) \\ &= \log D + \frac{ME}{D}\sin B_1\left(1-\frac{E}{2D}\sin B_1 + \frac{1}{2}E + Gl_4\right), \\ &D = 2\sin\frac{\varDelta B}{2}\cos B,\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wobei jetzt die Gl_4 zum Teil auch für kleine $\varDelta B$ ihre Ordnung nicht ändern, da ihnen der Faktor $\sin^2\varDelta B$ fehlt.

§ 7. **Reihenentwicklungen zur vorigen Aufgabe.** Wir betrachten von jetzt ab $\mathfrak{k}$ als Gröfse 1. Ordnung, sodafs auch σ' und

$\varDelta B$ Gröfsen 1. Ordnung sind, während L beliebig grofs sein kann, insoweit nicht jene Bedingung für k ein kleines L erfordert.

Wir knüpfen an die Formel (3) S. 145 an, wonach man schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned} \cot a_{1.2} &= \cot a'_{1.2} + h \\ h &= \frac{e^2 \cos B_1}{\sin L_{1.2} \cos B_2}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Nach S. 140 (1) und in weiterer Entwicklung nach S. 146 ist aber auch

$$h = \frac{2e^2 \sin\frac{\varDelta B}{2}\cos B \cos B_1}{\sin L_{1.2}\cos B_2}\left\{1 + \frac{e^2 \sin B \sin B_1 \cos\frac{\varDelta B}{2}}{1 - e^2\sin^2 B_1}\left(1 + \frac{e^2 \sin 2B \sin \varDelta B}{4(1 - e^2 \sin^2 B_1)} + Gl_4\right)\right\}, (2)$$

wobei nach S. 140 das Restglied Gl_4 für jeden Wert von $\varDelta B$ unerheblich ist, also umsomehr für Werte $\varDelta B$ im Betrage von Gröfsen 1. Ordnung, weil es dann wegen seines Faktors $\sin^2 \varDelta B$ in Bezug auf die geschlungene Parenthese von (2) die 8. Ordnung hat.

Setzen wir nun im vorstehenden Ausdruck (2)

$$\frac{1}{1 - e^2\sin^2 B_1} = 1 + e^2\sin^2 B_1 + \frac{e^4 \sin^4 B_1}{1 - e^2 \sin^2 B_1},$$

$$\frac{1}{(1 - e^2\sin^2 B_1)^2} = 1 + \frac{e^2 \sin^2 B_1}{1 - e^2\sin^2 B_1} + \frac{e^2 \sin^2 B_1}{(1 - e^2 \sin^2 B_1)^2},$$

ferner zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} 2\cos\frac{\varDelta B}{2}\sin B &= \sin B_2 + \sin B_1 = S \\ 2\sin\frac{\varDelta B}{2}\cos B &= \sin B_2 - \sin B_1 = D \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

und beachten, dafs $\sin \varDelta B \sin 2B = SD$ wird, so ergiebt sich:

$$h = \frac{e^2 D \cos B_1}{\sin L_{1.2}\cos B_2}\left\{\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2}e^2 S \sin B_1 \\ &+ \frac{1}{8}e^4 S \sin B_1 (3\sin^2 B_1 + \sin^2 B_2) + \varkappa_1 e^6 \sin^6 B \end{aligned}\right\}. (4)$$

Dabei zeigt sich deutlich, dafs der in $\varkappa_1 e^6 \sin^6 B$ zusammengefafste Rest ein kleines Glied ist, dessen gröfster Bestandteil

$$\frac{1}{2}e^6 S \sin^5 B_1 : (1 - e^2 \sin^2 B_1)$$

von $e^6 \sin^6 B$ nur unerheblich abweicht, sodafs $\varkappa_1$ sehr nahe gleich 1 ist.

Um mit Hilfe des Vorstehenden jetzt den Unterschied von $\alpha'_{1.2}$ und $\alpha_{1.2}$ herzuleiten, benutzen wir die Entwicklung S. 30 für

$$\cot \alpha_{1.2} = \cot \alpha'_{1.2} + h$$

und erhalten:

$$\alpha_{1.2} = \alpha'_{1.2} - h \sin^2 \alpha'_{1.2} \left\{ 1 - h \sin \alpha'_{1.2} \cos \alpha'_{1.2} - \frac{1}{3} h^2 \sin^2 \alpha'_{1.2} (1 - 4 \cos^2 \alpha'_{1.2}) \right\} + \frac{1}{4} h^4 \sin^4 \alpha''_{1.2} \sin 4 \alpha''_{1.2}, \tag{5}$$

und zwar entspricht im letzten Gliede $\alpha''_{1.2}$ einem Winkel, dessen Cotangente gleich $\cos \alpha'_{1.2} + \vartheta h$ ist, ϑ ein positiver echter Bruch. Das sphärische Dreieck (1) S. 144 giebt aber

$$\sin \alpha'_{1.2} \sin \sigma' = \sin L_{1.2} \cos B_2.$$

Mittelst dieser Relation findet sich:

$$h \sin^2 \alpha'_{1.2} = \frac{e^2 D \cos B_1 \cos B_2 \sin L_{1.2}}{\sin^2 \sigma'}$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2} e^2 S \sin B_1 + \frac{1}{8} e^4 S \sin B_1 (3 \sin^2 B_1 + \sin^2 B_2) + \varkappa_1 e^6 \sin^6 B\right)$$

und

$$h \sin \alpha'_{1.2} = \frac{e^2 D \cos B_1}{\sin \sigma'} \left(1 + \frac{e^2 S}{2} \sin B_1 + \varkappa_2 e^4 \sin^4 B\right),$$

worin $\varkappa_2$ eine Zahl bezeichnet, die wie $\varkappa_1$ sehr nahe gleich 1 ist. Dies giebt in (5) eingesetzt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1.2} = \alpha'_{1.2} - \frac{e^2 D \cos B_1 \cos B_2 \sin L_{1.2}}{\sin^2 \sigma'} \cdot F \\ + \frac{1}{4} h^4 \sin^4 \alpha''_{1.2} \sin 4 \alpha''_{1.2} - \varkappa_{1.2} e^8 \frac{D \cos B_1 \sin \alpha'_{1.2}}{\sin \sigma'}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$F = \left\{ \begin{aligned} & 1 + e^2 \left(\frac{S}{2} \sin B_1 - \frac{D \cos B_1 \cos \alpha'_{1.2}}{\sin \sigma'} \right) + e^4 \left(\frac{S}{8} \sin B_1 (3 \sin^2 B_1 + \sin^2 B_2) \right) \\ & - e^4 \left[\frac{D S \sin B_1 \cos B_1 \cos \alpha'_{1.2}}{\sin \sigma'} + \frac{D^2 \cos^2 B_1 (1 - 4 \cos^2 \alpha'_{1.2})}{3 \sin^2 \sigma'} \right] \end{aligned} \right\}.$$

Dabei sind die Glieder mit e^8 u. s. f., welche von h, h^2 und h^3 herrühren, in den Term vereinigt, welcher $\varkappa_{1.2}$ als Faktor enthält. Dieser Koefficient ist im Maximum rund gleich 1. Nun ist hinreichend genau zur Substitution in die Restglieder $D : \sin \sigma' = \cos B \cos \alpha'$, daher der Maximalwert des in $\varkappa_{1.2}$ multiplizierten Gliedes rund $\frac{1}{2} e^8$.

Um auch das in h^4 multiplizierte Glied zu schätzen, beachten wir zunächst, dafs nach S. 31 $a''_{1.2}$ in hinreichender Annäherung gleich $a'_{1.2}$ oder a' gesetzt werden kann. Setzt man überdies für $D:\sin\sigma'$ den oben angegebenen Wert, so geht das Glied in

$$\frac{1}{4}e^8\cos^8 B\cos^4 a'\sin 4a'$$

über, dessen Maximalwert noch erheblich unter demjenigen des vorher behandelten Restgliedes bleibt.

Die Restglieder 8. Ordnung betragen hiernach im Maximum, in Sekunden ausgedrückt, rund $\frac{1}{2}\varrho'' e^8$ d. i. nur 0,0002″.

Vertauscht man in Formel (6) die Indices 1 und 2, so mufs auch D mit $-D$ und $L_{1.2}$ mit $-L_{1.2}$ vertauscht werden. Subtrahiert man sodann beide Formeln Glied für Glied, so ergiebt sich:

$$a_{2.1}-a_{1.2}=a'_{2.1}-a'_{1.2}-\frac{e^4 D\cos B_1\cos B_2\sin L_{1.2}}{\sin^2\sigma'}(A_1+A_2+A_3), \quad (7)$$

$$A_1=D\left(\frac{S}{2}+\frac{\cos B_2\cos a'_{2.1}+\cos B_1\cos a'_{1.2}}{\sin\sigma'}\right)$$

$$A_2=e^2\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{8}S(3\sin^3 B_2-3\sin^3 B_1+\sin^2 B_1\sin B_2-\sin^2 B_2\sin B_1)\\ &+DS\frac{\sin B_2\cos B_2\cos a'_{2.1}+\sin B_1\cos B_1\cos a'_{1.2}}{\sin\sigma'}\\ &-D^2\frac{\cos^2 B_2-\cos^2 B_1-4\cos^2 B_2\cos^2 a'_{2.1}+4\cos^2 B_1\cos^2 a'_{1.2}}{3\sin^2\sigma'}\end{aligned}\right\},$$

A_1 und A_2 reduzieren wir durch Elimination der a' mittelst der Relationen:

$$\left.\begin{aligned}\cos B_1\cos a'_{1.2}\sin\sigma'&=\cos\sigma'\sin B_1-\sin B_2=-D-2\sin B_1\sin^2\frac{\sigma'}{2}\\ \cos B_2\cos a'_{2.1}\sin\sigma'&=\cos\sigma'\sin B_2-\sin B_1=+D-2\sin B_2\sin^2\frac{\sigma'}{2},\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

zu welchen der Cosinussatz im sphärischen Dreieck führt. Eine längere, jedoch nicht schwierige Rechnung giebt schliefslich:

$$\left.\begin{aligned}A_1&=-\frac{1}{2}DS\tan^2\frac{\sigma'}{2},\\ A_2&=-\frac{1}{2}e^2DS\left((\sin^2 B_1+\sin^2 B_2)\tan^2\frac{\sigma'}{2}+\frac{1}{4}D^2\right).\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Was nun die Gröfse A_3 anlangt, welche aus den Restgliedern in (6) hervorgeht, so ist deren Einflufs auf $a_{2.1}-a_{1.2}$ ohne Zweifel noch weit kleiner als 0,0002″, dem Maximalwert jener Restglieder. Denn sobald $\varDelta B$ eine kleine Gröfse ist, also B_1 und B_2 wenig von einander verschieden sind, werden auch voraussichtlich die Restglieder,

welche nach (6) zu den Formeln für $a_{1.2}$ und $a_{2.1}$ gehören, sich teilweise vernichten müssen. Die Substitution von (9) in (7) giebt nunmehr:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{a_{2.1} - a_{1.2}} &= \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} - a'_{1.2}} \\
+\varrho'' \frac{e^4 D^2 S \cos B_1 \cos B_2 \sin L_{1.2}}{2 \sin^2 \sigma'} &\left(\tan^2\frac{\sigma'}{2} + e^2\left[(\sin^2 B_1 + \sin^2 B_2)\tan^2\frac{\sigma'}{2} + \frac{1}{4}D^2\right] + \ldots\right) \\
D = \sin B_2 - \sin B_1 &= 2 \sin \frac{\varDelta B}{2} \cos B \\
S = \sin B_2 + \sin B_1 &= 2 \cos \frac{\varDelta B}{2} \sin B.
\end{aligned}\right\} (10)$$

§. 8. **Dalbys Satz.** Die Formel (10) zeigt, dafs, wie *Dalby* annahm, für kleine Werte der Distanz die Azimutaldifferenz rein sphärisch berechnet werden darf. Denn das beträchtlichste Glied, welches hierbei vernachlässigt wird, ist nach einfacher Reduktion in Sekunden:

$$+\frac{1}{8}\varrho'' e^4 \sin L_{1.2} \cos B \sin^2 \varDelta B \sec\frac{\varDelta B}{2} \sec^4\frac{\sigma'}{2} \sin 2B \cos B_1 \cos B_2, \quad (1)$$

worin der Wert von $\sin 2B \cos B_1 \cos B_2$, alle B gleich grofs angenommen, im Maximum etwa 0,65 ist; das Glied (1) wird daher im Maximum nahezu gleich

$$\frac{3}{4} \sin^2 \varDelta B \cdot \sin L_{1.2} \cos B \text{ Sek.}$$

Setzt man hierin $\sin L_{1.2} \cos B = \sin \sigma' \sin a'$ und $\sin \varDelta B = \sin \sigma' \cos a'$, was völlig ausreicht, und beachtet den Maximalwert von $\cos^2 a' \sin a'$, welcher rund 0,4 beträgt, so folgt als Maximalwert von (1)

$$0{,}3'' \sin^3 \sigma'. \quad (2)$$

Es ist daher selbst für $\sin \sigma' = 0{,}2$ der Fehler der Formel

$$a_{2.1} - a_{1.2} = a'_{2.1} - a'_{1.2} + \cdots \quad (3)$$

nur einige Tausendstelsekunden. (Übrigens gilt der Ausdruck (2) nur, so lange σ' klein ist. Man darf ihn daher auf wesentlich gröfsere Werte von $\sin \sigma'$ als 0,2 nicht anwenden.)

Die von e^6 abhängigen Glieder in (10) geben nur etwa 1 Prozent des Betrags von (1). Lassen wir sie weg, berücksichtigen aber die in e^4 multiplizierten Glieder nach Formel (1) und setzen darin $\sec\frac{\varDelta B}{2} = 1$, $\sec^4\frac{\sigma'}{2} = 1$ und $\cos B_1 \cos B_2 = \cos^2 B$, wodurch nur Bruchteile 2. Ordnung des Betrags von (1) vernachlässigt werden, so findet sich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{a_{2.1} - a_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} - a'_{1.2}} + \frac{1}{4} \varrho'' \sigma^4 \sin L_{1.2} \sin^2 \Delta B \sin B \cos^4 B + \cdots \tag{4}$$

Diese Formel giebt erst für ΔB und $\sin L_{1.2} \cos B$ gleich 0,2 eine geringfügige Unsicherheit der Zehntausendstelsekunden.

Das *Dalby*sche Problem wird mittelst geometrischer Betrachtung in dem Hauptwerke der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 235 untersucht. Dasselbe besprachen bereits *Ivory* und *Tiark* im *Phil. Magazine* von 1828 (Vol. 4 p. 241, 364 u. 432) und 1829 (Vol. 5 p. 24, 52 u. 106), sowie 1831 *Anger, Astronom. Nachr.* Nr. 212 Bd. 9, S. 359). Neuerdings ist es auch im 3. Bande der *Dänischen Gradmessung* durch *Andrae* untersucht worden, S. 324.

Dalby wandte schon 1790 und 1795 in den *Phil. Transactions* die Formel (3) dazu an, um aus den geographischen Breiten und Azimuten einer geodätischen Linie den Längenunterschied mittelst rein sphärischer Rechnung zu finden, vergl. die 3. und 4. Formel (2) S. 145. Dabei werden noch die für kurze Distanzen geringen und für beide Azimute beinahe gleichen, sich daher aufhebenden Unterschiede der astronomischen Azimute und der Azimute der geodätischen Linie vernachlässigt.

Es sei noch erwähnt, dafs bei Anwendung der reduzierten Breiten ein ähnlicher Satz wie der *Dalby*sche nicht existiert; hier ist die Differenz

$$\{(a_{2.1} - a_{1.2}) - (a'_{2.1} - a'_{1.2})\}$$

von der Ordnung $e^2\sigma'$.

§ 9. Fortsetzung der Entwicklungen für kleine Distanzen.

Nachdem im Vorigen eine Formel für $a_{2.1} - a_{1.2}$ aufgestellt worden ist, liegt es nahe, auch noch eine Formel für $a_{2.1} + a_{1.2}$ herzuleiten. Zu dem Zwecke benutzen wir wieder Formel (6) S. 148, wenden sie wie früher durch Vertauschung der Indices auch auf $a'_{2.1}$ an und addieren beide Formeln. Dann folgt:

$$a_{2.1} + a_{1.2} = a'_{2.1} + a'_{1.2} - \frac{e^2 D \cos B_1 \cos B_2 \sin L_{1.2}}{\sin^2 \sigma'}(2 + e^2 A' + e^4 A'' + Gl_6), \tag{1}$$

wobei die Koefficienten A' und A'' nachstehende Werte annehmen:

$$A' = \frac{1}{2} S^2 + D \frac{\cos B_2 \cos a'_{2.1} - \cos B_1 \cos a'_{1.2}}{\sin \sigma'},$$

$$A'' = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} S \left(3 (\sin^2 B_1 + \sin^2 B_2) + S \sin B_1 \sin B_2\right) \\ + DS \dfrac{\sin B_2 \cos B_2 \cos a'_{2.1} - \sin B_1 \cos B_1 \cos a'_{1.2}}{\sin \sigma'} \\ - D^2 \dfrac{\cos^2 B_1 + \cos^2 B_2 - 4 (\cos^2 B_1 \cos^2 a'_{1.2} + \cos^2 B_2 \cos^2 a'_{2.1})}{3 \sin^2 \sigma'} \end{array} \right\}.$$

Wir benutzen nunmehr die Relationen (8) S. 149, um durch Elimination der cos a' die beiden Hilfsgröfsen A zu vereinfachen. Dabei hat man aufserdem zu beachten, dafs nach (10) S. 150

$$S = 2 \cos \frac{\varDelta B}{2} \sin B \text{ und } D = 2 \sin \frac{\varDelta B}{2} \cos B \tag{2}$$

ist, mit Rücksicht auf die 1. Formel (2) S. 145 aber auch gesetzt werden kann:

$$\sin \frac{\varDelta B}{2} = -\sin \frac{\sigma'}{2} \cos \alpha' \sec \frac{L_{1.2}}{2}. \tag{3}$$

Zunächst ergiebt sich für A' die Formel:

$$A' = 2 \left(\sin^2 B \cos^2 \frac{\varDelta B}{2} + \cos^2 B \sec^2 \frac{L_{1.2}}{2} \cos^2 \alpha' \right).$$

Die beiden ersten Gleichungen (2) S. 145 geben aber auch:

$$\cos B \cos \alpha' \tan \frac{L_{1.2}}{2} = -\sin \frac{\varDelta B}{2} \sin \alpha' \tag{4}$$

und hiermit erhält man anstatt des vorigen Ausdrucks, darin zunächst $\sec^2 = 1 + \tan^2$ setzend:

$$A' = 2 \left(\sin^2 B \cos^2 \frac{\varDelta B}{2} + \cos^2 B \cos^2 \alpha' + \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} \sin^2 \alpha' \right). \tag{5}$$

Bei der Reduktion des Ausdrucks für A'' führen wir vorerst für $\sin B_1$ und $\sin B_2$ die Gröfsen S und D ein, wozu nach S. 150 (10) die Relationen dienen:

$$\sin B_1 = \frac{S - D}{2} \qquad \sin B_2 = \frac{S + D}{2}.$$

Es folgt hiermit

$$A'' = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{S^4}{8} + \frac{7 D^2 S^2}{6 \sin^2 \sigma'} - \frac{2 D^2}{3 \sin^2 \sigma'} + \frac{D^4}{6 \sin^4 \frac{\sigma'}{2}} \right) \\ + \left(\frac{D^2 S^2}{4} - \frac{D^2 S^2}{2 \cos^2 \frac{\sigma'}{2}} + \frac{D^2 S^2}{6 \cos^4 \frac{\sigma'}{2}} + \frac{D^4}{6 \sin^2 \sigma'} \right) \end{array} \right\}, \tag{6}$$

worin wir unter Beachtung von (2), (3) und (4) nun für S, DS und D die Substitutionen einführen:

$$\left. \begin{array}{l} S = 2 \sin B \cos \frac{\varDelta B}{2} \qquad DS = \sin \varDelta B \sin 2B \\ \frac{D^2}{\sin^2 \sigma'} = \cos^2 B \cos^2 \alpha' \sec^2 \frac{\sigma'}{2} + \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} \sin^2 \alpha' \sec^2 \frac{\sigma'}{2} \\ \frac{D^2}{\sin^2 \frac{\sigma'}{2}} = 4 \cos^2 B \cos^2 \alpha' + 4 \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} \sin^2 \alpha'. \end{array} \right\} \tag{7}$$

Dabei zeigt sich aber, dafs die 2. Parenthese des Ausdrucks (6) ein

Glied 2. Ordnung ist, das sich (mit einigen kleinen zulässigen Vernachlässigungen) auf

$$\frac{1}{12} \sin^2 \varDelta B \left(- \sin^2 2B + 2 \cos^4 B \cos^2 a'\right) \tag{8}$$

reduziert. Bedenkt man nun, dafs der Faktor von A'' höchstens $\frac{1}{2} e^6 \varrho''$ oder $\frac{1}{34}$ Sek. und das Maximum des vorstehenden Ausdrucks (8) gleich $\frac{1}{12} \sin^2 \varDelta B$ wird, so ist hiernach dessen Einflufs auf $a_{2.1} + a_{1.2}$ für $\varDelta B = 0{,}1$ höchstens $0{,}000025''$ und mithin zu vernachlässigen.

Für A'' wird mit Berücksichtigung dessen nach Einführung der (7) erhalten:

$$A'' = 2\left(1 - \cos^2 B \sin^2 a'\right)^2 - \frac{1}{6} \cos^4 B \sin^2 2a' + Gl_2. \tag{9}$$

Die Restglieder 2. Ordnung nehmen, abgesehen von den (8), näherungsweise die Gestalt an:

$$\varDelta B^2 \left(\frac{7}{6} \sin^2 B \sin^2 a' - \sin^4 B + \frac{7}{24} \sin^2 2B \sin^2 a' - \frac{1}{6} \sin^2 a' - \frac{1}{6} \cos^2 B \cos 4a'\right), \tag{10}$$

wobei zur Elimination von σ' die Relation

$$\varDelta B^2 \cos^2 B = \sigma'^2 \cos^2 a' \cos^2 B + Gl_4 \tag{11}$$

benutzt ist, welche aus der 3. Formel (7) bequem abgeleitet werden kann. Die Vergleichung von (8) und (10) zeigt, dafs der Einflufs von (10), wie aus der Betrachtung seiner ersten beiden Glieder (den hauptsächlichsten aller) hervorgeht, wesentlich gröfser als derjenige von (8) ist; dennoch kann man A'' nach (9) beibehalten, ohne mehr als etwa $0{,}0002''$ Fehler in $a_{2.1} + a_{1.2}$ befürchten zu müssen.

Indem wir jetzt A' und A'' in (1) oben substituieren, reduzieren wir noch den Faktor der Parenthese von (1) mittelst der aus den beiden ersten Gleichungen (2) S. 145 folgenden Relation

$$D \sin L_{1.2} = 2 \sin^2 \frac{\sigma'}{2} \sin 2a' \tag{12}$$

und erhalten

$$\underset{\text{in Sek.}}{a_{2.1} + a_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} + a'_{1.2}} + \varrho'' e^2 \cos B_1 \cos B_2 \sin 2a' \sec^2 \frac{\sigma'}{2} \cdot F, \tag{13}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{l} 1 + e^2\left[1 - \cos^2 B \sin^2 a' + \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} \left(\sin^2 a' - \sin^2 B\right)\right] \\ \quad + e^4 \left[\left(1 - \cos^2 B \sin^2 a'\right)^2 - \frac{1}{12} \cos^4 B \sin^2 2a'\right] + Gl_6 \end{array} \right\},$$

welche Formel für $\varDelta B = 0{,}1$ nur einige Zehntausendstelsekunden Fehler giebt.

Schreiben wir einfacher

$$\underset{\text{in Sek.}}{a_{2.1} + a_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} + a'_{1.2}} + \frac{\varrho'' e^2 \cos B_1 \cos B_2 \sin 2a' \sec^2 \frac{\sigma'}{2}}{1 - e^2 (1 - \cos^2 B \sin^2 a')} + Gl_6, \quad (14)$$

so ist der Fehler, insoweit er von den Gliedern 6. Ordnung abhängt, näherungsweise gleich

$$\varrho'' e^4 \cos^2 B \left\{ \frac{1}{4} \varDelta B^2 (\sin^2 a' - \sin^2 B) \sin 2a' - \frac{1}{12} e^2 \cos^4 B \sin^3 2a' \right\}. \quad (15)$$

Beide Teile dieses Ausdrucks sind am gröfsten für $B =$ null. Die Differentiation nach a' zeigt, dafs für diesen Wert von B und für $\varDelta B = 0{,}1$ der 1. Teil den Maximalbetrag $0{,}015''$ annimmt, während der 2. Teil unabhängig von $\varDelta B$ den Maximalbetrag $0{,}005''$ hat.

Da die Beträge beider Teile sich einigermafsen kompensieren, so kann man den Fehler von (14) auf rund $0{,}01''$ im Maximum ansetzen. Ist $B = 45^0$, so giebt der 1. Teil mit $\varDelta B = 0{,}1$ nur $0{,}003''$ und der 2. weniger als $0{,}001''$ im Maximum.

Es kann nach all' dem die Formel (14) in vielen Fällen als ausreichend angesehen werden. Sie ist bequemer als (13). Ihr Nenner insbesondere läfst sich leicht logarithmisch behandeln mittelst der Substitution

$$\cos B \sin a' = \cos u, \quad (16).$$

wodurch er in W^2, W mit Argument u, übergeht.

§ 10. **Fortsetzung. Die Sehne.** Die Sehne wird wohl immer am bequemsten nach den, sich für kleine Distanzen nicht unerheblich vereinfachenden allgemeinen Formeln des § 6, S. 145 berechnet. Nichts desto weniger wollen wir doch hier auch in kürze eine andere Art der Berechnung anführen und zwar mit Benutzung des Krümmungsradius im mittlern Azimut und in der mittlern geographischen Breite.

Wir schreiben zu dem Zwecke

$$\mathfrak{k}^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{\sigma'}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B_1)(1 - e^2 \sin^2 B_2)}} - \frac{e^2(2-e^2)(\sin B_2 \sqrt{1-e^2\sin^2 B_1} - \sin B_1 \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_2})^2 - (\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2} - \sqrt{1-e^2 \sin^2 B_1})^2}{4 \sin^2 \frac{\sigma'}{2} (1 - e^2 \sin^2 B_1)(1 - e^2 \sin^2 B_2)} \right\}$$

und entwickeln die Glieder der geschlungenen Parenthese in Reihen mit Vernachlässigung aller Terme, die von höherer als 6. Ordnung in Bezug auf e oder $\varDelta B$ sind. Der Minuend giebt:

$$1 + e^2 \sin^2 B + \left(\frac{1}{4} e^2 \varDelta B^2 - \frac{1}{48} e^2 \varDelta B^4\right) \cos 2B + e^4 \sin^4 B$$

$$+ e^6 \sin^6 B + e^4 \varDelta B^2 \sin^2 B \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B\right) + Gl_8.$$

Der Subtrahend giebt:

$$\frac{2e^2 \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} \cos^2 B}{\sin^2 \frac{\sigma'}{2}} \left\{ 1 + e^2 \left(\frac{5}{2} \sin^2 B - \frac{1}{2}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8} e^2 \varDelta B^2 (7 \sin^2 B - 2) + \frac{3}{2} e^4 \sin^2 B (3 \sin^2 B - 1) + Gl_6 \right\},$$

worin noch mit Benutzung der Gleichungen (3) und (4) S. 152 zu substituieren ist:

$$\frac{\sin^2 \frac{\varDelta B}{2}}{\sin^2 \frac{\sigma'}{2}} = \cos^2 a' \left(1 + \tan^2 \frac{L}{2}\right)$$

$$= \cos^2 a' + \sin^2 a' \sec^2 B \left(\frac{1}{4} \varDelta B^2 - \frac{1}{48} \varDelta B^4 + Gl_6\right).$$

Wird dies eingeführt, so ergiebt sich folgender Ausdruck für die geschlungene Parenthese:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + e^2 (\sin^2 B - 2 \cos^2 B \cos^2 a') + e^4 \left(\sin^4 B - \cos^2 B \cos^2 a' (5 \sin^2 B - 1)\right) \\ \quad + e^6 \left(\sin^6 B - 3 \cos^2 B \cos^2 a' (3 \sin^4 B - \sin^2 B)\right) + \frac{1}{4} e^2 \varDelta B^2 (\cos 2B - 2 \sin^2 a') \\ \quad - \frac{1}{48} e^2 \varDelta B^4 (\cos 2B - 2 \sin^2 a') + e^4 \varDelta B^2 \left\{ - \frac{1}{4} \sin^2 B (1 + 6 \sin^2 B) \right\} \\ \qquad + e^4 \varDelta B^2 \left\{\frac{7}{4} \sin^2 B \cos^2 a' (1 + \cos^2 B) + \frac{1}{4} (1 - 3 \cos^2 a')\right\} + Gl_8. \end{array}\right\}$$

Diesen Ausdruck multiplizieren wir mit der rechten Seite der nachstehenden, aus Formel (1) S. 58 folgenden Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 B)(1 - e^2 + e^2 \cos^2 B \cos^2 a')^2}{a_0^2 (1 - e^2)^2},$$

welche dem Krümmungsradius im Azimut a' und in der Breite B entspricht. Dadurch ergiebt sich endlich:

$$\mathfrak{k} = 2\varrho \sin \frac{\sigma'}{2} \left\{1 + \frac{3}{8} e^4 \cos^4 B \sin^2 2a' + \frac{1}{8} e^2 \varDelta B^2 (\cos 2B - 2 \sin^2 a') + R\right\}, \quad (1)$$

wobei

$$\left.\begin{array}{l} R = \frac{1}{4} e^6 \cos^4 B \sin^2 2a' (3 - 2 \cos^2 B + \cos^2 B \cos^2 a') - \frac{1}{96} e^2 \varDelta B^4 (\cos 2B - 2 \sin^2 a') \\ \quad + \frac{1}{8} e^4 \varDelta B^2 (1 - 4 \sin^4 B - 2 \cos 2B \cos^2 a' - 3 \cos^4 B \cos^2 a' + 4 \cos^2 B \cos^4 a') + Gl_8; \end{array}\right\} \quad (2)$$

es umfafst mithin R die Glieder, welche in Bezug auf e und ΔB die 6. und höhere Ordnung haben.

Wenn aber die ganze Transformation eine Erleichterung gewähren soll, mufs man R vernachlässigen können.

Der Einflufs von R auf log $\mathfrak{k}$ ist gleich R mal dem Modulus M. Hiernach giebt das 1. Glied in R für $B = 0^0$ im Maximum 4 Einheiten der 8. Decimalstelle des Logarithmus, welcher Betrag aber für zunehmende Breite sich vermindert und bei $B = 45^0$ bereits nicht mehr 2 Einheiten ausmacht. Das 2. Glied in R beeinflufst für $\Delta B = 0{,}1$ nur die 9. Stelle ein wenig; das 3. Glied giebt im Maximum rund 7 Einheiten der 8. Stelle, doch trifft dieses Maximum auf einem Nullwert des 1. Gliedes, wie sich überhaupt diese beiden Glieder nicht ungünstig kombinieren.

Die Vernachlässigung von R entspricht mithin einer Genauigkeit, wie die Rechnung mit 7ziffrigen Logarithmen unter Beibehaltung der 8. Stelle aus den Proportionalteilen gewährt. Ebenso genau ist die folgende logarithmische Form:

$$\log \mathfrak{k} = \log\left(2\varrho \sin\frac{\sigma'}{2}\right) + \frac{1}{8} M \left\{3\, e^4 \cos^4 B \sin^2 2a' + e^2 \Delta B^2 (\cos 2B - 2\sin^2 a')\right\} + Gl_6 \quad (3)$$

ϱ zu den Argumenten B und a'.

Da Formel (3) die Berechnung von ϱ zu dem *sphärischen* Azimut a' als Argument voraussetzt, so liegt es nahe, auch noch das entsprechende *astronomische* Azimut einzuführen.

Nach Formel (14) S. 154 können wir aber setzen, wenn

$$\frac{a_{1.2} + a_{2.1} - 180^0}{2} \quad (4)$$

mit a bezeichnet wird:

$$a = a' + \frac{1}{2} e^2 \cos B_1 \cos B_2 \sin 2a' \sec^2 \frac{\sigma'}{2} \left\{1 + e^2(1 - \cos^2 B \sin^2 a') + Gl_4\right\} \cdot$$

Hieraus folgt:

$$a' = a - \frac{1}{2} e^2 \sin 2a \left\{\cos^2 B\left[1 + e^2(1 - \cos^2 B \cos^2 a) + \frac{\sigma'^2}{4}\right] - \frac{1}{4}\Delta B^2\right\} + Gl_6 .$$

Führt man dies in den Ausdruck

$$\log(\varrho \text{ für } a') = \log \frac{a_0(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} - \log(1 - e^2 + e^2 \cos^2 B \cos^2 a')$$

ein, so folgt mit Rücksicht auf (11) S. 153:

$$\log(\varrho \text{ für } a') = \log(\varrho \text{ für } a)$$
$$- \frac{1}{2} e^4 \cos^4 B \sin^2 2a \left(1 + e^2(2 - 3\cos^2 B \cos^2 a + \frac{1}{2}\cos^2 B)\right)$$
$$- \frac{1}{2} e^4 \Delta B^2 \cos^2 B \sin^2 a (\cos^2 B - \cos^2 a) + Gl_8 . \quad (5)$$

Behalten wir zunächst nur die Glieder 4. Ordnung bei, entsprechend der Formel (3), so folgt durch Substitution dieses Ausdrucks für log (ϱ für a') in dieselbe:

$$\log k = \log\left(2\varrho \sin\frac{\sigma'}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{8} M \left\{ - e^4 \cos^4 B \sin^2 2a + e^2 \Delta B^2 (\cos 2B - 2\sin^2 a) \right\} + Gl_6, \tag{6}$$

ϱ zu den Argumenten B und a.

Die Formel giebt dieselbe Genauigkeit wie Formel (3). Dies erkennt man, indem man bei Substitution von log (ϱ für a) die Glieder 6. Ordnung beibehält, und in den Gliedern 4. Ordnung von (3) $a' = a - \frac{1}{2} e^2 \sin 2a \cos^2 B + Gl_4$ setzt. Alsdann ergeben sich, abgesehen vom Faktor M nachstehende Glieder des Restes von (6):

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{4} e^6 \cos^4 B \sin^2 2a (1 - \cos^2 B \cos^2 a) - \frac{1}{96} e^2 \Delta B^4 (\cos 2B - 2\sin^2 a) \\ & + \frac{1}{8} e^4 \Delta B^2 \left\{ -3 + 2\sin^2 2B + \cos^2 a (2 + \cos^4 B + 4\cos^2 B \sin^2 a) \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Diese Glieder haben angenähert denselben Einfluſs wie früher die entsprechenden in (2). Jedoch ist immerhin der Vorteil bei Anwendung des astronomischen Azimuts vorhanden, daſs die von der Distanz unabhängigen Glieder kleiner als früher sind (um ungefähr die Hälfte), so daſs für Werte ΔB, wesentlich kleiner als 0,1, die Formel (6) genauer als (3) wird.

§ 11. Zusammenstellung der Formeln für Distanzen $< 0{,}1\, a_0$.

Gegeben B_1, B_2 und $L_{1.2}$.

$$\Delta B = B_2 - B_1 \qquad B = \frac{1}{2}(B_2 + B_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos a' \sin\frac{\sigma'}{2} &= -\sin\frac{\Delta B}{2} \cos\frac{L_{1.2}}{2} \\ \sin a' \sin\frac{\sigma'}{2} &= +\cos B \sin\frac{L_{1.2}}{2} \\ \cos\frac{\Delta a'}{2} \cos\frac{\sigma'}{2} &= +\cos\frac{\Delta B}{2} \cos\frac{L_{1.2}}{2} \\ \sin\frac{\Delta a'}{2} \cos\frac{\sigma'}{2} &= -\sin B \sin\frac{L_{1.2}}{2} \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\frac{a_{2.1} - a_{1.2} - 180^0}{2}} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\Delta a'}{2}} + Gl_7. \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\underset{\text{in Sek.}}{\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}-180^0}{2}} &= \underset{\text{in Sek.}}{\alpha'} + \frac{1}{2}\varrho'' e^2 \frac{\cos B_1 \cos B_2 \sin 2\alpha' \sec^2 \frac{\sigma'}{2}}{W_u^2} + Gl_6 \\ \cos u = \cos B \sin \alpha', &\quad u \text{ Argument für } W_u.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\log \mathfrak{k} = \log\left(2\varrho \sin \frac{\sigma'}{2}\right) + \frac{1}{8} M \left\{ 3e^4 \cos^4 B \sin^2 2\alpha' + e^2 \varDelta B^2 (\cos 2B - 2\sin^2\alpha')\right\} + Gl_6 \\ \varDelta B = \frac{\varDelta B \text{ in Sek.}}{\varrho''}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ϱ zu den Argumenten α' und B.

Nach S. 59 hat man zur Berechnung von ϱ:

$$\left.\begin{aligned}\log \varrho &= \log a_0 - \log W + 2 \log \cos h \\ \tan h &= \sqrt{\delta} \cos B \cos \alpha'\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

W zum Argument B.

Mit *Bessels* Dimensionen des Erdellipsoids sind die Logarithmen der im Vorstehenden auftretenden Konstanten:

$$\log\left(\frac{1}{2}\varrho'' e^2\right) = 2{,}8378056 \qquad \log \varrho'' = 5{,}31443$$

$$\left.\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{8} M . 3e^4\right) &= 1{,}86064 \\ \log\left(\frac{1}{8} M . e^2\right) &= 3{,}55910\end{aligned}\right\} \text{ für Einheiten der 7. Decimale des Logarithmus } \mathfrak{k}.$$

$$\log a_0 = 6{,}8046434.637 \quad \log \sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9 - 10$$

Für $\varDelta B = 0{,}1$ und $\mathfrak{k} = 0{,}1$ ist im Maximum der Fehler der Azimute $< 0{,}01''$, derjenige von $\log \mathfrak{k}$ aber < 1 Einheit der 7. Decimalstelle. Über die Genauigkeit im speziellen vergl. die §§ 8—10.

§. 12. **Zahlenbeispiel I.** Wir nehmen für B_1, B_2 und $L_{1.2}$ folgende Zahlwerte (*Bremiker, Studien über höhere Geodäsie*, sowie *Förster* und *Tietjen, Berliner Astronomisches Jahrbuch 1880*):

$$\left.\begin{aligned}\text{Berlin } B_1 &= 52^0\ 30'\ 16{,}7'' \\ \text{Königsberg } B_2 &= 54\ \ 42\ \ 50{,}6\end{aligned}\right\} \quad L_{1.2} = 7^0\ 6'\ 0{,}0'' \text{ östlich.}$$

Die sphärische Rechnung, wobei anstatt §. 6 (2) S. 145 die Reihenentwicklungen S. 132 angewandt wurden, führt zu nachstehenden Zahlen:

$\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = -25560{,}00000 \quad \log = 4{,}4075608.495_n \quad \log\ L = 9{,}0931357.163_n - 10$

$\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta B} = +\ 7953{,}90000 \quad 3{,}9005801.265 \quad \log \varDelta B = 8{,}5861549.933 - 10$

$B = 53^0 36' 33{,}65'' \quad \log\cos B = 9{,}7732652.484 - 10 \quad \log\sin B = 9{,}9057908.074 - 10;$

$$\log \frac{M}{24} = 5{,}2575731 \text{ und } \log \frac{M}{2880} = 3{,}1784 \text{ für Einh. der 7. Dec.}$$

Formel (1) S. 132 giebt insbesondere:

$$\left\{\begin{array}{lrl}
\log\left(-\frac{L\cos B}{\varDelta B}\right) = & 0{,}2802459.714 & \\
+\frac{1}{24}M.2L^2 = + & 5557.436 & \log = 3{,}7448745 \\
+\frac{1}{24}M.\varDelta B^2 = + & 269.081 & 2{,}4298831 \\
+\frac{1}{2880}M.14L^4 = + & 4.977 & 0{,}6970 \\
+\frac{1}{2880}M.\varDelta B^4 = + & .003 & 0{,}52 - 3
\end{array}\right.$$

$$\log\tan\alpha' = 0{,}2808291.211 \qquad \alpha' = 242^0\, 21'\, 14{,}9790''.$$

Da L^6 voraussichtlich auf die 10. Decimale des Logarithmus ein wenig Einflufs hat, so ist α' um etwa eine Einheit der 4. Decimalstelle der Sekunden unsicher.

Formel (2) S. 133 entsprechen die Zahlen:

$$\log\sec\frac{\varDelta B}{2} = 0{,}0000807.294 \qquad \log\cos B_1 = 9{,}7844013 - 10$$

$$\log\cos B_2 = 9{,}7616703 - 10$$

$$\left\{\begin{array}{lrl}
\log\left(-\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}}\sin B\sec\frac{\varDelta B}{2}\right) = & 4{,}3134323.863 - 10 & \log M = 6{,}6377843 \ \text{für Einh. der 7. Dec.} \\
\left\{\frac{1}{12}M.L^2\cos B_1\cos B_2\sec^2\frac{\varDelta B}{2}\right\} = + & 1954.824 & \log = 3{,}2911076 \\
-\frac{13}{120}\sin^2 B\, L^2.\{\div\} = - & 2.107 & 0{,}3237 \\
+\frac{7}{120}L^2.\{\div\} = + & 1.751 & 0{,}2433
\end{array}\right.$$

$$\log\underset{\text{in. Sek.}}{\varDelta\alpha'} = 4{,}3136278.331 \qquad \frac{\varDelta\alpha'}{2} = 2^0\, 51'\, 34{,}3241''.$$

Es wird nunmehr:

$$\alpha'_{1.2} = 239^0\, 29'\, 40{,}6549'' \qquad \alpha'_{2.1} = 65^0\, 12'\, 49{,}3031''.$$

Formel (5) S. 134 giebt, wenn $q = \varDelta B$ und $p = -\cos\frac{L_{1.2}}{2}\sec\alpha'$ genommen werden:

$$\log\cos\frac{L_{1.2}}{2} = 9{,}9991658.506 - 10 \qquad \log\cos\alpha' = 9{,}6665225.564_n - 10$$

$$\left\{\begin{array}{lr}
\log\frac{pq}{2} = & 8{,}6177682.918 - 10 \\
-\frac{1}{24}M.\varDelta B^2 = - & 269.081 \\
-\frac{1}{2880}M.\varDelta B^4 = - & .003
\end{array}\right\} \text{schon oben berechnet.}$$

$$\log\sin\frac{\sigma'}{2} = -\,8{,}6177413.834 - 10.$$

Setzt man aber $q = L$ und $p = \cos B \csc \alpha'$, so hat man, da $\log \sin \alpha' = 9{,}9473516.775_n - 10$ ist:

$$\left\{\begin{array}{rr} \log \frac{pq}{2} = & 8{,}6180192.915 - 10 \\ -\frac{1}{24} M.L^2 = - & 2778.718 \\ -\frac{1}{2880} M.L^4 = - & .355 \\ \hline \log \sin \frac{\sigma'}{2} = & 8{,}6177413.842 - 10. \end{array}\right.$$

(zu den Gliedern mit $M.L^2$ und $M.L^4$: schon oben berechnet.)

Die Differenz beider Werte von $\log \sin \frac{\sigma'}{2}$ läfst sich schon durch nicht ganz 0,0002″ Zuwachs in α' erklären. Der 2. Wert ist als der schärfere beizubehalten, oder noch besser ist unter Annahme dieses Zuwachses zu setzen als

Resultat der sphärischen Rechnung:
$$\left\{\begin{array}{l} \log \sin \frac{\sigma'}{2} = 8{,}6177413.840 - 10 \\ \alpha'_{1.2} = 239^0\ 29'\ 40{,}6549'' \\ \alpha'_{2.1} = \ 65^0\ 12'\ 49.3031''. \end{array}\right.$$

Es ist notwendig, zu Vorstehendem hinzuzufügen, dafs im vorliegenden Falle die Anwendung der Formeln (2) S. 145, ohne Reihenentwicklung, bequemer gewesen wäre. Wenn jedoch $\varDelta B$ und L noch kleiner als oben werden, kann bei 10stelliger Rechnung die Benutzung der Reihen doch vorzuziehen sein. Jetzt kam es überdies nur darauf an, die Reihenglieder in Zahlen vor sich zu sehen.

Für *Formel* (8) S. 146 hat man:

$$\log e^2 = 7{,}8244104 - 10 \qquad \log\left(\frac{1}{2}\sin 2B\right) = 7{,}6790560 - 10,$$

$$-\log W_1 = 0{,}0009143 \qquad \log \sin \varDelta B = 8{,}5860473 - 10,$$

letzteres aus $\log \varDelta B$ in Sek. mittelst des Hilfslogarithmus S.

$$\left\{\begin{array}{rr} \log E = & 6{,}09134 - 10 \\ +\frac{1}{2} M.E = & 3 \\ \hline \log\left(1 - \frac{W_2}{W_1}\right) = & 6{,}09137 - 10. \end{array}\right.$$

Für *Formel* (9) S. 146 erhält man:

$$\log\left(2\sin\frac{\varDelta B}{2}\right) = \log\sin\varDelta B + \log\sec\frac{\varDelta B}{2} = 8{,}5861280-10$$

$\log M = 6{,}63778$ für Einh. der 7. Dec., $\quad \log\sin B_1 = 9{,}89949-10$

$$\left\{\begin{array}{lrl} \log D & = 8{,}3593932-10 & \\ +\left\{\frac{ME}{D}\sin B_1\right\} & = +\quad 18588 & \log = 4{,}26922 \\ -\frac{E\sin B_1}{2D}\left\{\frac{ME}{D}\sin B_1\right\} & = -\quad 40 & 1{,}600 \\ +\frac{1}{2}E\left\{\frac{ME}{D}\sin B_1\right\} & = +\quad 1 & 0{,}060 \end{array}\right.$$

$$\log\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right) = 8{,}3612481-10.$$

Zu den *Formeln* (7) S. 146 hat man:

$$\log e\sqrt{2-e^2} = 9{,}0619943-10$$

$\log\sin q'' = 8{,}66813 \quad -10 \qquad \log\cos q'' = 9{,}9995285 \quad -10$

$\log W_2 \quad = 9{,}9990321-10 \qquad \log\sqrt{\frac{W_1}{W_2}} = 0{,}0000268$

$\log\sin q' \quad = 8{,}5040263_r-10 \qquad \log\cos q' = 9{,}9997786.761-10.$

Hiermit geben die *Formeln* (5) und (6) S. 145, da

$$\left.\begin{array}{l} \log 2a_0 = 7{,}1056734.594 \text{ und} \\ \log W_1 = 9{,}9990857.480-10, \\ \log W_2 = 9{,}9990321.461-10: \end{array}\right\} \log k = 5{,}7241345.725.$$

Die *Formeln* (4) S. 145 führen zu folgenden Zahlen:

$\log\sin L_{1.2} = 9{,}0920237_n-10 \qquad \log\frac{\cos B_1}{\cos B_2} = 0{,}0227310$

$$\left\{\begin{array}{r} \log\tan\varepsilon'_{1.2} = 7{,}1163658_n-10 \\ T = 4{,}6855751 \quad -10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} \log\tan\varepsilon'_{2.1} = 7{,}0709574_n-10 \\ T = 4{,}6855751 \quad -10 \end{array}\right.$$

$\underset{\text{in Sek.}}{\log\varepsilon'_{1.2}} = 2{,}4307907_n \qquad \underset{\text{in Sek.}}{\log\varepsilon'_{2.1}} = 2{,}3853823_n$

$\varepsilon'_{1.2} = -\quad 4'\ 29{,}6440'' \qquad \varepsilon'_{2.1} = -\quad 4'\ 2{,}8747''$

$\alpha'_{1.2} - \varepsilon'_{1.2} = 239^0\ 34'\ 10{,}2989'' \qquad \alpha'_{2.1} - \varepsilon'_{2.1} = 65^0\ 16'\ 52{,}1778''$

$$\left\{\begin{array}{ll} \log\sin\alpha'_{1.2} & = 9{,}9352963.933_n-10 \\ \log\cos\varepsilon'_{1.2} & = 9{,}9999996.289 \quad -10 \\ \log\cos(\alpha'_{1.2}-\varepsilon'_{1.2}) & = 9{,}7045729.476_n-10 \end{array}\right.$$

$$\log\tan\alpha_{1.2} \quad = 0{,}2307230.746$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \log\sin\alpha'_{2.1} & = 9{,}9580273.552-10 \\ \log\cos\varepsilon'_{2.1} & = 9{,}9999996.989-10 \\ \log\cos(\alpha'_{2.1}-\varepsilon'_{2.1}) & = 9{,}6213484.891-10 \end{array}\right.$$

$$\log\tan\alpha_{2.1} \quad = 0{,}3366785.660.$$

Hiermit gelangt man zu nachstehendem

$$\text{Resultat:} \quad \begin{cases} \log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.725 \\ a_{1.2} = 239^0\ 33'\ 0{,}9324'' \\ a_{2.1} = \ \ 65^0\ 16'\ 9{,}5806''. \end{cases}$$

Bremiker giebt in seinen *Studien u. s. w.* S. 37 bezw. 0,9325″ und 9,5809″, S. 28 aber 0,9326″ und 9,5800″ als Sekunden der Azimute. Für log $\mathfrak{k}$ ist nach ihm, S. 28, der Wert der 3 letzten Stellen .730. Diese Übereinstimmung dürfte genügen.

§ 13. **Fortsetzung des Zahlenbeispiels I.** Zu *Formel* (3) S. 158 ist:

$$\log \cos B_1 \cos B_2 = 9{,}5460716-10 \qquad \log \sin 2\,a' = 9{,}9149042-10$$

$$\log \cos u = 9{,}72062_n-10 \qquad \log \sec^2 \frac{\sigma'}{2} = 0{,}0007475$$

$$u = 58^0\ 17',7 \qquad 2 \log W_u = 9{,}9978969-10$$

$$\log \left\{ \frac{1}{2} \varrho'' e^2 \frac{\cos B_1 \cos B_2 \sin 2a' \sec^2 \frac{\sigma'}{2}}{W_u^{\,2}} \right\} = 2{,}3016320.$$

Es geben daher Formel (2) und (3) S. 157 u. 158:

$$\frac{a_{2.1} - a_{1.2}}{2} = \ \ 92^0\ 51'\ 34{,}3241''$$

$$\frac{a_{2.1} + a_{1.2}}{2} = 332^0\ 21'\ 14{,}9790'' + 3'\ 20{,}2774''$$

$$= 332^0\ 24'\ 35{,}2564''.$$

Hieraus folgt als

$$\text{Resultat:} \quad \begin{cases} a_{1.2} = 239^0\ 33'\ 0{,}9323'' \\ a_{2.1} = \ \ 65^0\ 16'\ 9{,}5805''. \end{cases}$$

Diese Werte weichen von den strengeren Ergebnissen des vorigen Paragraphen nur um 0,0001″ ab, da die vernachlässigten Glieder, die in der Summe $a_{2.1} + a_{1.2}$ in den Zehntausendstelsekunden merkbar werden könnten, sich zufällig kompensieren.

Zu *Formel* (5) S. 158 erhalten wir:

$$\begin{cases} \log \sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9\ -10 \\ \log \cos B = 9{,}7732652.5\ -10 \\ \log \cos a' = 9{,}6665225.6_n-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log a_0 = 6{,}8046434.637 \\ \log W = 9{,}9990587.885-10 \\ 2 \log \cos h = 9{,}9997789.106-10 \end{cases}$$

$$\log \tan h = 8{,}3534472.0_n-10 \qquad \log \varrho = 6{,}8053635.858.$$

Bremikers Tafel in seinen 6stelligen Logarithmen giebt 6,8053635.9, welcher Wert vollkommen ausreichen würde, wenn wir nur einzig und allein Formel (4) S. 158 benutzen wollten und demgemäfs 7 bis 8stellig rechnen würden. Indessen sollen schliefslich noch die höhern Glieder, die dort vernachlässigt sind, angebracht werden.

Zu *Formel* (4) S. 158 hat man, da $\log \cos 2B = 9{,}47132_n - 10$ ist:

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(2\varrho \sin\frac{\sigma'}{2}\right) &= 5{,}7241349.655 \\ +\frac{M}{8}\cdot 3e^4 \cos^4 B \sin^2 2\alpha' &= \quad + 6.074 \\ +\frac{M}{8}\cdot e^2 \varDelta B^2 \cos 2B &= \quad - 1.594 \\ -\frac{M}{8}\cdot 2e^2 \varDelta B^2 \sin^2 \alpha' &= \quad - 8.456 \end{aligned}\right.$$

$$\log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.679\,.$$

Formel (2) S. 155 giebt für die drei Glieder des Restes R

$$+\,146,\ +\,3,\ -\,47$$

Einheiten der 10. Decimalstelle. Für $\log \mathfrak{k}$ ist noch mit M zu multiplizieren, womit sich als Verbesserung vorstehenden Wertes von $\log \mathfrak{k}$ + 44 Einh. der 10. Stelle ergeben. Es wird hiernach das

$$\text{Resultat:}\quad \log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.723\,,$$

welcher Wert mit dem S. 162 gefundenen so gut übereinstimmt, als es die Rechnungsunsicherheit der letzten Stelle zuläfst.

Zu *Formel* (6) S. 157 erhält man:

$$\alpha = 242^0\, 24'\, 35{,}2564'' \qquad \log \varrho = 6{,}8053644.048$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(2\varrho \sin\frac{\sigma'}{2}\right) &= 5{,}7241357.845 \\ -\frac{M}{8}\cdot e^4 \cos^4 B \sin^2 2\alpha &= \quad - 2.019 \\ +\frac{M}{8}\cdot e^2 \varDelta B^2 \cos 2B &= \quad - 1.594 \\ -\frac{M}{8}\cdot 2e^2 \varDelta B^2 \sin^2 \alpha &= \quad - 8.464 \end{aligned}\right.$$

$$\log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.768\,.$$

Die vernachlässigten Glieder 6. Ordnung (7) S. 157 geben in Einheiten der 10. Stelle $M(-56 + 3 - 41)$ d. i. . . . . -41; es wird daher das

$$\text{Resultat:}\quad \log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.727\,,$$

was ebenfalls in guter Übereinstimmung mit der strengen Rechnung ist.

Die *Formel* (5) S. 141 zur direkten Berechnung eines einzelnen Azimuts giebt für $a_{1.2}$:

$B' = 53^0\,3'\,25{,}175''$ $\log\cos 2B' = 9{,}4433_n - 10$ $\log\sin^2 B' = 9{,}80 - 10$

$$\left\{\begin{aligned}\log\frac{\varDelta B}{L} &= 9{,}4930192.770_n - 10\\ \log(1-e^2) &= 9{,}9970916.405\\ \hline \text{Summa} &= 9{,}4901109.175_n - 10\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\log\cos B_2 &= 9{,}7616703.379 - 10\\ 2\log W' &= 9{,}9981444.626 - 10\\ \hline \text{Summa} &= 9{,}7598148.005 - 10\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lr}
\log\left(-\frac{(1-e^2)\varDelta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) = 9{,}7302961.17 - 10; & \text{num.} = 0{,}537398088\\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\varDelta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(-\frac{\varDelta B^2}{6}\right) = 6{,}124455_n - 10; & \text{num.} = -\quad 133185\\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\varDelta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(\frac{L^2}{6}\right) = 7{,}1384163 - 10; & \text{num.} = +\quad 1375360\\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\varDelta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(\frac{\varDelta B^2 - L^2}{6}\,\frac{3\varDelta B^2 - 7L^2}{60}\right) = 4{,}32900 - 10; & \\
 & \text{num.} = +\quad 2133\\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\varDelta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(-\frac{1}{16}e^2\varDelta B^2\cos 2B'\right) = 2{,}966 - 10; & \\
 & \text{num.} = +\quad 93\\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\varDelta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(\frac{1}{16}\,e^4\varDelta B^2\sin^2 B'(2+\cos 2B')\right) = 1{,}39 - 10; & \\
 & \text{num.} = +\quad 2\\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\varDelta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\frac{31 L^6}{15120} = 1{,}60 - 10; & \text{num.} = +\quad 4
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lr}
\log\left(-\frac{L}{2}\sin B_1\right) = 8{,}6915993.5 - 10; & \text{num.} = +\ 49158582\\
\log\left(-\frac{L}{2}\sin B_1\right) + \log\frac{L^2}{12} = 5{,}79869 - 10; & \text{num.} = +\quad 62906\\
\log\left(-\frac{L}{2}\sin B_1\right) + \log\frac{L^4}{120} = 2{,}986 - 10; & \text{num.} = +\quad 97
\end{array}\right.$$

$$\log\cot a_{1.2} = 9{,}7692769.24 - 10 \qquad \cot a_{1.2} = 0{,}587864080$$

Man hat daher als

Resultat: $a_{1.2} = 239^0\,33'\,0{,}9326''$.

Bei dieser Rechnung sind die beiden größten Glieder 6. Ordnung mit zugezogen, da sie $a_{1.2}$ um $0{,}0009''$ ändern. In den Fällen, für welche die Formel aufgestellt ist, und wo sie allein Vorteil gewährt, ist selbstverständlich dieses Herbeiziehen überflüssig.

§ 14. **Zahlenbeispiel II.** Gegeben:

$$B_1 = 57^0 \quad B_2 = 56^0\,13'\,49{,}02186''$$
$$L_{1.2} = 1^0\,22'\,6{,}03270'' \text{ östlich.}$$

Auf diese Zahlen wenden wir die Formeln des § 11 S. 157 an und rechnen mit 8ziffrigen Logarithmen. Es wird zunächst unter teilweiser Anwendung der Hilfslogarithmen S aus den Tafeln 7ziffriger Logarithmen:

$\frac{\Delta B}{2} = -1385{,}48907''$ $\log\sin = 7{,}8271747.0_n - 10$ $\log\cos = 9{,}9999902.0 - 10$

$\frac{L_{1.2}}{2} = 180^0 - 2463{,}01635''$ $\log\sin = 8{,}0770318.4 - 10$ $\log\cos = 9{,}9999690.4_n - 10$

$B = 56^0\,36'\,54{,}51093''$ $\log\sin = 9{,}9216830.0 - 10$ $\log\cos = 9{,}7405680.1 - 10.$

Die *Formeln* (1) S. 157 geben nun:

$$\cos a' \sin\frac{\sigma'}{2} = [7{,}8271437.4_n - 10]$$

$$\sin a' \sin\frac{\sigma'}{2} = [7{,}8175998.5 - 10]$$

$$\cos\frac{\Delta a'}{2}\cos\frac{\sigma'}{2} = [9{,}9999592.4_n - 10]$$

$$\sin\frac{\Delta a'}{2}\cos\frac{\sigma'}{2} = [7{,}9987148.4_n - 10]$$

$a' = 135^0\,37'\,46{,}216''$ $\log\sin = 9{,}8446606.3 - 10$ $\log\cos = 9{,}8542045.2_n - 10$

$$\log\sin\frac{\sigma'}{2} = 7{,}9729392.2$$

$\frac{\Delta a'}{2} = 180^0\,34'\,16{,}678''$ $\log\sin = 7{,}9987340.1_n - 10$ $\log\cos = 9{,}9999784.1_n - 10$

$$\log\cos\frac{\sigma'}{2} = 9{,}9999808.3\,.$$

Für die *Formeln* (2) und (3) S. 157 u. 158 hat man:

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(\tfrac{1}{2}\varrho''e^2\right) &= 2{,}837806 \\ \log\cos B_1 &= 9{,}736109 - 10 \\ \log\cos B_2 &= 9{,}744963 - 10 \\ \log\sin 2a' &= 9{,}999895_n - 10 \\ \log\sec^2\frac{\sigma'}{2} &= 0{,}000038 \\ -2\log W_u &= 0{,}002476 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 2{,}321287_n \;\ldots\; \text{num.} = -209{,}550''$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\cos B &= 9{,}74057 - 10 \\ \log\sin a' &= 9{,}84466 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\log\cos u = 9{,}58523 - 10$$

$$u = 67^0\,22',2$$

$$\log W_u = 9{,}998762 - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{a_{2.1} - a_{1.2}}{2} &= 270^0\,34'\,16{,}678'' \\ \frac{a_{2.1} + a_{1.2}}{2} &= 225^0\,34'\,16{,}666'' \end{aligned}\right.$$

$$a_{2.1} = 136^0\;\;8'\,33{,}344''$$

$$a_{1.2} = 314\;\;59\;\;59{,}988\,.$$

Zu den *Formeln* (5) und (4) S. 158 findet sich:

$$\left\{\begin{aligned} \log\sqrt{\delta} &= 8{,}913659 \; -10 \\ \log\cos B &= 9{,}740568 \; -10 \\ \log\cos a' &= 9{,}854205_n -10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log a_0 &= 6{,}8046434.6 \\ -\log W &= 0{,}0010128.5 \\ 2\log\cos h &= 9{,}9995487.4-10 \end{aligned}\right.$$

$$\log\tan h = 8{,}508432_n -10 \qquad\qquad \log\varrho = 6{,}8052050.5$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(\tfrac{1}{8}M.3e^4\right) &= 1{,}861 \\ \log\cos^4 B &= 8{,}962-10 \\ \log\sin^2 2a' &= 0{,}000 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \log\left(\tfrac{1}{8}Me^2\right) &= 3{,}56 \\ \log \varDelta B^2 &= 6{,}26 \\ \log\cos 2B &= 9{,}60_n-10 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \log\left(\tfrac{1}{8}Me^2.2\right) &= 3{,}86 \\ \ldots\ldots &\;\; 6{,}26 \\ \log\sin^2 a' &= 9{,}69-10 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 0{,}823 \qquad \text{Summa} = 9{,}42_n \qquad \text{Summa} = 9{,}81-10$$

$$\text{num.} = +\,6.65 \qquad \text{num.} = -\,0.26 \qquad \text{num.} = +\,0.64$$

$$\begin{aligned} \log \mathfrak{k} &= 5{,}0791742.7 + 6.65 - 0.26 - 0.64. \\ &= 5{,}0791748.5. \end{aligned}$$

Es treten hiernach die folgenden Zahlen auf als

$$\text{Resultat:} \left\{\begin{aligned} \log\mathfrak{k} &= 5{,}0791748.5 \\ a_{1.2} &= 314^0\;59'\;59{,}988'' \\ a_{2.1} &= 136 \quad 8 \quad 33{,}344\,. \end{aligned}\right.$$

§ 15. **Übertragung der geographischen Lage mittelst Sehne und astronomischen Azimuts.**

Gegeben sei für P_1 die geographische Breite B_1, ferner die Sehne $\mathfrak{k}$ nach dem Punkte P_2 und das Azimut $a_{1.2}$ des Vertikalschnitts von P_1 nach P_2. Gesucht werden B_2, $L_{1.2}$ und $a_{2.1}$. Wir bezeichnen den Neigungswinkel von $\mathfrak{k}$ gegen die Horizontalebene von P_1 (Ebene $\xi\eta$ S. 136), den sogenannten *Depressionswinkel*, mit $\mu_{1.2}$. Die Projicierung von $\mathfrak{k}$ giebt nun mit Rücksicht auf § 2 S. 136 sofort:

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}\cos\mu_{1.2}\cos a_{1.2} &= \xi_2 = \quad (x_2-x_1)\sin B_1 - (z_2-z_1)\cos B_1 \\ \mathfrak{k}\cos\mu_{1.2}\sin a_{1.2} &= \eta_2 = \quad y_2 \\ \mathfrak{k}\sin\mu_{1.2} \quad &= \zeta_2 = -(x_2-x_1)\cos B_1 - (z_2-z_1)\sin B_1\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Anwendung einfacher Reduktionen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos B_2\cos L_{1.2}\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} - (1-e^2)\frac{\sin B_2\cos B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= \frac{\mathfrak{k}}{a_0}\cos\mu_{1.2}\cos a_{1.2} + \frac{e^2\sin B_1\cos B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \\ \frac{\cos B_2\sin L_{1.2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= \frac{\mathfrak{k}}{a_0}\cos\mu_{1.2}\sin a_{1.2} \\ \frac{\cos B_2\cos L_{1.2}\cos B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} + (1-e^2)\frac{\sin B_2\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= -\frac{\mathfrak{k}}{a_0}\sin\mu_{1.2} \qquad +\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}. \end{aligned}\right\}(1)$$

Diese 3 Gleichungen dienen zur Bestimmung der Unbekannten B_2, $L_{1.2}$ und $\mu_{1.2}$. Der Versuch, die beiden ersten Unbekannten mit Übergehung von $\mu_{1.2}$ herzuleiten, führt zu komplizierten Formeln. Wir eliminieren daher umgekehrt zuerst B_2 und $L_{1.2}$ und leiten $\mu_{1.2}$ ab.

Aus der 1. und 3. der Gleichungen (1) folgt durch Elimination von $\cos B_2 \cos L_{1.2}$ bezw. von $\sin B_2$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin B_2}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= \frac{\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \\
&\quad - \frac{\mathfrak{k}}{a_0(1-e^2)}(\cos\mu_{1.2}\cos B_1\cos\alpha_{1.2}+\sin\mu_{1.2}\sin B_1) \\
\text{und}\qquad & \\
\frac{\cos B_2\cos L_{1.2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= \frac{\cos B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \\
&\quad + \frac{\mathfrak{k}}{a_0}(\cos\mu_{1.2}\sin B_1\cos\alpha_{1.2}-\sin\mu_{1.2}\cos B_1).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Quadriert man die 2. Gleichung (2) und fügt sie zum Quadrat der 2. Gleichung (1), multipliziert die Summe mit $(1-e^2)$ und addiert dazu das mit $(1-e^2)^2$ multiplizierte Quadrat der 1. Gleichung (2), immer Seite für Seite, so folgt:

$$0 = -\frac{2\mathfrak{k}(1-e^2)\sin\mu_{1.2}}{a_0\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} + \frac{\mathfrak{k}^2}{a_0^2}(1-e^2+e^2\cos^2\chi),$$

wobei gesetzt ist:

$$\cos\chi = \cos\mu_{1.2}\cos B_1\cos\alpha_{1.2} + \sin\mu_{1.2}\sin B_1. \qquad (3)$$

$180^0 - \chi$ ist der Winkel zwischen Erdaxe und Sehne $P_1 P_2$, wie leicht zu erkennen ist, wenn man sich durch P_1 eine Parallele zur Erdaxe gelegt denkt und die Ecke zwischen dieser Parallelen, der Sehne und der Lotlinie betrachtet.

Sieht man $\cos\chi$ als bekannt an, so hat man zur Bestimmung von $\mu_{1.2}$ die Formel

$$\begin{aligned}
\sin\mu_{1.2} &= \frac{\mathfrak{k}\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}{2a_0}\left(1+\frac{e^2\cos^2\chi}{1-e^2}\right) \\
&= \frac{\mathfrak{k}W_1}{2a_0}(1+\delta\cos^2\chi) = \frac{\mathfrak{k}W_1}{2a_0}\sec^2 u,
\end{aligned} \qquad (4)$$

wenn $\sqrt{\delta}\cos\chi = \tan u$ gesetzt wird.

Da nun χ nicht bekannt ist, sondern $\mu_{1.2}$ zu seiner Berechnung erfordert, so mufs man sich successiver Annäherungen bedienen, um $\mu_{1.2}$ kennen zu lernen. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}\cot h &= \cot B_1 \cos \alpha_{1.2} \\ \cos\chi &= \cos(\mu_{1.2} - h)\frac{\sin B_1}{\sin h}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und nehmen, falls eine Tafel der ϱ mit B und α als Argumenten vorliegt, in erster Annäherung:

$$\sin\mu_{1.2} = \frac{k}{2\varrho};\quad \varrho \text{ für } B_1 \text{ und } \alpha_{1.2}, \tag{6}$$

andernfalls mit Rücksicht auf den Ausdruck (1) S. 58 für ϱ:

$$\log\sin\mu_{1.2} = \log\frac{k W_1}{2a_0} + M\delta\cos^2 B_1\cos^2\alpha_{1.2} + \cdots. \tag{6*}$$

Um nun B_2 zu finden, geht man von der 1. Gleichung (2) aus und benutzt am besten die reduzierte Breite als Zwischenglied (vergl. S. 40), indem man setzt:

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta_1 &= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B_1}{W_1} \\ \sin\beta_2 &= \sin\beta_1 - \frac{k\cos\chi}{a_0\sqrt{1-e^2}}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hieraus kann man noch ableiten:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\Delta\beta}{2} &= -\frac{k\cos\chi}{2a_0\sqrt{1-e^2}}\sec\beta \\ \Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 \qquad \beta &= \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und endlich:

$$\sin\Delta B = \frac{2W_1}{w_2}\sin\frac{\Delta\beta}{2}\cos\frac{\Delta\beta}{2}, \tag{9}$$

welche letztere Formel erhalten wird, wenn man in der Identität

$$\sin\Delta B = \sin B_2\cos B_1 - \cos B_2\sin B_1$$

rechter Hand mittelst der Formeln (5) bis (7) S. 40 u. 41 die reduzierten Breiten einführt.

Die Rechnung nach diesen Formeln beginnt mit einer näherungsweisen Bestimmung von β_2 aus (7), soweit es mit Bequemlichkeit unter Anwendung *Gaufs*ischer Logarithmen möglich ist. (8) giebt durch successive Annäherungen $\sin\frac{\Delta\beta}{2}$, (9) alsdann $\sin\Delta B$.

Man hat nun weiter zur Berechnung von $L_{1.2}$ aus der 2. Formel (1):

$$\sin L_{1.2} = \frac{k}{a_0}\cos\mu_{1.2}\sec\beta_2\sin\alpha_{1.2} = \frac{k\sqrt{1-e^2}}{a_0\,w_2}\cos\mu_{1.2}\sec B_2\sin\alpha_{1.2}. \tag{10}$$

Um endlich noch $a_{2.1}$ zu finden, ist im allgemeinen Formel (4) S. 138 anzuwenden; in der Regel genügt es jedoch nach § 6 (2) S. 145 und § 8 (4) S. 151

$$\left.\begin{array}{l} \tan\frac{\varDelta a'}{2} = -\tan\frac{L_{1.2}}{2}\sin B \sec\frac{\varDelta B}{2} \\ \text{und} \\ a_{2.1} = a_{1.2} + 180^0 + \varDelta a' + \frac{1}{4}\varrho'' e^4 \sin L_{1.2} \sin^2 \varDelta B \sin B \cos^4 B + \cdots \end{array}\right\} \quad (11)$$

zu berechnen, wodurch $a_{2.1}$ noch für Werte von $k = 0{,}2\, a_0$ um nicht mehr als 0,0001″ unsicher erhalten wird.

Die vorstehenden Formeln gestatten nicht in allen Fällen eine befriedigende Lösung, insbesondere weil $\mu_{1.2}$, B_2 oder $\varDelta B$ und $L_{1.2}$ aus dem Sinus hergeleitet werden. Indessen wird das Bedürfnis, in praktischen Fällen wenigstens, sich immer nur auf mäfsig grofse Werte von $\mu_{1.2}$ und $\varDelta B$ erstrecken, die durch den Sinus bestimmbar sind. Dagegen kann $L_{1.2}$ auch bei kleinen Distanzen grofs werden, wenn die Punkte den Polen nahe liegen. Alsdann ist aber auch die Bestimmung von B_2 aus (7) bis (9) ungünstig, und man wird B_2 und $L_{1.2}$ besser aus der 2. Formel (1) und aus der 2. Formel (2) ermitteln.

Reihenentwicklungen werden zu Vorstehendem zunächst in Frage kommen können bei der indirekten Ermittlung von $\mu_{1.2}$ und $\varDelta B$. Für $\mu_{1.2}$ geben wir die Reihe weiterhin; ziemlicher Komplikation wegen ist sie zur Rechnung wenig geeignet und da für $\varDelta B$ dies in noch gröfserem Mafse gilt, übergehen wir hierfür diese Entwicklung ganz.

Sind $\varDelta B$ und $L_{1.2}$ klein, so kann eventuell die Anwendung der 1. Reihe (4) S. 30 auf $\sin \varDelta B$ und $\sin L_{1.2}$ nützlich sein, für die 1. Formel (11) aber die Entwicklung (2) S. 133.

Vertauscht man in Formel (10) die Indices 1 und 2 und setzt dann beide Ausdrücke für $\sin L_{1.2}$ einander gleich, so folgt die interessante und für später wichtige Gleichung:

$$\sin a_{1.2} \cos \beta_1 \cos \mu_{1.2} = \sin (a_{2.1} - 180^0) \cos \beta_2 \cos \mu_{2.1}, \quad (12)$$

welche überdies auch zur Berechnung von $a_{2.1}$ dienen kann, sobald $\mu_{2.1}$ aus Formel (4) (worin nur B_1 mit B_2 zu vertauschen ist, indem χ unverändert bleibt) hergeleitet wird. Indessen gehen wir weder hierauf noch auf die notwendigen Umformungen, damit $a_{2.1}$ stets hinlänglich scharf erhalten werde, ein. (Vergl. *Bremiker*, *Studien u. s. w.*, S. 34.)

§ 16. **Zahlenbeispiel I.** (Umkehrung des Zahlenbeispiels S. 158 u. ff.) Gegeben: $B_1 = 52^0\ 30'\ 16{,}7''$

$$\log k = 5{,}7241345.725 \qquad a_{1.2} = 239^0\ 33'\ 0{,}9324''.$$

Zu den *Formeln* (4), (5) und (6*) des vorigen Paragraphen hat man:

$$\log 2a_0 = 7{,}1056734.594$$

$$\log \frac{k}{2a_0} = 8{,}6184611.131 - 10$$

$$\log W_1 = 9{,}9990857.480 - 10$$

$$\log \frac{k W_1}{2a_0} = 8{,}6175468.611 - 10$$

$$[6{,}45 - 10] = 0{,}00028 \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\log M\delta = 7{,}47 - 10$$

$$\log \cos^2 a_{1.2} = 9{,}41 - 10$$

$$\log \cos^2 B_1 = 9{,}57 - 10$$

$$\text{Summa} = 6{,}45 - 10$$

1. Annäherung: $\log \sin \mu_{1.2} = 8{,}61783 - 10$; $\mu_{1.2} = 2^0\ 22'\ 38''$.

$$\log \cos a_{1.2} = 9{,}7048214.896_n - 10$$

$$\log \cot B_1 = 9{,}8849076.665 - 10$$

$$\log \cot h = 9{,}5897291.561_n - 10$$

$$h = -68^0\ 45'\ 13{,}6416''$$

$$\mu_{1.2} - h = 71^0\ 7'\ 52''$$

1. Annäherung

$$\log \sin a_{1.2} = 9{,}9355445.641_n - 10$$

$$\log \sin B_1 = 9{,}8994936.333 - 10$$

$$\log \sin h = 9{,}9694307.477_n - 10$$

$$\log \frac{\sin B_1}{\sin h} = 9{,}9300628.856_n - 10$$

$$\log \cos(\mu_{1.2} - h) = 9{,}509745 - 10$$

Änderung für 1″ gleich — 6,1 Einh. der 6. Dec.

$$\log \cos \chi = 9{,}439808_n - 10$$

$$\log \sqrt{\delta} = 8{,}913659 - 10$$

$$\log \tan u = 8{,}353467_n - 10.$$

Hierzu gehört $\log \sec u = 0{,}0001105.55$ mit 0,51 Einheiten der 9. Stelle Zuwachs für jede Einheit der 6. Stelle in $\log \tan u$.

Nunmehr wird in 2. Annäherung:

$$\log \sin \mu_{1.2} = \log \frac{k W_1}{2a_0} + 2 \times 0{,}0001105.55 = 8{,}6177679.71 - 10,$$

$$\mu_{1.2} = 2^0\ 22'\ 36{,}9242''$$

mit 0,000020″ Zuwachs für jede Einheit der 9. Decimalstelle in $\log \sin \mu_{1.2}$.

Es ist jetzt schärfer als oben $(\mu_{1.2} - h) = 71^0\ 7'\ 50{,}5658''$. Der Abnahme dieses Winkels im Betrage von 1,43″ entsprechen 9 Einheiten der 6. Stelle Zuwachs in $\cos(\mu_{1.2} - h)$, ferner $2 \times 9 \times 0{,}51 = 9$ Einheiten der 9. Stelle Zuwachs in $\sin \mu_{1.2}$, endlich 0,0002″ Zuwachs in $\mu_{1.2}$. Man hat daher definitiv:

$$\mu_{1.2} = 2^0\ 22'\ 36{,}9244'' \qquad \mu_{1.2} - h = 71^0\ 7'\ 50{,}5660''$$

$$\log \cos(\mu_{1.2} - h) = 9{,}5097537.572 - 10 \quad \log \cos \chi = 9{,}4398166.428_n - 10.$$

Man hat nun weiter zu den *Formeln* (7) und (8):

$$\left\{\begin{array}{ll} \log \sin \beta_1 = 9{,}8989537.055 - 10 & \log \sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.202 \quad - 10 \\ \log \dfrac{k \cos \chi}{a_0 \sqrt{1-e^2}} = 8{,}360762_n \quad - 10 & \log \dfrac{k \cos \chi}{2 a_0 \sqrt{1-e^2}} = 8{,}0597319.357\bar{1}_n - 10. \end{array}\right.$$

Die beiden linker Hand durch eine Klammer verbundenen Logarithmen geben mittelst 6ziffriger *Gaufs*ischer Logarithmen (da 7ziffrige dem Verf. nicht zur Hand)

$$\log \sin \beta_2 = 9{,}911353 - 10 \text{ und } \beta_2 = 54^0\ 37'\ 25''.$$

Andrerseits ist aus $\log \sin \beta_1$ der Wert von $\beta_1 = 52^0\ 24'\ 43{,}0115''$, genügend übereinstimmend mit dem S. 43 abgeleiteten strengern Werte:

$$\beta_1 = 52^0\ 24'\ 43{,}01137'',$$

falls man Formel (9) benutzt. Wir können aber diese Formel nicht bequem anwenden, da eine Tafel der $\log w$ auf 10 Ziffern fehlt, und wir gehen daher von dem mittelst (8) gefundenen β_2 zu B_2 über. Dann aber mufs für β_1 der strenge Wert zur Anwendung gelangen.

In erster Annäherung wird nun $\beta = 53^0\ 31'\ 4''$, $\log \sec \beta = 0{,}2257945.702$ mit 28.472 Zuwachs für 1″ in β; ferner:

$$\log \sin \frac{\varDelta \beta}{2} = 8{,}2855265 - 10; \quad \frac{\varDelta \beta}{2} = 1^0\ 6'\ 20{,}875''.$$

Hiermit folgt in 2. Annäherung $\beta = 53^0\ 31'\ 3{,}886''$, $\log \sec \beta = 0{,}2257942.456$ und

$$\log \sin \frac{\varDelta \beta}{2} = 8{,}2855261.813 - 10; \quad \frac{\varDelta \beta}{2} = 1^0\ 6'\ 20{,}87257''.$$

Eine Änderung von 0,00001″ in $\frac{\varDelta \beta}{2}$ ändert den log sin um 11 Einheiten der 10. Decimalstelle; da nun bei der vorigen Rechnung β um 0,00206″ zu grofs genommen worden ist, also $\log \sec \beta$ und $\log \sin \frac{\varDelta \beta}{2}$ um 59 Einheiten zu vermindern sind, ist auch $\frac{\varDelta \beta}{2}$ noch um 0,00005″ zu vermindern. Man hat daher definitiv:

$$\log \sin \frac{\varDelta \beta}{2} = 8{,}2855261.754 - 10; \quad \frac{\varDelta \beta}{2} = 1^0\ 6'\ 20{,}87252'';$$

$$\beta_2 = 54^0\ 37'\ 24{,}75641''.$$

Der Übergang von β_2 zu B_2 nach den Formeln des § 3, S. 41 u. ff. liefert: $B_2 - \beta_2 = \quad 5'\ 25{,}84361''$; hiermit ist

$$B_2 = 54^0\ 42'\ 50{,}60002''.$$

Zu *Formel* (10) hat man endlich $\log\cos\beta_2 = 9{,}7626381.919-10$

$\log\cos\mu_{1.2} = 9{,}9996261.786-10 \qquad \log\sin L_{1.2} = 9{,}0920236.596_n-10$

$$L_{1.2} = 7^0\ 6'\ 0{,}00000''\ \text{östlich.}$$

Es bleibt nun noch $\alpha_{2.1}$ zu berechnen, was wir indes unterlassen, da die Formeln (11) schon S. 159 u. 162 behandelt sind.

§ 17. **Zahlenbeispiel II.** (Umkehrung des Zahlenbeispiels S. 164.)
Gegeben: $B_1 = 57^0$

$\log k = 5{,}0791748.5 \qquad \alpha_{1.2} = 314^0\ 59'\ 59{,}988''.$

Zu den *Formeln* (4), (5) und (6*) S. 167 und 168 hat man:

$\log 2a_0 = 7{,}1056734.6-10$

$\log \frac{k}{2a_0} = 7{,}9735013.9-10$

$\log W_1 = 9{,}9989781.9-10$

$\log \frac{k W_1}{2a_0} = 7{,}9724795.8-10$

$[6{,}6363-10] = 0{,}0004328$ . . . . .

$\log M\delta = 7{,}4651-10$

$\log\cos^2 B_1 = 9{,}4722-10$

$\log\cos^2\alpha_{1.2} = 9{,}6990-10$

Summa $= 6{,}6363-10$

1. Annäherung: $\log\sin\mu_{1.2} = 7{,}9729124-10$; $\mu_{1.2} = 0^0\ 32'\ 17{,}96''$.

$\log\cos\alpha_{1.2} = 9{,}8494849.8-10$

$\log\cot B_1 = 9{,}8125173.6-10$

$\log\cot h = 9{,}6620023.4-10$

$h = 65^0\ 20'\ 7{,}403''$

$h-\mu_{1.2} = 64\ \ 47\ \ 49{,}443$ . . .

$\log\sin\alpha_{1.2} = 9{,}8494850.3_n-10$

$\log\sin B_1 = 9{,}9235914.0-10$

$\log\sin h = 9{,}9584521.3-10$

$\log\frac{\sin B_1}{\sin h} = 9{,}9651392.7-10$

$\log\cos(\mu_{1.2}-h) = 9{,}629232-10$

$\log\cos\chi = 9{,}594371-10$

$\log\sqrt{\delta} = 8{,}913659-10$

$\log\tan u = 8{,}508030-10$

1. Annäherung

$\log\frac{k W_1}{2a_0} = 7{,}9724795.8-10$

$2\log\sec u = 0{,}0004504.2$ . . . . $\log\cos u = 9{,}9997747.9-10$

$\log\sin\mu_{1.2} = 7{,}9729300.0-10$

$S = 4{,}6855684.7-10$

$\log\mu_{1.2}$ (in Sek.) $= 3{,}2873615.3$ . . . . $\mu_{1.2} = 0^0\ 32'\ 18{,}035''$

2. Annäherung:
(Sie giebt definitive Werte.)

$h-\mu_{1.2} = 64^0\ 47'\ 49{,}368''$ . . $\log\cos(\mu_{1.2}-h) = 9{,}6292321.0-10$

$\log\cos\chi = 9{,}5943713.7-10.$

Man hat nun weiter zu den *Formeln* (7) und (8) S. 168:

$$\left\{\begin{array}{l}\log\sin\beta_1 = 9{,}9231590.3 - 10\\ \log\dfrac{k\cos\chi}{a_0\sqrt{1-e^2}} = 7{,}870357 \quad -10\end{array}\right.$$

Durch Gauß'sche Logarithmen $\}\ \log\sin\beta_2 = 9{,}919296 \quad -10$

$$\beta_1 = 56^0\,54'\,44{,}315''$$

$$\beta_2 = 56^0\ \,8'\,29{,}6''$$

1. Annäherung $\beta = 56^0\,31'\,37{,}0''$

2. Annäherung $\beta = 56^0\,31'\,37{,}002''$ . . . . . $\dfrac{\varDelta\beta}{2} = -23'\,7{,}313''$.

$$\log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.2 \ -10$$

$$\left\{\begin{array}{rl}\log\dfrac{k\cos\chi}{2a_0\sqrt{1-e^2}} = & 7{,}5693269.4_n - 10\\ \log\sec\beta = & 0{,}2584192.3 + 31.8 \text{ für } 1''\\ \text{1. Annäherung} & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl}\log\sin\dfrac{\varDelta\beta}{2} = & 7{,}8277461.7_n - 10\\ S = & 4{,}6855715.9 \ -10\end{array}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log\frac{\varDelta\beta}{2}} = 3{,}1421745.8_n$$

Da β um $0{,}002''$ gewachsen ist, so ändern sich $\log\sec\beta$ und $\log\frac{\varDelta\beta}{2}$ um $+ 0.1$. Es geben nun die *Formeln* (9), (10) und (11) S. 168 u. 169:

$$\left\{\begin{array}{rl}\log\sin\dfrac{\varDelta\beta}{2} = & 7{,}8277461.8_n - 10\\ \log\cos\dfrac{\varDelta\beta}{2} = & 9{,}9999901.8 \ -10\\ \log 2\,W_1 = & 0{,}3000081.9\\ -\log w_2 = & 0{,}0004503.4\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl}\log\sin\varDelta B = & 8{,}1281948.9_n - 10\\ S = & 4{,}6855618.0 \ -10\end{array}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log\varDelta B} = 3{,}4426330.9_n$$

$$\varDelta B = -\ 0^0\,46'\,10{,}9781''$$

$$B_2 = 56^0\,13'\,49{,}0219''$$

$$\left\{\begin{array}{rl}\log\dfrac{k\sqrt{1-e^2}}{a_0} = & 8{,}2730772.1 \ -10\\ -\log w_2 = & 0{,}0004503.4\\ \log\cos\mu_{1.2} = & 9{,}9999808.3 \ -10\\ \log\sec B_2 = & 0{,}2550374.5\\ \log\sin\alpha_{1.2} = & 9{,}8494850.3_n - 10\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl}\log\sin L_{1.2} = & 8{,}3780308.6_n - 10\\ S = & 4{,}6855335.8 \ -10\end{array}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log L_{1.2}} = 3{,}6924972.8_n$$

$$L_{1.2} = -\ 1^0\,22'\,6{,}0326''.$$

$-\frac{1}{2}L_{1.2} = +2463{,}0163''$ . . .

$B = \ 56^0\,36'\,54{,}511''$ . . .

$\dfrac{\varDelta B}{2} = -\ \ 23'\ \,5{,}49''$ . . .

$$\left\{\begin{array}{rl}\log\left(-\dfrac{L_{1.2}}{2}\right) = & 3{,}3914672.9\\ T = & 4{,}6855955.1 \ -10\\ \log\sin B = & 9{,}9216830.0 \ -10\\ \log\sec\dfrac{\varDelta B}{2} = & 0{,}0000098.0\end{array}\right.$$

$\varDelta\alpha$ kann gleich $\varDelta\alpha'$ gesetzt werden, daher ist:

$$\left\{\begin{array}{rl}\log\tan\dfrac{\varDelta\alpha'}{2} = & 7{,}9987556.0 \ -10\\ T = & 4{,}6855892.6 \ -10\end{array}\right.$$

$\dfrac{\varDelta\alpha}{2} = +0^0\,34'\,16{,}6782''$ . . . . $\underset{\text{in Sek.}}{\log\dfrac{\varDelta\alpha'}{2}} = 3{,}3131663.4$

$\varDelta\alpha = \ 1^0\ \,8'\,33{,}356''$ . . . . . $\alpha_{2.1} = 136^0\,8'\,33{,}344''$.

$$\text{Resultate:}\quad \begin{cases} B_2 = & 56^0\ 13'\ 49{,}0219'' \\ L_{1.2} = & 1\ \ 22\ \ \ 6{,}0326 \text{ östlich} \\ a_{2.1} = & 136\ \ \ 8\ \ 33{,}344. \end{cases}$$

§ 18. **Reihenentwicklung für den Depressionswinkel μ.** Nach S. [illegible] ist

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{k W_1}{2 a_0}(1 + \delta \cos^2 \chi), \tag{1}$$

wobei

$$\cos \chi = \cos \mu_{1.2} \cos B_1 \cos a_{1.2} + \sin \mu_{1.2} \sin B_1. \tag{2}$$

Außerdem hat man nach S. 58 (1):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{W_1}{a_0} (1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}), \tag{3}$$

wenn ϱ den Krümmungsradius des Vertikalschnitts im Azimut $a_{1.2}$ für den Punkt P_1 mit der geographischen Breite B_1 bedeutet. Augenscheinlich ist es vorteilhaft, $\mu_{1.2}$ mit Benutzung von ϱ zu entwickeln, weil bei unendlich kleinem k jedenfalls $\sin \mu_{1.2} = \mu_{1.2} = k:2\varrho$ werden mufs. Es ist nun nach (1) und (3):

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{k}{2\varrho}\ \frac{1 + \delta \cos^2 \chi}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}}$$

oder

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{k}{2\varrho} \left\{ 1 + (\cos^2 \chi - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}) \frac{\delta}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}} \right\}. \tag{4}$$

Durch Umwandlung von (2) findet man aber leicht:

$$\begin{aligned} \cos^2 \chi - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2} = {} & \sin^2 \mu_{1.2} (\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}) \\ & + 2 \sin \mu_{1.2} \cos \mu_{1.2} \cos B_1 \sin B_1 \cos a_{1.2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Entwickeln wir hierin $\cos \mu_{1.2}$ nach Potenzen von $\sin \mu_{1.2}$ und setzen vorübergehend zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta \frac{k}{2\varrho}}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}} (\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}) &= c_1 \\ \frac{\delta \frac{k}{2\varrho}}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}} \sin 2B_1 \cos a_{1.2} \qquad\qquad &= c_2, \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

so folgt nach einfacher Reduktion durch Einführung von (5) in (4):

$$(1 - c_2) \sin \mu_{1.2} = \frac{k}{2\varrho} + c_1 \sin^2 \mu_{1.2} - \frac{1}{2} c_2 \sin^3 \mu_{1.2} + \cdots \tag{7}$$

Der vernachlässigte Rest ist, wenn wir k und also auch $\sin \mu_{1.2}$ als

kleine Gröfse voraussetzen, im Maximum nahezu $\frac{1}{8} c_2 \sin^5 \mu_{1.2}$ d. h. eine Gröfse von der 8. Ordnung. Multipliziert mit ϱ'' giebt dies für $\mathfrak{k} = 0{,}1\, a_0$ als maximalen Einflufs auf $\mu_{1.2}$ nur 0,000003″.

Dividiert man die Gleichung (7) mit $(1 - c_2)$, so folgt:

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho\,(1 - c_2)} + c_1 \sin^2 \mu_{1.2} - \frac{1}{2} c_2 \sin^3 \mu_{1.2} + Gl_8,$$

welche Formel im Vergleich zu (7) hauptsächlich noch ein Glied $c_1 c_2 \sin^2 \mu_{1.2}$ vernachlässigt, welches auch von der 8. Ordnung ist und höchstens in den Hunderttausendstelsekunden merkbar wird. Wenn man nun noch rechter Hand für $\sin \mu_{1.2}$ das Hauptglied linker Hand setzt und schreibt:

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho\,(1 - c_2)} \left\{ 1 + c_1 \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} - \frac{1}{2} c_2 \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + Gl_7 \right\}$$

oder

$$\log \sin \mu_{1.2} = \log \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho\,(1 - c_2)} + M \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \left\{ c_1 - \frac{1}{2} c_2 \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \right\} + Gl_7, \tag{8}$$

so bleibt die Genauigkeit unverändert, da die hierbei neuerdings begangenen Fehler noch eine Ordnung höher sind, als die bis dahin zugelassenen. Die zur Berechnung nach (8) erforderlichen Ausdrücke (6) für c_1 und c_2 gehen mittelst der Formel (3) über in:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \delta \frac{\mathfrak{k} W_1}{2 a_0} (\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}) \\ c_2 &= \delta \frac{\mathfrak{k} W_1}{2 a_0} \sin 2 B_1 \cos a_{1.2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Indem wir nun auf den oben gefundenen Ausdruck für $\sin \mu_{1.2}$ die 1. Reihe (4) S. 30 mit $u = \mu_{1.2}$ anwenden, findet sich direkt für $\mu_{1.2}$ selbst:

$$\left.\begin{aligned} \log \mu_{1.2} = \log \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho\,(1 - c_2)} &+ M \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \left(c_1 - \frac{1}{6} c_2 \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} + \frac{1}{3} c_1 \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 \right) \\ &+ \frac{M}{6} \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 \left(1 + \frac{11}{30} \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{191}{945} \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 \right) + Gl_7. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die hierbei vernachlässigten Glieder 7. Ordnung haben in $\mu_{1.2}$ wie bisher nur auf die Hunderttausendstelsekunden Einflufs. Vernachlässigt man auch noch die Glieder 6. Ordnung:

$$M \left(\frac{1}{3} c_1 \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + \frac{191}{5670} \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^6 \right),$$

deren Einflufs auf $\mu_{1.2}$ in Sekunden gleich ist dem vorstehenden Ausdruck mal $\frac{\varrho''}{M} \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}$, so wird der Fehler für $\mathfrak{k} = 0{,}1\, a_0$ im Maximum gleich 0,00014″, was indessen in der Regel ohne Belang bleibt.

Wir erhalten nun, indem wir auch noch den Nenner $(1 - c_2)$ des 1. Gliedes rechter Hand der Formel (10) in eine Reihe entwickeln:

$$\log \underset{\text{in Sek}}{\mu_{1.2}} = \log \frac{\varrho'' \mathfrak{k}}{2\varrho} + M\left\{\frac{1-c_2}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + c_2 + c_1\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) + \frac{11}{180}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \frac{1}{2}c_2^2\right\} + Gl_6, \quad (11)$$

ϱ zu den Argumenten B_1 und $a_{1.2}$.

Diese Formel giebt erst für $\mathfrak{k} = 0{,}1\,a_0$ die Zehntausendstelsekunden von $\mu_{1.2}$ nicht mehr ganz scharf.

Setzen wir endlich in weiterer Vereinfachung:

$$\left.\begin{array}{c}\log \underset{\text{in Sek.}}{\mu_{1.2}} = \log \frac{\varrho'' \mathfrak{k}}{2\varrho} + M\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + c_2 + c_1 \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right\} + Gl_4, \\ \varrho \text{ zu den Argumenten } B_1 \text{ und } a_{1.2},\end{array}\right\} \quad (12)$$

so ist der Fehler in dem hiermit berechneten $\mu_{1.2}$ für $\mathfrak{k} = 0{,}1\,a_0$ zwar einige Tausendstelsekunden, er sinkt aber für $\mathfrak{k} = 0{,}02\,a_0$ auf weniger als 0,00001″ herab, wie die Betrachtung der im Vergleich zu (11) vernachlässigten Glieder zeigt.

§ 19. **Zahlenbeispiel I,** vergl. S. 170, giebt zu *Formel* (3), (9) und (11):

$$\begin{cases}\log\cos a_{1.2} = 9{,}7048215_n - 10 \\ \log\cos B_1 = 9{,}7844013 - 10 \\ \log\sqrt{\delta} = 8{,}9136594 - 10\end{cases}$$
$$\log\tan h' = 8{,}4028822_n - 10\,^{*)}$$

$$\begin{cases}\log\sin^2 B_1 = 9{,}798987 - 10 \\ \log\cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2} = 8{,}978446 - 10\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log\frac{\mathfrak{k}\,W_1}{2a_0} = 8{,}6175468.611 - 10 \\ \log\sec^2 h' = 0{,}0002775.938 \\ \log\varrho'' = 5{,}3144251.332\end{cases}$$

$$\log\frac{\varrho''\mathfrak{k}}{2\varrho} = 3{,}9322495.88 - 10$$
$$\log\delta = 7{,}827319 - 10$$

Mittelst Gaussischer Logarithmen:
$$\begin{cases}\log\delta\frac{\mathfrak{k}\,W_1}{2a_0} = 6{,}444865 - 10 \\ \log(\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1\cos^2 a_{1.2}) = 9{,}727809 - 10\end{cases}$$
$$\log c_1 = 6{,}172674 - 10.$$

Andrerseits ist hiermit $\log\sin 2B_1\cos a_{1.2} = 9{,}689747_n - 10$
$$\log c_2 = 6{,}134612_n - 10.$$

Mittelst des auf Einheiten der 7. Decimalstelle reduzierten $\log M = 6{,}6377784$ erhält man nun weiter:

$$\log\frac{\varrho''\mathfrak{k}}{2\varrho} = 3{,}9322495.88 - 10$$
$$+\frac{M}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 = \quad +1245.32 \qquad \log = 3{,}095282$$

*) h' bezeichnet hier den S. 5? (2) zur Berechnung von ϱ angewandten Hilfswinkel h.

$-\frac{M}{6}\left(\frac{k}{2\varrho}\right)^2 c_2 =$	$+$	.17	0,230—1
$+ Mc_2 =$	$-$	592.09	2,77239$_n$
$+ M\left(\frac{k}{2\varrho}\right) c_1 =$	$+$	26.81	1,4283
$+\frac{11 M}{180}\left(\frac{k}{2\varrho}\right)^4 =$	$+$	.79	0,895—1
$+ M\frac{c_2^2}{2} =$	$+$	4	0,60—2
$\log \mu_{1.2}$ (in Sek.) $=$		3,9323176.92	$\mu_{1.2} = 8556,9243''$,

was mit der Berechnung auf S. 170 hinreichend übereinstimmt.

Zahlenbeispiel II giebt im Anschlufs an S. 172 nach *Formel* (12) S. 176:

$$\begin{cases}\log \frac{1}{6} M = 5{,}8596 \text{ für Einh. der 7. Dec.}\\ \log\left(\frac{k}{2\varrho}\right)^2 = 5{,}9458-10\end{cases}$$

$$\log\left(\frac{1}{6} M\left(\frac{k}{2\varrho}\right)^2\right) = 1{,}8054$$

$$\log\left(M\delta\frac{k W_1}{2a_0}\right) = 2{,}4376$$

$$\begin{cases}\log \sin^2 B_1 = 9{,}8472-10\\ \log(\cos^2 B_1 \cos^2 \alpha_{1.2}) = 9{,}1712-10\end{cases}$$

Durch Gaufsische Log.: $\log(\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 \alpha_{1.2}) = 9{,}7444-10$

$$\log \sin 2B_1 \cos \alpha_{1.2} = 9{,}8102-10$$

$$\log Mc_1 = 2{,}1820$$

$$\log Mc_2 = 2{,}2478$$

$$\log\left(Mc_1\frac{k}{2\varrho}\right) = 0{,}1549$$

$$\begin{cases}\log\frac{k}{2\varrho} = 7{,}9729124-10\\ \log \varrho'' = 5{,}3144251\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log\frac{\varrho'' k}{2\varrho} = 3{,}2873375\\ [1{,}8054] = + \quad 63.9\\ [2{,}2478] = + \quad 176.9\\ [0{,}1549] = + \quad 1.4\end{cases}$$

$$\log \mu_{1.2} \text{ (in Sek.)} = 3{,}2873617$$

$$\mu_{1.2} = 32'\ 18{,}035''.$$

§ 20. **Rektifikation des Vertikalschnitts.** Für einzelne Anwendungen ist es erforderlich, die Beziehung zwischen den Längen der Sehne und des Vertikalschnitts bei kleinen Beträgen der Entfernung kennen zu lernen. Diese Beziehung läfst sich aber mit Benutzung der S. 175 für $\sin \mu_{1.2}$ gefundenen Formel aufstellen, welche lautet:

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{k}{2\varrho(1-c_2)}\left\{1 + c_1\frac{k}{2\varrho} - \frac{1}{2} c_2\left(\frac{k}{2\varrho}\right)^2 + Gl_7\right\}. \qquad (1)$$

Hierbei erscheint $\mu_{1.2}$ als Funktion von k, B_1 und $\alpha_{1.2}$. Für den

Zweck der Rektifikation betrachten wir nun $\mathfrak{k}$ als Radiusvektor und $\mu_{1.2}$ als Anomalie, mithin beide als variabel, alle andern Gröfsen als konstant. Zu diesen letztern zählt auch ϱ (Argumente: B_1 und $a_{1.2}$), während c_1 und c_2 die Variable $\mathfrak{k}$ als Faktor enthalten. Wir trennen daher von c_1 und c_2 (vergl. die (6) S. 174) die konstanten Teile

$$\left.\begin{aligned} c_1' &= \frac{\delta\,(\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2})}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}} \\ c_2' &= \frac{\delta \sin 2B_1 \cos a_{1.2}}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ab und erhalten nun aus (1), indem wir noch den Nenner $(1 - c_2)$ auf der rechten Seite in eine Reihe entwickeln, sowie ein Glied 7. Ordnung, welches von $\delta^2 \mathfrak{k}^3$ abhängt, vernachlässigen:

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\left\{1 + c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) + c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 - \frac{1}{2}\,c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + Gl_6\right\}.$$

Hieraus folgt mittelst der 1. Formel (2) S. 29:

$$\mu_{1.2} = \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^5 + c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + Gl_7. \quad (3)$$

Bezeichnet man aber das Bogendifferential des Vertikalschnitts mit ds, so ist nach bekannter Formel für Polarkoordinaten:

$$ds^2 = d\mathfrak{k}^2 + \mathfrak{k}^2 d\mu_{1.2}^2.$$

Man hat nun durch Differentiation des Ausdrucks (3) für $\mu_{1.2}$ und durch Multiplikation mit $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{k}\,d\mu_{1.2} = \left\{\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^5 + 2c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + 3c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + Gl_7\right\} d\mathfrak{k}.$$

Damit erhält man leicht:

$$ds^2 = d\mathfrak{k}^2\left\{1 + \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^6 + 4c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + 6c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_7\right\}$$

und

$$ds = d\mathfrak{k}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^6 + 2c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + 3c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_7\right\}.$$

Hieraus folgt durch Integration von $\mathfrak{k} = 0$ bis $\mathfrak{k}$ der über der Sehne $\mathfrak{k}$ liegende Bogen $s_{1.2}$ des Vertikalschnitts von P_1 nach P_2:

$$\left.\begin{aligned} s_{1.2} = \mathfrak{k}\left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{3}{40}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \frac{5}{112}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^6 + \frac{c_2'}{2}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3c_1'}{5}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_7\right\}; \\ \varrho \text{ zu den Argumenten } B_1 \text{ und } a_{1.2}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Um $s_{1.2}$ aus $\mathfrak{k}$ und ϱ als Kreisbogen berechnen zu können, mufs man die in c'_2 und c'_1 multiplizierten Glieder vernachlässigen dürfen. Das Maximum des ersteren, gröfsern, hat auf $\log s_{1.2}$ den Einflufs

$$\frac{1}{2} M\delta \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3,$$

was für $\mathfrak{k} = 0{,}04\, a_0$ in $\log s_{1.2}$ eine Einheit der 8. Decimalstelle ergiebt.

Bei gleicher Genauigkeit vereinfacht sich diese Formel etwas, indem man anstatt ϱ das geometrische Mittel der beiden ϱ mit den Argumenten B_1 und $a_{1.2}$ bezw. B_2 und $a_{2.1}$ einführt.

Nennen wir diese beiden ϱ für den Augenblick ϱ_1 und ϱ_2, so hat man nach S. 58 (1):

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\varrho_1} &= \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}{a_0}(1+\delta\cos^2 B_1\cos^2 a_{1.2})\\ \frac{1}{\varrho_2} &= \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{a_0}(1+\delta\cos^2 B_2\cos^2 a_{2.1})\,.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Relation $\delta = e^2 : (1-e^2)$ und unter Vernachlässigung von Gliedern mit δ^2 zunächst:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{a_0}\left(1+\delta\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \sin^2 a_{1.2}\right)+\cdots\right)$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{a_0}\left(1+\delta\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 B_2 - \cos^2 B_2 \sin^2 a_{2.1}\right)+\cdots\right),$$

und weiter:

$$\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{\delta}{a_0^2}\left(\frac{3}{2}(\sin^2 B_2-\sin^2 B_1)+(\cos^2 B_2\sin^2 a_{2.1}-\cos^2 B_1\sin^2 a_{1.2})\right)+\cdots.$$

Nach (6) S. 148 unterscheiden sich aber die Azimute $a_{1.2}$ und $a_{2.1}$ von den daselbst eingeführten Azimuten $a'_{1.2}$ und $a'_{2.1}$ nur um Gröfsen der Ordnung e^2 oder δ. Nun ist nach dem Sinussatz im sphärischen Dreieck (1) S. 144:

$$\sin^2 a'_{2.1}\cos^2 B_2 = \sin^2 a'_{1.2}\cos^2 B_1\,,$$

folglich ist $\sin^2 a_{2.1}\cos^2 B_2 - \sin^2 a_{1.2}\cos^2 B_1$ nur eine Gröfse der Ordnung δ. Mit Vernachlässigung von δ^2 wie bisher, ist daher:

$$a_0^2\left(\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right) = \frac{3}{2}\delta(\sin^2 B_2 - \sin^2 B_1) + Gl_5\,. \qquad (6)$$

Der Rest der Entwicklung rechter Hand ist als Glied 5. Ordnung angesetzt, da er aufser δ^2 noch den Faktor $\mathfrak{k}$ enthalten mufs, um mit $\mathfrak{k}$ = null zu verschwinden.

Auch $\sin^2 B_2 - \sin^2 B_1$ enthält den Faktor $\mathfrak{k}$; es ist nämlich nach S. 167 (2) und (4) ohne Schwierigkeit zu finden, dafs man setzen kann:

$$\sin^2 B_2 - \sin^2 B_1 = -\frac{2\mathfrak{k}}{a_0} \sin B \cos \chi + Gl_3$$

und hiernach aus (6):

$$\frac{\mathfrak{k}^2}{\varrho_1^2} - \frac{\mathfrak{k}^2}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{3\delta \mathfrak{k}^3}{a_0^3} \sin B \cos \chi + Gl_7. \tag{7}$$

Bezeichnen wir jetzt $\varrho_1 \varrho_2$ kurz mit ϱ^2, so ergiebt die Einführung von (7) in Formel (4) mit einigen weiteren leicht zu ersehenden Vernachlässigungen

$$s_{1.2} = \mathfrak{k} \left\{ 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{3}{40}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \frac{5}{112}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^6 - \delta \sin B \cos \chi \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 \right.$$
$$\left. + \frac{c_2'}{2}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3c_1'}{5}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_7 \right\}. \tag{8}$$

Die in der Parenthese vernachlässigten Glieder 7. Ordnung hängen von $\delta \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^5$ und $\delta^2 \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3$ ab und dürften kaum für $\mathfrak{k} = 0{,}1\, a_0$ in der 9. Stelle des $\log s_{1.2}$ merkbar werden.

Man kann nun mit Beibehaltung dieser Genauigkeit jedenfalls auch in c_2' und c_1' die Glieder mit δ^2 vernachlässigen. Die 3 letzten Glieder rechter Hand in (8) gehen dann, abgesehen vom Faktor $\mathfrak{k}$, wenn man noch für $\cos \chi$ substituiert

$$\cos \chi = \cos B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \sin B_1 + Gl_2, \tag{9}$$

in den Ausdruck über:

$$\delta \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 \left\{ -\sin B \cos B_1 \cos \alpha_{1.2} + \sin B_1 \cos B_1 \cos \alpha_{1.2} \right.$$
$$\left. - \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \left(\sin B \sin B_1 - \frac{3}{5} \sin^2 B_1 + \frac{3}{5} \cos^2 B_1 \cos^2 \alpha_{1.2}\right) \right\} + Gl_7.$$

Es ist aber nach (2) S. 167:

$$\sin B_2 = \sin B_1 - \frac{\mathfrak{k}}{\varrho} \cos \chi + Gl_2;$$

da ferner $\sin B_2 + \sin B_1 = 2 \sin B \cos \frac{\Delta B}{2}$ ist, so erhält man mit Rücksicht auf (9):

$$\sin B = \sin B_1 - \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \cos B_1 \cos \alpha_{1.2} + Gl_2,$$

wodurch sich der obige Ausdruck für die 3 letzten Glieder von (8) unter Verschwinden der Glieder 5. Ordnung reduziert auf

$$\frac{2}{5}\,\delta\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 (\cos^2 B \cos^2 a - \sin^2 B) + \cdots. \tag{10}$$

Hierbei ist a in der Bedeutung (4) S. 156 genommen.

Der Einfluſs von (10) auf $\log s_{1.2}$ ist Mmal so groſs und für $\mathfrak{k} = 0{,}1\, a_0$ und $0{,}05\, a_0$ noch keine Einheit der 8. bezw. der 9. Decimalstelle. Wir haben demnach mit Benutzung einiger weiteren leicht zu ersehenden Reduktionen und geringfügigen Vernachlässigungen, wenn zugleich der Index 1.2 von s wegbleibt:

$$\left.\begin{aligned} s &= \begin{cases} = \mathfrak{k}\left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{3}{40}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_6\right\} \\ = 2\varrho\left\{\arcsin\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} + Gl_7\right\}; \end{cases} \\ \log s &= \log \mathfrak{k} + \frac{1}{6} M \left\{\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{11}{30}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4\right\} + Gl_6 \\ \log\frac{M}{6} &= 5{,}8596331 \text{ u. } \log\frac{11M}{180} = 5{,}4239 \ {}^{\text{für Einh.}}_{\text{der 7. Dec.}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Diese Formeln geben erst bei $\mathfrak{k} = 0{,}05\, a_0$ nicht mehr die 10. Decimalstelle des Logarithmus richtig, bei $\mathfrak{k} = 0{,}1\, a_0$ aber wenigstens noch 8 Decimalen sicher.

Zur Berechnung des in (11) auftretenden ϱ erhält man aus (5):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{W}{a_0}(1 + \delta\cos^2 B \cos^2 a + Gl_4) \\ \log\varrho &= \log a_0 - \log W - M\delta\cos^2 B\cos^2 a + Gl_4 \\ W &\text{ zum Argument } B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \\ a &= \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} - 180^0). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Von der Richtigkeit der 1. Formel (12) überzeugt die Entwicklung (9) S. 26, wonach offenbar

$$W_1 W_2 = W^2 + Gl_4$$

$$(1 + \delta\cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2})(1 + \delta\cos^2 B_2 \cos^2 a_{2.1}) = 1 + \delta\cos^2 B\cos^2 a + Gl_4.$$

Die Gl_4 sind abhängig von $e^2\,\frac{\mathfrak{k}^2}{a_0^2}$ und zwar *kleine* Glieder auch noch für die Nähe der Pole, wie a priori zu erwarten ist und durch eingehendere Betrachtung bestätigt wird.

Die Formel (11) ist nicht nur dadurch interessant, daſs sie die Möglichkeit zeigt, mit groſser Annäherung *die Länge des Vertikalschnittes aus der Sehne bei geeigneter Wahl von ϱ wie die eines Kreisbogens* berechnen zu können; sie zeigt auſserdem, daſs die Längen

der Vertikalschnitte von P_1 nach P_2 und von P_2 nach P_1 nur um Glieder sehr hoher Ordnung von einander abweichen. In welcher Ordnung die Differenz hervortritt, läfst sich aus (11) noch nicht erkennen; man müfste zu dem Zwecke die Entwicklungen weiter treiben. Dazu ist aber jetzt keine Veranlassung, umsomehr als jene Differenz später bei andrer Gelegenheit sich nebenher ergiebt.

Schreibt man (11) in der Form $\log \mathfrak{k} = \log 2\varrho + \log \sin \frac{s}{2\varrho}$ und beachtet die Formel (6) S. 157, so folgt

$$\log \sin \frac{s}{2\varrho} = \log \sin \frac{\sigma'}{2} - \frac{1}{8} Me^4 \cos^4 B \sin^2 2a + \frac{1}{8} Me^2 \Delta B^2 (\cos 2B - 2 \sin^2 a) + Gl_6$$

und hieraus

$$\log s = \log (\sigma' \varrho) - \frac{1}{8} Me^4 \cos^4 B \sin^2 2a + \frac{1}{8} Me^2 \Delta B^2 (\cos 2B - 2 \sin^2 a) + Gl_6, \quad (13)$$

wobei ϱ nach (12) zu berechnen ist und σ' sich auf das sphärische Dreieck (1) S. 144 bezieht. Berechnet man ϱ (anstatt mit a) mit a', so sind die kleinen Glieder in (13) mit denen von (3) S. 156 zu vertauschen.

Diese Formel (13) ist wie (6) S. 157 in der 8. Decimalstelle, unabhängig von der Entfernung, nicht ganz scharf.

§. 21. **Zahlenbeispiel I,** vergl. S. 170 und 176, giebt zu *Formel* (11) S. 181 bei strenger Berechnung der Krümmungsradien:

$\log \varrho = 6{,}8053644$ für $B = 53^0\,36'\,34''$ und $a = 242^0\,24'\,35''$ nach S. 163

$\begin{cases} 6{,}8052801 \text{ für } B_1 = 52\;\;30\;\;17 & \text{und } a_{1.2} = 239\;\;33\;\;\;1 \text{ nach S. 176} \\ 6{,}8054409 \text{ für } B_2 = 54\;\;42\;\;51 & \text{und } a_{2.1} = \;\;65\;\;16\;\;10; \end{cases}$ hieraus folgt

$\log \varrho = 6{,}8053605$, genau $\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}$ S. 180 entsprechend.

Die Anwendung der Formel (12) S. 181 bezw. (3) S. 59 zur Berechnung der drei $\log \varrho$ führt zu Werten, die kaum um 1 Einheit der 7. Decimalstelle abweichen.

Man erhält nun zu der *3. Formel* (11) S. 181:

	mit $\log \varrho = 6{,}8053644$	mit 6,8053605
$\log \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} =$	8,6177402 — 10	8,6177441 — 10
$\log \mathfrak{k} =$	5,7241345.725	5,7241345.725
$\frac{1}{6} M \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 =$	+ 1244.840	+ 1244.862
$\frac{11}{180} M \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 =$	+ 0.785	+ 0.785
$\log s =$	5,7242591.350	5,7242591.372.

Berücksichtigt man für den 2. dieser Werte die Glieder 6. Ordnung nach (8) S. 180 bezw. (10) S. 181, so ergiebt sich . . . 5,7242591.353.

Es wird sich später zeigen, dafs dieser Wert bis zur 10. Stelle incl. richtig ist. Dies vorausgesetzt, findet man aus der Vergleichung mit dem 1. Wert von $\log s$ (welchen $\log \varrho$ mit den Argumenten B und a giebt), dafs derselbe auch *ohne* Berücksichtigung der Glieder 6. Ordnung sehr genau ist.

Zahlenbeispiel II, vergl. S. 172, giebt $\log \varrho = 6{,}805$ und

$$\log s = 5{,}0791748.5 + 64.0 + 0.0 = 5{,}0791812.5,$$

welcher Wert sich später ebenfalls bestätigen wird.

§. 22. **Azimutalunterschied der Vertikalschnitte.** Im Anschlufs an die Entwicklungen der Paragraphen 1 und 2 dieses Kapitels S. 134 u. ff. stellen wir die Gleichung der Vertikalebene von P_2 nach P_1 auf. Da diese letztere durch den Koordinatenanfang geht, ist ihre Gleichung von der Form:

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0. \tag{1}$$

Denkt man sich die Koefficienten A, B und C bereits ermittelt, so dient alsdann zur Bestimmung des Azimuts $a'_{1.2}$ des Vertikalschnitts von P_2 nach P_1 in P_1 die Beziehung:

$$\cot a'_{1.2} = -\frac{B}{A}. \tag{2}$$

Die Gleichung (1) wird dadurch bekannt, dafs man sie auf P_2 und K'_2 (Fig. 8 S. 134) anwendet. Nach (4) S. 136 ist für P_2:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= (x_2 - x_1)\sin B_1 - (z_2 - z_1)\cos B_1 \\ \eta_2 &= y_2 \\ \zeta_2 &= -(x_2 - x_1)\cos B_1 - (z_2 - z_1)\sin B_1. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Es ist ferner mit Beachtung des Umstands, dafs für K'_2 die Koordinaten x'_2 und y'_2 gleich null sind:

$$\left.\begin{aligned} \xi'_2 &= -x_1 \sin B_1 - (z'_2 - z_1)\cos B_1 \\ \eta'_2 &= 0 \\ \zeta'_2 &= +x_1 \cos B_1 - (z'_2 - z_1)\sin B_1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Werte x_2, y_2 und z_2 sind in (3) S. 136 angegeben; ferner ist nach (9) S. 41:

$$z'_2 = -\frac{a_0 e^2 \sin B_2}{W_2}. \tag{5}$$

Man hat nun durch Anwendung von Gleichung (1) auf die Punkte P_2 und K'_2:

$$\begin{aligned} A\xi_2 + B\eta_2 + C\zeta_2 &= 0 \\ A\xi'_2 + B\eta'_2 + C\zeta'_2 &= 0 \end{aligned}$$

und kann hieraus die Verhältnisse $(B:A)$ und $(C:A)$ bestimmen. Es wird insbesondere:

$$\cot a'_{1.2} = -\frac{B}{A} = \frac{\xi_2 \zeta'_2 - \xi'_2 \zeta_2}{\eta_2 \zeta'_2 - \eta'_2 \zeta_2}$$

und hieraus mittelst (3) und (4):

$$\cot a'_{1.2} = \frac{(z'_2 - z_2)\, x_1 - (z'_2 - z_1)\, x_2}{y_2\,(x_1 \cos B_1 - (z'_2 - z_1) \sin B_1)}. \tag{6}$$

Wenn man hierin den Wert von z'_2 nach (5) substituiert und ferner x_1, z_1, x_2, y_2 und z_2 mittelst nachstehender Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_0 \cos B_1 : W_1 \\ z_1 &= a_0 (1 - e^2) \sin B_1 : W_1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= a_0 \cos B_2 \cos L_{1.2} : W_2 \\ y_2 &= a_0 \cos B_2 \sin L_{1.2} : W_2 \\ z_2 &= a_0 (1 - e^2) \sin B_2 : W_2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

eliminiert, so ergiebt sich durch einfache Reduktionen der Ausdruck:

$$\cot a'_{1.2} = \frac{\dfrac{\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1}{\cos B_2 \sin L_{1.2}} + e^2 \cot L_{1.2} \left(\dfrac{W_1}{W_2} \sin B_2 - \sin B_1\right)}{1 + e^2 \sin B_1 \left(\dfrac{W_1}{W_2} \sin B_2 - \sin B_1\right)}. \tag{9}$$

Aus dieser Formel kann man $a'_{1.2}$ bei gegebener geographischer Lage der Punkte bestimmen. Ebenso läfst sich aus derselben im Verein mit der Formel (6) S. 139 für $\cot a_{1.2}$ *das gegenseitige Verhalten der Vertikalschnitte* im allgemeinen erkennen, noch einfacher indes geometrisch aus der Betrachtung der relativen Lage der Punkte K'_1 und K'_2 zur Sehne $P_1 P_2$ in Fig. 8 S. 134. Man bemerkt auf die eine oder andere Art leicht, dafs für nahezu diametrale Punkte die Differenz von $a'_{1.2}$ und $a_{1.2}$ auf $\pm 180^0$ steigen kann. Klein ist die Differenz im allgemeinen nur bei kleinen Entfernungen und für solche mag dieselbe jetzt noch dargestellt werden.

Bezeichnen wir entsprechend dem sphärischen Dreieck (1) S. 144

$$\frac{\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1}{\cos B_2 \sin L_{1.2}} \text{ mit } \cot \alpha'_{1.2}$$

und ferner vorübergehend

$$\left.\begin{aligned} \sin B_2 - \frac{W_2}{W_1} \sin B_1 &\text{ mit } p_1 \\ \frac{W_1}{W_2} &\text{ mit } q_1\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

so ist nach (9) bezw. nach (3) S. 145:

$$\cot a'_{1.2} = \frac{\cot \alpha'_{1.2} + e^2 \cot L_{1.2} \cdot p_1 q_1}{1 \quad + e^2 \sin B_1 \cdot p_1 q_1}, \tag{11}$$

$$\cot a_{1.2} = \cot \alpha'_{1.2} + \frac{e^2 \cos B_1}{\cos B_2 \sin L_{1.2}} p_1. \tag{12}$$

Indem wir beide Gleichungen von einander subtrahieren, sowie unter Anwendung der Relationen:

$$\cot L_{1.2} \sin \alpha'_{1.2} - \cot \sigma' \cos B_1 = \sin B_1 \cos \alpha'_{1.2} \tag{13}$$

und

$$\cos B_2 \sin L_{1.2} = \sin \sigma' \sin \alpha'_{1.2}, \tag{14}$$

welche sich auf das schon oben erwähnte sphärische Hilfsdreieck beziehen, einige Vereinfachungen vornehmen, erhalten wir:

$$\cot a'_{1.2} - \cot a_{1.2} = \frac{e^2 p_1 \cos B_1}{\sin \sigma' \sin \alpha'_{1.2}} \left(-1 + \frac{q_1 \cos \sigma'}{1 + e^2 p_1 q_1 \sin B_1}\right). \tag{15}$$

Zur weitern Vereinfachung der rechten Seite dieser Gleichung erinnern wir an die Formeln (1) S. 140 und (9) S. 146, wonach

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin 2B \sin \varDelta B + Gl_5 \\ &\text{und} \\ p_1 &= 2 \sin \frac{\varDelta B}{2} \cos B \,(1 + e^2 \sin B_1 \cos B + Gl_4), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wenn $\varDelta B$ als Gröfse 1. Ordnung betrachtet wird. Hieraus folgt

$$\frac{p_1}{\sin \sigma'} = \frac{\sin B_2 - \sin B_1}{\sin \sigma'} (1 + e^2 \sin B_1 \cos B + Gl_4);$$

man hat aber $\sin B_2 = \sin B_1 \cos \sigma' - \cos B_1 \sin \sigma' \cos \alpha'_{1.2}$, womit der vorstehende Ausdruck für $p_1 : \sin \sigma'$ übergeht in

$$\frac{p_1}{\sin \sigma'} = -\left(\cos B_1 \cos \alpha'_{1.2} + \sin B_1 \tan \frac{\sigma'}{2}\right)(1 + e^2 \sin B_1 \cos B + Gl_4). \tag{17}$$

Es ergiebt sich weiter mittelst der (16), wenn auch σ' als Gröfse 1. Ordnung betrachtet wird:

$$1 - \frac{q_1 \cos \sigma'}{1 + e^2 p_1 q_1 \sin B_1} = 2 \sin^2 \frac{\sigma'}{2} - 2e^2 \cos^2 B \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} + Gl_5. \tag{18}$$

Die Gleichung (15) nimmt daher für kleine Werte von σ' die Form an:

$$\cot a'_{1.2} - \cot a_{1.2} = \frac{e^2 \sigma'^2 \cos B_1}{2 \sin \alpha'_{1.2}} \left(\cos B_1 \cos \alpha'_{1.2} + \frac{\sigma'}{2} \sin B_1\right) + Gl_6. \tag{19}$$

Für $\sin a'_{1.2}$ im Nenner darf man nun noch $\sin a_{1.2}$ setzen, denn es ist mit Rücksicht auf (12) und (14)

$$\csc a_{1.2} = \sqrt{1 + \cot^2 a_{1.2}}$$

$$= \csc a'_{1.2} \sqrt{1 + 2e^2 \cos B_1 \cos a'_{1.2} \frac{p_1}{\sin \sigma'} + e^4 \cos^2 B_1 \frac{p_1^2}{\sin^2 \sigma'}}$$

und daher jedenfalls $\csc a'_{1.2} = \csc a_{1.2} (1 + Gl_2)$, so lange σ' klein ist. Ebenso können wir mit Beibehaltung der Genauigkeit von (19) darin für $\cos a'_{1.2}$ und σ' bezw. $\cos a_{1.2}$ und $\frac{s}{a_0}$ setzen. Damit wird

$$\cot a'_{1.2} - \cot a_{1.2} = \frac{e^2 s^2 \cos B_1}{2 a_0^2 \sin a_{1.2}} \left(\cos B_1 \cos a_{1.2} + \frac{s}{2 a_0} \sin B_1\right) + Gl_6 . \quad (20)$$

Hieraus aber folgt nach (2) S. 31 unmittelbar:

$$\underset{\text{in Sek.}}{a'_{1.2} - a_{1.2}} = -\frac{1}{4} \varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin a_{1.2}\right) + Gl_6 . \quad (21)$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 folgt hieraus weiter:

$$\underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} - a_{2.1}} = -\frac{1}{4} \varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_2 \sin 2a_{2.1} + \frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \sin 2B_2 \sin a_{2.1}\right) + Gl_6 . \quad (22)$$

Diese Formeln kann man noch anders und zwar einfacher schreiben, indem man ein mittleres Azimut und eine mittlere Breite einführt. Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} \cos B_1 \sin a'_{1.2} &= - \cos B_2 \sin a'_{2.1} , \\ - \cos B_1 \cos a'_{1.2} &= \sin B_2 \sin \sigma' + \cos B_2 \cos a'_{2.1} \cos \sigma' \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

und identisch wegen $a' = \frac{1}{2} (a'_{1.2} + a'_{2.1}) - 90^0$:

$$- \cos B_1 \cos B_2 \sin 2a'$$

$$= \cos B_1 \sin a'_{1.2} \,.\, \cos B_2 \cos a'_{2.1} + \cos B_1 \cos a'_{1.2} \,.\, \cos B_2 \sin a'_{2.1} .$$

Eliminiert man hieraus rechter Hand $a'_{2.1}$ und $\cos B_2$ und beachtet, daſs $\cos B_1 \cos B_2 = \cos^2 B + Gl_2$ ist, so wird

$$\cos^2 B \sin 2a' = \cos^2 B_1 \sin 2a'_{1.2} + \frac{1}{2} \sigma' \sin 2B_1 \sin a'_{1.2} + Gl_2 . \quad (24)$$

Nun erkennt man leicht, daſs (21) und (22) in die folgende Gestalt gebracht werden können*):

---

*) Die Entwicklung (8) S. 26 zeigt dies ebenfalls ohne weiteres.

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{a'_{1.2} - a_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} - a_{2.1}} &= -\frac{1}{4}\,\varrho''\,e^2\,\frac{s^2}{a_0^2}\cos^2 B \sin 2a + Gl_6 \\ B &= \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \\ a &= \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} - 180^0)\,. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Hiernach ist für

$$s = 0{,}1\,a_0 = 640^{km} \qquad a'_{1.2} - a_{1.2} = 3{,}4'' \text{ im Max.}$$
$$s = 0{,}01\,a_0 = 64^{km} \qquad a'_{1.2} - a_{1.2} = 0{,}034 \text{ im Max.}$$

§ 23. Flächenwinkel der beiden Vertikalebenen und Abstand der Vertikalschnitte.

Denkt man sich K'_2 (Fig. 8 S. 134) einerseits auf die Vertikalebene von P_1 nach P_2 d. i. auf die Ebene $P_1 P_2 K'_1$ projiciert, sowie andrerseits auf die Sehne, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Flächenwinkel ν als Winkel gegenüber der Projektionslinie von K'_2 auf $P_1\,P_2\,K'_1$ auftritt. Die Länge dieser Linie ist $K'_1\,K'_2 \cos U$, da $90^0 - U$ der Neigungswinkel der Erdaxe zur Vertikalebene $P_1\,P_2 K'_1$ ist (Fig. 10 S. 137); dagegen ist der Abstand des Punktes K'_2 von der Sehne gleich $\varrho_n \cos \mu_{2.1}$, wenn $\varrho_n = P_2\,K'_2$ den Querkrümmungshalbmesser in P_2 und $\mu_{2.1}$ den Depressionswinkel der Sehne in P_2 bezeichnen. Man hat also, da nach (9) S. 137 $\cos U = \cos B_1 \sin a_{1.2}$ ist, in Strenge:

$$\sin \nu = \frac{K'_1\,K'_2\,.\,\cos B_1 \sin a_{1.2}}{\varrho_n \cos \mu_{2.1}}\,. \tag{1}$$

S. 41 (9) und S. 168 (7), sowie S. 167 (4) geben aber:

$$\left.\begin{aligned} K'_1\,K'_2 &= \frac{a_0 e^2}{\sqrt{1-e^2}}(\sin \beta_1 - \sin \beta_2) = \delta\,\mathfrak{k} \cos \chi \\ \cos \chi &= \cos \mu_{1.2} \cos B_1 \cos a_{1.2} + \sin \mu_{1.2} \sin B_1\,. \end{aligned}\right| \quad (2)$$

Indem wir dies einsetzen, lassen wir zugleich eine Vernachlässigung in Voraussetzung kleiner Distanzen eintreten: Wir setzen im Nenner von (1) für $\cos \mu_{2.1}$ den nahezu gleichen Wert $\cos \mu_{1.2}$. Nach S. 167 (4) unterscheiden sich aber $\sin \mu_{1.2}$ und $\sin \mu_{2.1}$ nur im Faktor W, also um ein Glied der 4. Ordnung. Mit Rücksicht auf die Reihenentwicklung $\cos = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 + \cdots$ ist daher

$$\cos \mu_{2.1} = \cos \mu_{1.2}\,(1 + Gl_5).$$

Es wird nun aus (1) erhalten:

$$\sin \nu = \frac{\delta \mathfrak{k}}{2\varrho_n}.(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \tan \mu_{1.2} \sin 2B_1 \sin a_{1.2} + Gl_5)\,. \tag{3}$$

Setzen wir noch $\mathfrak{k} = s\,(1 + Gl_2)$ und $\tan \mu_{1.2} = \frac{s}{2\varrho_a}\,(1 + Gl_2)$ und beachten, dafs nach S. 56 (2) ϱ_n für P_2 gleich ϱ_n für P_1 mal $(1 + Gl_3)$ ist, so folgt weiter:

$$\left.\begin{array}{c} \underset{\text{in Sek.}}{\nu} = \frac{1}{2}\,\varrho''\,\frac{\delta s}{\varrho_n}\left(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \frac{s}{2\varrho_a} \sin 2B_1 \sin a_{1.2} + Gl_2\right) \\ \varrho_n \text{ Querkrümmungshalbmesser, } \varrho_a \text{ Krummungshalbmesser im Azimut } a_{1.2}, \\ \text{beide für Punkt } P_1. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Wünscht man eine zu P_1 und P_2 symmetrische Formel, so kann man diese für kurze Distanzen leicht mit Rücksicht auf die Entwicklung am Schlusse des vorigen Paragraphen gewinnen. Danach ist:

$$\left.\begin{array}{c} \underset{\text{in Sek.}}{\nu} = \frac{1}{2}\,\varrho''\,\frac{\delta s}{\varrho_n}\,(\cos^2 B \sin 2a + Gl_2) \\ B = \frac{1}{2}\,(B_1 + B_2);\; a = \frac{1}{2}\,(a_{1.2} + a_{2.1} - 180^0) \\ \varrho_n \text{ Querkrümmungshalbmesser fürs Argument } B. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Hiernach ist für

$$s = 0{,}1\,a_0 \;\; = 640^{km} \quad \nu = 69''$$
$$s = 0{,}01\,a_0 = \;\; 64^{km} \quad \nu = \;\; 7''.$$

Um von ν zu $a'_{1.2} - a_{1.2}$ zu gelangen, genügt es, sich P_1 als Zentrum einer Kugel vom Radius 1 zu denken und das sphärische Dreieck, welches auf deren Oberfläche von den Schnitten der beiden Vertikalebenen und der in P_1 horizontalen Ebene gebildet wird, zu betrachten. Dieses Dreieck ist rechtwinklig; die beiden Katheten sind $(a_{1.2} - a'_{1.2})$ in der Horizontalebene und $\mu_{1.2}$, der Depressionswinkel in der Vertikalebene von P_1 nach P_2. Der Seite $(a_{1.2} - a'_{1.2})$ liegt Winkel ν gegenüber. Der Cotangentensatz für 4 aufeinanderfolgende Stücke giebt nun sofort die strenge Formel:

$$\tan\,(a_{1.2} - a'_{1.2}) = \tan \nu \sin \mu_{1.2}. \quad (6)$$

Diese Formel giebt in Verbindung mit (1) und (2) auch das Vorzeichen der Differenz $a_{1.2} - a'_{1.2}$ (vergl. Fig. 8 S. 134), so lange man annehmen darf, dafs val. abs. $\nu < 90^0$ ist.

Ohne nunmehr auf die Herleitung des bereits bekannten Ausdrucks für $a_{1.2} - a'_{1.2}$ bei kurzen Distanzen weiter einzugehen, benutzen wir die Formel noch zu einer Schätzung des *Maximalabstandes der beiden Vertikalschnitte* von einander.

Legt man eine Ebene rechtwinklig zur Sehne, so schneidet dieselbe die Oberfläche des Ellipsoids in einer Ellipse, von der ein Ab-

schnitt zwischen die Vertikalschnitte fällt. Da nun dieser Bogenabschnitt, so lange wir eben nur kleine Entfernungen $P_1 P_2$ ins Auge fassen, nahezu normal zu den Vertikalschnitten liegt, kann man ihn als Abstand der Vertikalschnitte auffassen und als einen Kreisbogen berechnen, dessen Zentriwinkel ν und dessen Radius der Abstand der Vertikalschnitte von der Sehne an der betreffenden Stelle ist. Der Abstand ist somit ein Maximum, da wo dieser Radius ein Maximum ist, nämlich offenbar sehr nahe in der Mitte zwischen P_1 und P_2. Daselbst ist der Radius näherungsweise gleich $\frac{s^2}{8\varrho_a}$ und also der

$$\text{Max.-Abstand} = \frac{\delta s^3}{16\,\varrho_n \varrho_a} \cos^2 B \sin 2a + \cdots. \tag{7}$$

Hiernach ist für

$$s = 0{,}1\,a_0 \;= 640^{km} \text{ der Max.-Abst.} = 2{,}7^m$$

$$s = 0{,}01\,a_0 = \;64^{km} \quad \text{„} \quad \text{Max.-Abst.} = 0{,}003^m.$$

§ 24. **Änderung des astronomischen Azimuts und der Horizontalwinkel mit der Höhe der Objekte.** Schon am Schlusse von § 1 S. 135 wurde angedeutet, dafs die Vertikalebene von einem Punkte P_1, dem *Standpunkte*, nach einem Punkte P_2, dem *Objekte*, sich etwas dreht, falls man das Objekt P_2 aus der zu grunde liegenden Niveaufläche, dem Rotationsellipsoid, in der Lotlinie verschiebt. Die Verschiebung sei $+ H_2$ nach aufsen. Alsdann treten in § 2 (3) S. 136 zu dem Ausdrucke

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x_2: & \text{der Zuwachs} & + H_2 \cos B_2 \cos L_{1.2} \\ \text{für } y_2: & \text{der Zuwachs} & + H_2 \cos B_2 \sin L_{1.2} \\ \text{für } z_2: & \text{der Zuwachs} & + H_2 \sin B_2 , \end{array}\right\} \tag{1}$$

denn die Projektion von H_2 auf die Äquatorebene ist $H_2 \cos B_2$ und auf die Erdaxe $H_2 \sin B_2$. In § 3 (1) S. 138 ist nun zuzufügen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \xi_2: & + H_2 (\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1) \\ \text{für } \eta_2: & + H_2 \cos B_2 \sin L_{1.2} , \end{array}\right\} \tag{2}$$

und es geht hiermit der Ausdruck (5) S. 139 in nachstehenden über, welcher daher nicht mehr die Cotangente des Azimuts $a_{1.2}$ nach einem in der Niveaufläche liegenden Objekt giebt, sondern diejenige des Azimuts $a_{1.2}^{(h)}$ für das um H_2 in der Lotlinie nach aufsen verschobene Objekt:

$$\cot a_{1.2}^{(h)} = \frac{(\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1)(a_0 + H_2 W_2) + a_0 e^2 \cos B_1 \left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1} \sin B_1\right)}{\cos B_2 \sin L_{1.2} (a_0 + H_2 W_2)} . \tag{3}$$

Vergleicht man dies mit $\cot a_{1.2}$ nach (5) S. 139, so findet sich, dafs:

$$\cot a^{(h)}_{1.2} = \cot a_{1.2} - e^2 \frac{H_2\, W_2 \cos B_1}{a_0 + H_2\, W_2} \frac{\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1} \sin B_1}{\cos B_2 \sin L_{1.2}}. \tag{4}$$

Nach S. 184 (10), S. 185 (14) und S. 185 (17), sowie mit einigen leicht ersichtlichen Vernachlässigungen folgt hieraus:

$$\cot a^{(h)}_{1.2} = \cot a_{1.2} + e^2 \frac{H_2 \cos B_1}{a_0 \sin a_{1.2}} \left(\cos B_1 \cos a_{1.2} + \frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \sin B_1 + Gl_2\right), \tag{5}$$

und hiermit giebt S. 31 (2):

$$\underset{\text{in Sek.}}{a^{(h)}_{1.2} - a_{1.2}} = -\frac{1}{2} \varrho'' e^2 \frac{H_2}{a_0} \left(\cos^2 B_1 \sin 2a^{(h)}_{1.2} + \frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin a^{(h)}_{1.2} + Gl_2\right), \tag{6}$$

H_2 die Höhe des Objekts über dem Rotationsellipsoid.

Es ist demnach für

$H_2 = 640^m$ $\quad a^{(h)}_{1.2} - a_{1.2} = 0{,}069''$ im Max.

$H_2 = 1280$ $\quad a^{(h)}_{1.2} - a_{1.2} = 0{,}14$ im Max.

$H_2 = 1920$ $\quad a^{(h)}_{1.2} - a_{1.2} = 0{,}21$ im Max.

Während nun (vergl. S. 135) die Höhe des Standpunkts über dem Ellipsoid das Azimut und damit die Horizontalwinkel nicht beeinflufst, zeigt Vorstehendes, dafs die Höhe der Objekte von nicht unbeträchtlichem Einflusse sein kann. Der Betrag von s ist dabei, insofern es sich in der Praxis um gegenseitig sichtbare Punkte allein handelt, ziemlich einflufslos.

§ 25. **Der Sinussatz für Sehnen und Horizontalwinkel.** Um ein Dreiecksnetz von einer direkt gemessenen Grundlinie aus in seinen einzelnen Sehnen berechnen zu können, bedarf es wie bei der Kugel einer Reduktion der gemessenen Horizontalwinkel auf Sehnenwinkel nicht; man kann vielmehr direkt mit den Horizontalwinkeln rechnen.

Wir nennen im Sehnendreieck die Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und die in den Ecken A, B, C oder 1, 2, 3 gegenüberliegenden Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, welchen letzteren die Horizontalwinkel A, B, C entsprechen. Unsere Aufgabe ist es nun, aus der Gleichung

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \sin \mathfrak{A} : \sin \mathfrak{B} \tag{1}$$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit Hilfe der Horizontalwinkel zu eliminieren. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dafs die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ im Innern

des Sehnendreiecks gezählt werden und entsprechend die A, B, C, diese Winkel somit $< 180^0$ sind.

Die Dreiecksseiten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nehmen wir klein und im Verhältnis zu a_0 als Gröfsen 1. Ordnung, entsprechend der beabsichtigten Anwendung auf ein beobachtetes Dreiecksnetz.

Betrachten wir jetzt das sphärische Dreieck, welches die Vertikalebenen von A nach B und C und die Dreiecksebene auf einer Kugel, welche A zum Zentrum hat, bilden (Fig. 11), so ist

$$\frac{\sin \mathfrak{A}}{\sin A} = \frac{\cos \mu_{1.3}}{\sin \chi_{1.2}} = \frac{\cos \mu_{1.2}}{\sin \chi_{1.3}}. \tag{2}$$

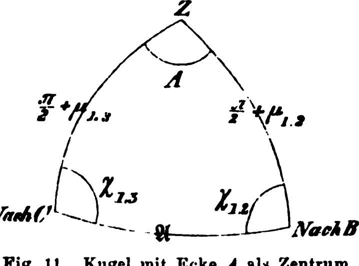


Fig. 11. Kugel mit Ecke A als Zentrum.

Hierin sind die χ die Neigungswinkel der Vertikalebenen zur Dreiecksebene in dem in der Figur angegebenen Sinne. Durch cyklische Vertauschung der Indices findet sich aus (2):

$$\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B} = \frac{\cos \mu_{2.1}}{\sin \chi_{2.3}} = \frac{\cos \mu_{2.3}}{\sin \chi_{2.1}} \tag{3}$$

$$\frac{\sin \mathfrak{C}}{\sin C} = \frac{\cos \mu_{3.2}}{\sin \chi_{3.1}} = \frac{\cos \mu_{3.1}}{\sin \chi_{3.2}}. \tag{4}$$

Hiermit giebt die Gleichung (1):

$$\mathfrak{a} \cos \mu_{2.1} \frac{\sin B}{\sin \chi_{2.3}} = \mathfrak{b} \cos \mu_{1.2} \frac{\sin A}{\sin \chi_{1.3}}.$$

Wird dies mit der aus Gleichung (4) folgenden Relation

$$\cos \mu_{3.2} \sin \chi_{3.2} = \cos \mu_{3.1} \sin \chi_{3.1} \tag{5}$$

Seite für Seite multipliziert, so folgt:

$$\mathfrak{a} \cos \mu_{2.1} \cos \mu_{3.2} \sin B \frac{\sin \chi_{3.2}}{\sin \chi_{2.3}} = \mathfrak{b} \cos \mu_{1.2} \cos \mu_{3.1} \sin A \frac{\sin \chi_{3.1}}{\sin \chi_{1.3}}. \tag{6}$$

Bei der weitern Umformung dieser Gleichung genügt es, zunächst die rechte Seite allein zu betrachten, indem beide Seiten durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, Index 1 und 2, u. s. f. in einander übergeführt werden können.

Wir setzen nun

$$\chi_{3.1} = \chi_{1.3} - \nu_b, \tag{7}$$

wobei ν_b den Flächenwinkel der beiden an der Sehne $\mathfrak{b}$ liegenden Vertikalschnitte bedeutet; dann ist:

$$\mathfrak{b} \sin A \frac{\sin \chi_{3.1}}{\sin \chi_{1.3}} = \mathfrak{b} \sin A \cos \nu_b - \mathfrak{b} \sin A \sin \nu_b \cot \chi_{1.3}. \tag{8}$$

Um nun für $\chi_{1.3}$ einen Wert zu erhalten, legen wir vom Mittelpunkt M_1 des dem Sehnendreieck (Fig. 12) umschriebenen Kreises eine Ebene normal zur Sehne $\mathfrak{b}$ und konstruieren in derselben ein bei M_1 rechtwinkliges Dreieck. Die Seiten desselben sind $M_1\,Q$, ferner eine Normale $M_1\,M_2$ zu der Sehnendreiecksebene und eine Normale $Q\,M_2$ zur Sehne $\mathfrak{b}$, welche Normale zugleich in der Vertikalebene von A nach C liegt. Dann ist der Winkel bei Q gleich $180^0 - \chi_{1.3}$ und

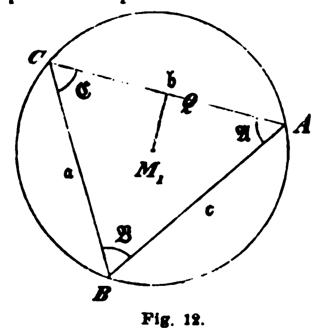


Fig. 12.

$$\cos \chi_{1.3} = -\frac{M_1\,Q}{Q\,M_2}.$$

Für $M_1\,Q$ ist $\frac{1}{2}\,\mathfrak{b} \cot \mathfrak{B}$ zu setzen, für $Q\,M_2$ aber, wenn wir statt des Ellipsoids uns eine Kugel vom Radius $a_0\,(1 + Gl_2)$ durch ABC gelegt denken, einfach a_0. Hiermit wird allerdings $\cos \chi_{1.3}$ nicht in aller Strenge erhalten, jedenfalls aber bis auf ein Glied von der Ordnung $e^2\,\frac{\mathfrak{k}}{a_0}$ genau, worin $\mathfrak{k}$ eine mittlere Sehnenlänge bezeichnet. Denn die Normalen des Ellipsoids und der passend gewählten Kugel werden nur höchstens um Glieder dieser Ordnung von einander abweichen (wie die Betrachtung des Ausdrucks für den Krümmungsradius zeigt), nur um ebensoviel aber auch die Winkel χ und ihre Cosinus für Ellipsoid und Kugel. Es ist also

$$\cos \chi_{1.3} = -\frac{\mathfrak{b} \cot \mathfrak{B}}{2a_0}\,(1 + Gl_2). \tag{9}$$

Führen wir für $\cos \chi_{1.3}$ in der Gleichung (8) den erhaltenen Wert (9) ein, setzen zugleich nach (2) $\sin A = \sin \mathfrak{A} \sin \chi_{1.3} \sec \mu_{1.2}$, sowie für $\mathfrak{b} \sin \mathfrak{A}$ den gleichwertigen Ausdruck $\mathfrak{a} \sin \mathfrak{B}$, so folgt:

$$\mathfrak{b} \sin A \frac{\sin \chi_{3.1}}{\sin \chi_{1.3}} = \mathfrak{b} \left\{ \sin A \cos \nu_b + \frac{\mathfrak{a}}{2a_0} \sin \nu_b \cos \mathfrak{B} \sec \mu_{1.2} + Gl_6 \right\}. \tag{10}$$

Die Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, der Indices 1 und 2, u. s. w. giebt hieraus für die linke Seite der Gleichung (6):

$$\mathfrak{a} \sin B \frac{\sin \chi_{3.2}}{\sin \chi_{2.3}} = \mathfrak{a} \left\{ \sin B \cos \nu_a + \frac{\mathfrak{b}}{2a_0} \sin \nu_a \cos \mathfrak{A} \sec \mu_{2.1} + Gl_6 \right\}, \tag{11}$$

$$\chi_{3.2} = \chi_{2.3} - \nu_a.$$

Die Gleichung (6) läfst sich mit Benutzung vorstehender Umformungen nunmehr in die Form bringen:

$$\mathfrak{a}\left\{\cos\mu_{2.1}\cos\mu_{3.2}\cos\nu_a\sin B - \frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\cos\mu_{3.1}\sin\nu_b\cos\mathfrak{B} + Gl_6\right\}$$

$$= \mathfrak{b}\left\{\cos\mu_{1.2}\cos\mu_{3.1}\cos\nu_b\sin A - \frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\cos\mu_{3.2}\sin\nu_a\cos\mathfrak{A} + Gl_6\right\}\cdot(12)$$

Hierin ist zu setzen nach (4) S. 188 und mit Bestimmung der Vorzeichen nach Mafsgabe von (7) und (11), wobei man beachten kann, dafs das Innere des Sehnendreiecks (Fig. 12) rechter Hand liegt, wenn man die Peripherie $\mathfrak{abc}$ durchläuft:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\nu_a} &= -\varrho''\delta\left(\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\cos^2 B_3\sin 2a_{3.2} + \frac{\mathfrak{a}^2}{4a_0^2}\sin 2B_3\sin a_{3.2}\right) + Gl_5 \\ \underset{\text{in Sek.}}{\nu_b} &= +\varrho''\delta\left(\frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\cos^2 B_3\sin 2a_{3.1} + \frac{\mathfrak{b}^2}{4a_0^2}\sin 2B_3\sin a_{3.1}\right) + Gl_5. \end{aligned}\right\}\ (13)$$

Schreiben wir nun die Gleichung (12) wie folgt:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin A - \frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\sin\nu_a\cos\mu_{3.2}\sec\mu_{1.2}\sec\mu_{3.1}\sec\nu_b\cos\mathfrak{A} + Gl_6}{\sin B - \frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\sin\nu_b\cos\mu_{3.1}\sec\mu_{2.1}\sec\mu_{3.2}\sec\nu_a\cos\mathfrak{B} + Gl_6}\cdot\frac{\cos\mu_{3.1}\cos\mu_{1.2}\cos\nu_b}{\cos\mu_{3.2}\cos\mu_{2.1}\cos\nu_a}, (14)$$

so können wir hierin mit Rücksicht darauf, dafs im Zähler und Nenner bereits Glieder 6. Ordnung vernachlässigt und auch ν_a und ν_b nur bis auf Glieder 5. Ordnung entwickelt sind, für $\cos\mathfrak{A}$, welches gleich

$$\sin\mu_{1.2}\sin\mu_{1.3} + \cos\mu_{1.2}\cos\mu_{1.3}\cos A$$

ist, einfach $\cos A$ setzen und entsprechend für $\cos\mathfrak{B}$ einfach $\cos B$, da dies nur Fehler 6. Ordnung im Zähler und Nenner erzeugt. Ferner können wir mit gleichem Recht die Cosinus- und Secantenfaktoren von $\cos\mathfrak{A}$ und $\cos\mathfrak{B}$ gleich 1 und ebenso im letzten Teil von (14) $\cos\nu_b = 1 = \cos\nu_a$ nehmen. Hiermit erhält man aus dem Ausdruck (14):

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin A - \cos A\cdot\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\nu_a + Gl_6}{\sin B - \cos B\cdot\frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\nu_b + Gl_6}\;\frac{\cos\mu_{3.1}}{\cos\mu_{3.2}}\;\frac{\cos\mu_{1.2}}{\cos\mu_{2.1}}. \qquad (15)$$

§ 26. Fortsetzung. Sinussatz zur Dreiecksberechnung. Nach S. 174 (1) und (2) hat man:

$$\sin\mu_{3.1} = \frac{\mathfrak{b}}{2a_0}W_3\left(1 + e^2\cos^2 B_3\cos^2 a_{3.1} + \frac{e^2\mathfrak{b}}{2a_0}\sin 2B_3\cos a_{3.1}\right) + Gl_5$$

oder unter Einführung des Krümmungsmafses für Punkt C mit der geographischen Breite B_3 nach S. 59 § 15:

$$\sin\mu_{3.1} = \frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\sqrt{K_3}\left(1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 B_3 \cos 2a_{3.1} + \frac{e^2\mathfrak{b}}{2a_0}\sin 2B_3 \cos a_{3.1}\right) + Gl_5.$$

Setzt man nun vorstehenden Ausdruck für $\sin\mu_{3.1}$ in die Reihe $\cos = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 - \frac{1}{8}\sin^4\cdots$, so erhält man für $\cos\mu_{3.1}$ nach einiger Reduktion:

$$\cos\mu_{3.1} = \left(1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{8a_0^2}K_3 - \frac{\mathfrak{b}^4}{128a_0^4}K_3^2\right)$$
$$\times\left(1 - \frac{e^2\mathfrak{b}^2}{8a_0^2}\cos^2 B_3 \cos 2a_{3.1} - \frac{e^2\mathfrak{b}^3}{8a_0^3}\sin 2B_3 \cos a_{3.1}\right) + Gl_6. \quad (1)$$

Die Vertauschung der Indices 1 und 2, u. s. w., giebt hieraus:

$$\cos\mu_{3.2} = \left(1 - \frac{\mathfrak{a}^2}{8a_0^2}K_3 - \frac{\mathfrak{a}^4}{128a_0^4}K_3^2\right)$$
$$\times\left(1 - \frac{e^2\mathfrak{a}^2}{8a_0^2}\cos^2 B_3 \cos 2a_{3.2} - \frac{e^2\mathfrak{a}^3}{8a_0^3}\sin 2B_3 \cos a_{3.2}\right) + Gl_6. \quad (2)$$

Bestimmt man in gleicher Weise $\cos\mu_{2.1}$ und $\cos\mu_{1.2}$, so sieht man leicht, dafs

$$\frac{\cos\mu_{1.2}}{\cos\mu_{2.1}} = 1 - \frac{e^2\mathfrak{c}^2}{8a_0^2}\left[\cos^2 B_1 \cos 2a_{1.2} - \cos^2 B_2 \cos 2a_{2.1}\right] + Gl_6. \quad (3)$$

Um diese Formel zu vereinfachen, benutzen wir die Relationen (23) S. 186:

$$\cos B_1 \sin a'_{1.2} = -\cos B_2 \sin a'_{2.1}$$
$$-\cos B_1 \cos a'_{1.2} = \sin B_2 \sin\sigma' + \cos B_2 \cos a'_{2.1} \cos\sigma'.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf S. 148 (6):

$$\left.\begin{aligned}\cos B_1 \sin a_{1.2} &= -\cos B_2 \sin a_{2.1} + Gl_2,\\ \cos B_1 \cos a_{1.2} &= -\cos B_2 \cos a_{2.1} - \frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin B_2 + Gl_2\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und

$$\cos^2 B_1 \cos 2a_{1.2} = \cos^2 B_2 \cos 2a_{2.1} + \frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin 2B_2 \cos a_{2.1} + Gl_2, \quad (5)$$

womit (3) übergeht in:

$$\frac{\cos\mu_{1.2}}{\cos\mu_{2.1}} = 1 - \frac{e^2\mathfrak{c}^3}{8a_0^3}\sin 2B_2 \cos a_{2.1} + Gl_6. \quad (6)$$

Zur Umformung des aus (1) und (2) zu bildenden Quotienten betrachten wir zunächst den Quotienten:

$$\frac{1 - \frac{1}{8}\mathfrak{b}_1^2 - \frac{1}{128}\mathfrak{b}_1^4 - \cdots}{1 - \frac{1}{8}\mathfrak{a}_1^2 - \frac{1}{128}\mathfrak{a}_1^4 - \cdots}, \quad (7)$$

worin $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1$ bezw. $\mathfrak{b}\sqrt{K_3} : a_0$ und $\mathfrak{a}\sqrt{K_3} : a_0$ bezeichnen.

Die Multiplikation mit $\left(1+\frac{\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2}{16}\right)$ im Zähler und Nenner giebt hieraus mit gleicher Genauigkeit, nämlich bis auf Glieder 6. Ordnung:

$$\frac{1+\frac{\mathfrak{a}_1^2-\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2}{16}-\frac{\mathfrak{a}_1^2+2\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2}{128}\mathfrak{b}_1^2+\cdots}{1+\frac{-\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2}{16}-\frac{2\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2}{128}\mathfrak{a}_1^2+\cdots}. \tag{8}$$

Es ist nun $\mathfrak{a}_1^2-\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2=-2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\cos\mathfrak{A}$ oder, wenn man sich der Beziehung von $\cos\mathfrak{A}$ zu $\cos A$ erinnert (vergl. S. 193):

$$\mathfrak{a}_1^2-\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2=-2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\left(\cos A\left[1-\frac{\mathfrak{b}_1^2+\mathfrak{c}_1^2}{8}\right]+\frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1}{4}\right)+Gl_6.$$

Hierin setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\sin A\left(1+\frac{1}{8}\mathfrak{a}_1^2\right)=\varepsilon_a. \tag{9}$$

Es wird damit (ohne dafs in den Gliedern 6. Ordnung bedenkliche Faktoren auftreten):

$$\mathfrak{a}_1^2-\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2=-4\varepsilon_a\cot A\left(1-\frac{\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{b}_1^2+\mathfrak{c}_1^2}{8}\right)-\frac{1}{2}\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{c}_1^2+Gl_6$$

oder

$$\mathfrak{a}_1^2-\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2=-4\varepsilon_a\cot A-\frac{1}{2}\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{c}_1^2-\frac{(\mathfrak{a}_1^2-\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2)(\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{b}_1^2+\mathfrak{c}_1^2)}{8}+Gl_6.$$

Hiermit ergiebt sich für den Zähler von (8):

$$1-\frac{1}{4}\varepsilon_a\cot A+\frac{1}{128}(-\mathfrak{a}_1^4-\mathfrak{b}_1^4+\mathfrak{c}_1^4-\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2\mathfrak{b}_1^2)+Gl_6. \tag{10}$$

Durch Vertauschung von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ folgt aus diesem Ausdruck der Nenner gleich:

$$1-\frac{1}{4}\varepsilon_b\cot B+\frac{1}{128}(-\mathfrak{a}_1^4-\mathfrak{b}_1^4+\mathfrak{c}_1^4-\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2\mathfrak{a}_1^2)+Gl_6, \tag{11}$$

wobei gesetzt ist:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\sin B\left(1+\frac{1}{8}\mathfrak{b}_1^2\right)=\varepsilon_b. \tag{12}$$

Man bemerkt leicht, dafs die identischen Glieder 4. Ordnung im Zähler und Nenner weggelassen werden können und dafs dafür $\mathfrak{c}_1^2(\mathfrak{a}_1^2+\mathfrak{b}_1^2-\mathfrak{c}_1^2):256$ zugesetzt werden darf, weil dies nur einen kleinen Fehler 6. Ordnung giebt. Der Ausdruck (7) bezw. (8) geht alsdann über in:

$$\frac{1-\frac{1}{4}\varepsilon_a\cot A\left(1+\frac{\mathfrak{c}^2}{16a_0^2}\right)}{1-\frac{1}{4}\varepsilon_b\cot B\left(1+\frac{\mathfrak{c}^2}{16a_0^2}\right)}+Gl_6. \tag{13}$$

Es läfst sich aber auch noch zeigen, dafs ε_a und ε_b bis auf Glieder 6. Ordnung übereinstimmen. Nach (2) S. 191 ist nämlich zunächst:

$$\sin A = \sin \mathfrak{A} \sin \chi_{1.2} \sec \mu_{1.3} = \sin \mathfrak{A} \sin \chi_{1.2} \left(1 + \frac{1}{8}\, \mathfrak{b}_1^2\right) + Gl_4.$$

Hiermit wird erhalten für ε_a und sodann durch gehörige Vertauschung für ε_b:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\, \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \sin \mathfrak{A} \left(1 + \frac{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2}{8}\right) \sin \chi_{1.2} + Gl_4$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2}\, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}_1 \sin \mathfrak{B} \left(1 + \frac{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2}{8}\right) \sin \chi_{2.1} + Gl_4.$$

Da $\mathfrak{b}_1 \sin \mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 \sin \mathfrak{B}$ ist, stimmen beide Ausdrücke bis auf $\sin \chi$ überein. Nun ist, wenn $\chi_{2.1} = \chi_{1.2} - \nu_c$ gesetzt wird:

$$\sin \chi_{1.2} = \sin \chi_{2.1} \cos \nu_c + \cos \chi_{2.1} \sin \nu_c;$$

der Unterschied der χ erzeugt daher hauptsächlich das anscheinend die 5. Ordnung habende Glied:

$$\frac{1}{2}\, \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \nu_c \sin \mathfrak{A} \cos \chi_{2.1}.$$

Setzt man aber hierin für $\mathfrak{c}_1 \sin \mathfrak{A}$ den gleichen Wert $\mathfrak{a}_1 \sin \mathfrak{C}$, so ist aus (9) S. 192 leicht zu entnehmen, dafs $\sin \mathfrak{C} \cos \chi_{2.1}$ nahe gleich $\left(-\frac{1}{2}\, \mathfrak{c}_1 \cos \mathfrak{C}\right)$ wird und da ν_c die 3. Ordnung hat, ist demnach auch jener Unterschied von der 6. Ordnung.

Somit ist zu (13), indem wir ε_a und ε_b nunmehr mit ε_3 bezeichnen:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon_3 =} \left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{2}\, \varrho'' \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{a_0^2} K_3 \sin A \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\mathfrak{a}^2}{a_0^2}\right) + Gl_6 \\ &= \frac{1}{2}\, \varrho'' \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{a_0^2} K_3 \sin B \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\mathfrak{b}^2}{a_0^2}\right) + Gl_6. \end{aligned} \right\} \qquad (14)$$

Setzt man endlich alles in die Gleichung (15) des vorigen Paragraphen ein, so resultiert:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin A - \cos A \left\{\frac{\varepsilon_3}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16 a_0^2}\right) + \frac{\mathfrak{a}}{2 a_0} \nu_a\right\} + Gl_6}{\sin B - \cos B \left\{\frac{\varepsilon_3}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16 a_0^2}\right) + \frac{\mathfrak{b}}{2 a_0} \nu_b\right\} + Gl_6} \cdot F \qquad (15)$$

$$\log F = M \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mathfrak{a}^2}{8 a_0^2} e^2 \cos^2 B_3 \cos 2 a_{3.2} - \frac{\mathfrak{b}^2}{8 a_0^2} e^2 \cos^2 B_3 \cos 2 a_{3.1} \\ &+ \frac{\mathfrak{a}^3}{8 a_0^3} e^2 \sin 2 B_3 \cos a_{3.2} - \frac{\mathfrak{b}^3}{8 a_0^3} e^2 \sin 2 B_3 \cos a_{3.1} + \frac{\mathfrak{c}^3}{8 a_0^3} e^2 \sin 2 B_c \cos a_c + Gl_6 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$B_c = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \qquad a_c = \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} \pm 180^0)$$

Vorzeichen von $\cos a_c$ wie dasjenige von $\cos a_{1.2}$.

Multipliziert man die rechte Seite von (15) im Zähler und Nenner noch mit $\left(1 - \frac{1}{32}\varepsilon_3^2\right)$, so erhält man endlich:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin\left\{A - \frac{\varepsilon_3}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16 a_0^2}\right) - \frac{\mathfrak{a}}{2 a_0}\, \nu_a\right\} + Gl_6}{\sin\left\{B - \frac{\varepsilon_3}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16 a_0^2}\right) - \frac{\mathfrak{b}}{2 a_0}\, \nu_b\right\} + Gl_6} \cdot F. \tag{17}$$

§ 27. **Der Sinussatz** lautet nach den Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen, wenn man noch Glieder 5. Ordnung vernachlässigt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin\left\{A - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16 a_0^2}\right) + \varrho' \frac{e^2 \mathfrak{a}^2}{4 a_0^2} \cos^2 B_0 \sin 2 a_{3.2}\right\} + Gl_5}{\sin\left\{B - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16 a_0^2}\right) - \varrho'' \frac{e^2 \mathfrak{b}^2}{4 a_0^2} \cos^2 B_0 \sin 2 a_{3.1}\right\} + Gl_5} \cdot F \\
&\log F = M\left(\frac{e^2 \mathfrak{a}^2}{8 a_0^2} \cos^2 B_0 \cos 2 a_{3.2} - \frac{e^2 \mathfrak{b}^2}{8 a_0^2} \cos^2 B_0 \cos 2 a_{3.1} + Gl_5\right) \\
&\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon =} \begin{cases} = \frac{1}{2} \varrho'' \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{a_0^2} K_0 \sin A \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\mathfrak{a}^2}{a_0^2}\right) + Gl_6 \\ = \frac{1}{2} \varrho'' \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{a_0^2} K_0 \sin B \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\mathfrak{b}^2}{a_0^2}\right) + Gl_5. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierin ist B_0 eine mittlere Breite des Dreiecks und $K_0 : a_0^2$ das zugehörige Krümmungsmafs. Für $a_{3.2}$ und $a_{3.1}$ kann ein mittleres Azimut der betreffenden Seiten eingeführt werden.

Man hat aufserdem zu beachten, dafs in der 1. Formel (1) die in e^2 multiplizierten Glieder das Vorzeichen $+$ für die von links nach rechts im Dreieckscontour nachfolgende Seite $\mathfrak{a}$, dagegen — für die vorangehende Seite $\mathfrak{b}$ haben. Dagegen ist es nicht nötig, wie bisher angenommen, sich auf Winkel $< 180^0$ zu beschränken; es genügt vielmehr, die Winkel allgemein nach (1) S. 71 zu bestimmen. Dies ergiebt sich daraus, dafs die (1) oben noch denselben Wert für das Verhältnis $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ergeben, wenn man $\mathfrak{a}$ als die $\mathfrak{b}$ vorangehende Seite auffafst und demgemäfs A und B mit ihren Supplementen zu 360^0 vertauscht. In $\log F$ korrespondieren die Vorzeichen mit $\log \mathfrak{a} - \log \mathfrak{b}$.

Die Formeln für $\mathfrak{b} : \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} : \mathfrak{a}$ gehen aus den (1) durch *cyklische* Vertauschung der Stücke des Dreiecks hervor, dabei behalten B_0, K_0 und (wie man leicht sieht) auch ε ihre Werte.

Setzt man $e^2 =$ null, so geht die (auf $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bezogene) 1. Formel (1) in die Formel (6) S. 108 über. Zugleich bedeutet alsdann ε den sphärischen Excefs (eventuell — 720^0). Die Frage, ob auch jetzt $\varepsilon = A + B + C - 180^0$ (eventuell — 720^0) bis auf Glieder 5. Ordnung ist, bleibt vorläufig noch eine offene.

Wir gehen jetzt dazu über, den Einflufs von e^2 auf den Ausdruck für $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ zu erörtern.

Zunächst zeigt sich, dafs die von c^2 unabhängigen Glieder 4. Ordnung selbst für Dreiecksseiten gleich $0{,}1\,a_0$ gegen die von e^2 abhängigen Glieder erheblich zurücktreten.

Von den in c^2 multiplizierten Gliedern nun sind die mit A und B kombinierten am einflufsreichsten, sobald cot A und bezw. cot B gröfser als $\frac{1}{2}$ sind, denn alsdann beträgt der Einflufs eines dieser Glieder auf den log $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, wenn $\mathfrak{k}$ die Sehnen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet, mehr als $M \cdot \frac{\mathfrak{k}^2}{8\,a_0^2}\,c^2$ und dies ist augenscheinlich das Maximum des Einflusses eines der Glieder mit c^2 in log F.

Für wohlgeformte Dreiecke, also solche, die von der gleichseitigen oder rechtwinkligen Form nicht erheblich abweichen, kann man die Cotangente der betreffenden Winkel rund gleich 1 setzen. Alsdann ist der Einflufs eines der Glieder 4. Ordnung, welche e^2 enthalten, im Maximum bei $\mathfrak{k} = 0{,}02\,a_0$ gleich 3 Einheiten der 7. Decimalstelle des Logarithmus und bei $\mathfrak{k} = 0{,}01\,a_0$ gleich 7 Einheiten der 8. Decimalstelle. Er vermindert sich aber sehr für den Fall, dafs das Dreieck entfernt vom Äquator liegt.

Der Einflufs dieser Glieder ist somit nur erheblich, wenn man die Seiten einer Dreieckskette von durchschnittlich 64^{km} Sehnenlänge einfach nach dem *Grunert*schen Satze mittelst 8ziffriger Logarithmen ermittelt. Die Vernachlässigung bewirkt, dafs die von einem Anfangspunkte aus berechneten geographischen Positionen auf verschiedenen Wegen durch das Sehnenpolygon hindurch in der 4. Decimale der Sekunden um einige Einheiten verschieden erhalten werden.

Hierbei ist der Umstand günstig, dafs *keine Anhäufung* der Glieder entsteht bei der successiven Berechnung von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'''$ u. s. w. in einer Kette von der Form der Fig. 13, die also näherungsweise sich aus Parallelogrammen bildet, — weil in dem Ausdruck $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}'}\right)\left(\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}'} \cdot \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}''}\right) \cdots$ der Einflufs für jede Parenthese nahezu null wird. Man wird dies leicht erkennen, wenn man die 1. Parenthese, die zum Viereck 1. 2. 3. 4 gehört, betrachtet und die Formeln (1) darauf anwendet, dabei aber erwägt, dafs nicht nur $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, sondern auch $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}$ von links nach rechts auf einander folgende Seiten sind, und schliefslich annimmt, dafs $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, bezw. $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ nahezu parallel seien.

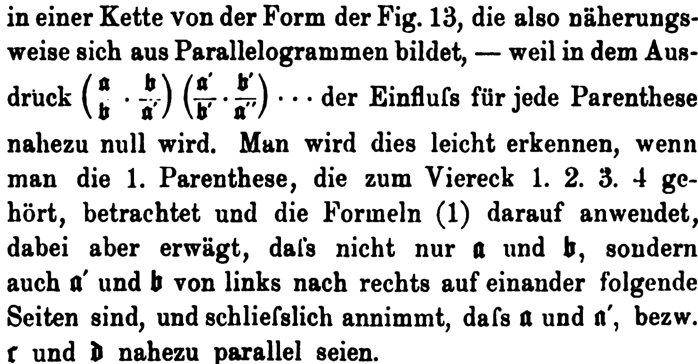


Fig. 13.

(Die in den ν und F enthaltenen Glieder 5. Ordnung kompensieren sich dagegen bei Berechnung einer Dreieckskette im allgemeinen *nicht* wesentlich; sie sind aber für mefsbare Dreiecke

überaus klein, wie leicht zu ersehen, sodafs eine Anhäufung nicht sobald merkbar wird.)

Die Länge der ganzen Kette wird nach dem Vorigen in ihrem Logarithmus nur gerade so viel wie die $\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{d}$ beeinflufst.

Untersucht man nun noch, wie sich für sehr spitze oder stumpfe Dreiecke der Einflufs der in Rede stehenden Glieder auf $\log \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ gestaltet, so ist sofort ersichtlich, dafs er weit mehr als für wohlgeformte Dreiecke ausmachen kann. Immerhin ist in Sekunden genommen und wenn man von ungewöhnlich grofsen mefsbaren Dreiecken absieht, also $\mathfrak{k} < 0{,}01\, a_0$ setzt, der Betrag der zu A und B tretenden, von e^2 abhängigen Glieder 4. Ordnung nur einige Hundertstelsekunden, also weit geringer als derjenige der Beobachtungsfehler. Da man aber dergleichen Dreiecke nur anwendet bei der Aufstellung der Seitengleichungen*) in Verbindung mit wohlgeformten Dreiecken behufs Ausgleichung der Winkelmessungen, so wird voraussichtlich auch hier der schliefsliche Einflufs der Glieder auf den oben berechneten Betrag herabgedrückt.

Die weitläufige strenge Untersuchnng darüber, wie sich nach erfolgter Ausgleichung der Einflufs der Glieder gestaltet, müssen wir uns hier versagen. Es sei nur bemerkt, dafs in Vierecken von nahezu parallelogrammförmiger Gestalt wie 1. 2. 3. 4 Fig. 13 die Seitengleichungen von den Gliedern mit e^2 nicht wesentlich beeinflufst werden. Denn die Seitengleichung läuft in jeder Form auf die Gleichsetzung der beiden Werte für das Verhältnis $\mathfrak{a} : \mathfrak{a}'$ hinaus, welche mit Hilfe der beiden Diagonalen sich berechnen. Für jeden dieser Werte ist aber, wie oben bemerkt, der Einflufs nahezu null, falls $\mathfrak{a}$ gleich und parallel $\mathfrak{a}'$ ist.

Nicht unerwähnt wollen wir lassen, dafs die Form des Ausdrucks für $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ die Unmöglichkeit andeutet, ein Sehnendreieck eines Rotationsellipsoids allgemein als Kugelsehnendreieck bei gehöriger Reduktion der Horizontalwinkel zu berechnen. Dies bestätigt auch der Versuch, wenn man mittelst der Formel $\cos A = -\tan \mu_{1.2} \tan \mu_{1.3} + \sec \mu_{1.2} \sec \mu_{1.3} \cos \mathfrak{A}$ zunächst $\cos A$ nach Potenzen von e^2 darstellt und als Ausgangswerte für $\mu_{1.2}$ und $\mu_{1.3}$ Werte, die einer Kugel mit dem Radius $(a_0 : \sqrt{K_0})$ entsprechen, einführt. Gehört zu diesen Ausgangswerten der Horizontalwinkel A', so ist es eben nicht möglich, aus $\cos A - \cos A'$ eine allgemein für jedes A gültige Formel abzuleiten, welche $A - A'$ giebt. Ursache ist, dafs für sehr stumpfe Dreiecke der Radius des umschriebenen Kreises gröfser als $(a_0 : \sqrt{K_0})$ werden kann. Es läfst sich dann das Dreieck auf der gewählten Kugel gar nicht unterbringen.

*) Die Seitengleichungen heifsen jetzt besser *Sehnengleichungen*. Sie bilden sich auf dieselbe Art wie in sphärischen Figuren. Vergl. dazu Verfassers *Ausgleichungsrechnung* S. 323 u. ff.

§ 28. **Zahlenbeispiel III.** *Bremiker* leitet in seinen *Studien* ... S. 17 und 28 aus den geographischen Positionen dreier Orte die nachstehenden Horizontalwinkel und Sehnen eines Dreiecks ab:

		Azimut a.	Horizontalwinkel.	log k in Metern.
Berlin	K	239° 33′ 0,9324″	95° 19′ 4,6513″	$\log KW = 5{,}8905264.742$
	W	334 52 5,5837		
Königsberg	W	23 11 41,9353	42 4 27,6453	$\log WB = 5{,}7180944.366$
	B	65 16 9,5806		
Wien	B	157 10 6,9817	42 48 6,9048	$\log BK = 5{,}7241345.725$
	K	199 58 13,8865		
			Summa = 180° 11′ 39,2014″	

	Geographische Breite.	Länge.
Berlin	52° 30′ 16,7″	0° 0′ 0″
Königsberg	54 42 50,6	7 6 0 östlich
Wien	48 12 35,5	2 59 6 östlich

Diese Zahlen entsprechen den *Bremiker*schen Angaben *nicht* für die Linie BK, wofür die Angaben des Zahlenbeispiels I S. 158 eingeführt wurden. Aufserdem ist log WB gegen *Bremikers* Angabe um 28 Einheiten der 10. Stelle vermindert. Nachgerechnet und übereinstimmend gefunden sind log KW und die Differenzen der Endazimute für jede der beiden Linien WB und KW.

Indem wir die Bezeichnungen unsrer Formeln einführen, setzen wir:

$\log \mathfrak{a} = 5{,}7180944.4$	$A = 42^0\,4'\,27{,}645''$	$B_1 = 54^0\,43'$	Königsb. $= A$
$\log \mathfrak{b} = 5{,}7241345.7$	$B = 42\;48\;\;6{,}905$	$B_2 = 48\;\;13$	Wien $= B$
$\log \mathfrak{c} = 5{,}8905264.7$	$C = 95\;19\;\;4{,}651$	$B_3 = 52\;\;30$	Berlin $= C$

$a_{3.2} = 334^0\,52'$		$\log \frac{M}{8a_0^2} = 2{,}125-10$	Für Einh. der 7. Dec.
$a_{3.1} = 239\;\;33$	$\log \frac{\varrho'' e^2}{4a_0^2} = 8{,}927-20$	$\log \frac{Me^2}{8a_0^2} = 9{,}950-20$	
$a_{2.1} = 199\;\;58$	$\log \frac{\varrho'' e^2}{8a_0^3} = 1{,}821-30$	$\log \frac{Me^2}{8a_0^3} = 3{,}145-20$	

Bei der Berechnung von $\log \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ berücksichtigen wir auch die hier wegen der ungewöhnlichen Gröfse des Dreiecks sehr merklichen Glieder 5. Ordnung.

Zunächst ist ε nach *Formel* (14) S. 196 zu berechnen. Dazu hat man mittelst log W fürs Argument B_3 nach (3) S. 59 § 14:

$$\log K_3 = 9{,}999252-10$$

und hieraus mittelst der 1. Formel (14):

$$\left\{\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{2}\varrho''\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{a_0^2}K_3\sin A\right) &= 2{,}844159\\ +M.\frac{1}{8}\frac{\mathfrak{a}^2}{a_0^2} &= +\quad 365\end{aligned}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log \varepsilon_3} = 2{,}844524 \qquad \varepsilon_3 = 699{,}076''.$$

Dasselbe giebt die Rechnung mit $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ nach der 2. Formel (14). Mit diesem Wert von ε_3 wird nun

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varepsilon_3}{4} &= 174{,}769''\\ +\frac{\varepsilon_3\mathfrak{c}^2}{64a_0^2} &= +0{,}163\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{4}\left(1+\frac{\mathfrak{c}^2}{16a_0^2}\right) = 174{,}932''.$$

Man hat weiter zur Berechnung der von v_a und v_b abhängigen Glieder nach den *Formeln* (13) S. 193:

$\log\sin 2\alpha_{3.2} = 9{,}886_n-10$	$\log\sin\alpha_{3.2} = 9.628_n-10$	$\log\cos^2 B_3 = 9{,}569-10$
$\log\sin 2\alpha_{3.1} = 9{,}941\;\;-10$	$\log\sin\alpha_{3.1} = 9.936_n-10$	$\log\sin 2B_3 = 9{,}985-10$

und hieraus zu *Formel* (17) S. 197:

$$\begin{aligned}-\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}v_a &= +\left(\frac{\varrho''e^2}{4a_0^2}\cos^2 B_3\right)\mathfrak{a}^2\sin 2\alpha_{3.2}\\ &\quad+\left(\frac{\varrho''e^2}{8a_0^3}\sin 2B_3\right)\mathfrak{a}^3\sin\alpha_{3.2} = -0{,}658''-0{,}039''\\ -\frac{\mathfrak{b}}{2a_0}v_b &= -\left(\frac{\varrho''e^2}{4a_0^2}\cos^2 B_3\right)\mathfrak{b}^2\sin 2\alpha_{3.1}\\ &\quad-\left(\frac{\varrho''e^2}{8a_0^3}\sin 2B_3\right)\mathfrak{b}^3\sin\alpha_{3.1} = -0{,}768''+0{,}083''.\end{aligned}$$

Es ist daher

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin(42^\circ\,4'\,27{,}645''-2'\,54{,}932''-0{,}697'')}{\sin(42^\circ\,48'\,6{,}905''-2'\,54{,}932''-0{,}685'')}\cdot F$$

und also

$$\log\mathfrak{a}-\log\mathfrak{b} = 9{,}8257259.7-9{,}8317680.2+\log F.$$

Für log F hat man nach *Formel* (16) S. 196:

$\log\cos 2\alpha_{3.2} = 9{,}806 - 10$	$\log\cos\alpha_{3.2} = 9{,}957 - 10$	$\log\cos\alpha_c = 9{,}969 - 10$
$\log\cos 2\alpha_{3.1} = 9{,}687_n - 10$	$\log\cos\alpha_{3.1} = 9{,}705_n - 10$	$\log\sin 2B_c = 9{,}989 - 10$

$$\left\{\begin{array}{lll} + \left(\frac{Me^2}{8a_0^2}\cos^2 B_3\right)\mathfrak{a}^2\cos 2\alpha_{3.2} & = + & 5.77 \text{ Einh. d. 7. Dec.} \\ - \left(\frac{Me^2}{8a_0^2}\cos^2 B_3\right)\mathfrak{b}^2\cos 2\alpha_{3.1} & = + & 4.51 \quad " \quad " \\ + \left(\frac{Me^2}{8a_0^3}\sin 2B_3\right)\mathfrak{a}^3\cos\alpha_{3.2} & = + & 1.74 \quad " \quad " \\ - \left(\frac{Me^2}{8a_0^3}\sin 2B_3\right)\mathfrak{b}^3\cos\alpha_{3.1} & = + & 1.02 \quad " \quad " \\ + \left(\frac{Me^2}{8a_0^3}\sin 2B_c\right)\mathfrak{c}^3\cos\alpha_c & = + & 5.95 \quad " \quad " \end{array}\right.$$

$$\log F = + 19.0;$$

hiermit ist:

$$\log\mathfrak{a} - \log\mathfrak{b} = 9{,}9939598.5 - 10,$$

bis auf 1 Einheit mit den Angaben *Bremikers* übereinstimmend.

Vertauscht man in den Formeln $\mathfrak{abc}$ mit $\mathfrak{bca}$, 1.2.3 mit 2.3.1, u. s. f., so erhält man die Formeln zur Berechnung von $\mathfrak{b}:\mathfrak{c}$. Die Rechnung giebt hier:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin(42^0\ 48'\ 6{,}905'' - [2'\ 54{,}683'' + 0{,}073''] + [0{,}604'' + 0{,}085''])}{\sin(95^0\ 19'\ 4{,}651'' - [2'\ 54{,}683'' + 0{,}073''] - [1{,}239'' + 0{,}115''])}F$$

$$\log\mathfrak{b} - \log\mathfrak{c} = 9{,}8317715.5 - 9{,}9981609.9 + \log F$$

$$\log F = (-5.43 - 12.42) + (0.78 - 5.69 - 1.79) = -24.5 \text{ Einh. d. 7. Dec.},$$

somit:

$$\log\mathfrak{b} - \log\mathfrak{c} = 9{,}8336081.1 - 10,$$

das ist nur um 1 Einheit der 8. Decimalstelle zu grofs gegen *Bremikers* Angabe; eine in der That genügende Übereinstimmung, weil die vernachlässigten Glieder 6. Ordnung recht wohl die 8. Decimale ein wenig beeinflussen können.

§ 29. Die Summe der Horizontalwinkel über einem Sehnendreieck.

Wir denken uns um den Mittelpunkt des Rotationsellipsoids eine konzentrische Kugel gelegt und alle Vertikalen des Ellipsoids parallel in den Mittelpunkt verschoben.

Dann entsprechen den 3 Punkten A, B, C des Ellipsoids 3 Punkte A', B', C' der Kugel mit denselben geographischen Breiten und Längen.

Bezeichnet man die Azimute der Vertikalschnitte auf der Kugel mit einem ′, so ist nun nach S. 151 (4) für ein Sehnendreieck, dessen Seiten im Verhältnis zu a_0 Gröfsen 1. Ordnung sind:

$$\left.\begin{aligned} a_{2.1} - a_{1.2} &= a'_{2.1} - a'_{1.2} + Gl_7 \\ a_{1.3} - a_{3.1} &= a'_{1.3} - a'_{3.1} + Gl_7 \\ a_{3.2} - a_{2.3} &= a'_{3.2} - a'_{2.3} + Gl_7 . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Glieder 7. Ordnung hängen ab von der 4. Potenz der Excentricität e und der 3. Potenz der Entfernung und geben für Seitenlängen $= 0{,}2\,a_0$ erst wenige Tausendstelsekunden, für Seitenlängen $= 0{,}1\,a_0$ aber nur wenige Zehntausendstelsekunden.

Addiert man die (1) Seite für Seite und bedenkt, dafs die Horizontalwinkel auf dem Ellipsoid und der Kugel bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A &= a_{1.3} - a_{1.2} \qquad & A' &= a'_{1.3} - a'_{1.2} \\ B &= a_{2.1} - a_{2.3} \qquad & B' &= a'_{2.1} - a'_{2.3} \\ C &= a_{3.2} - a_{3.1} \qquad & C' &= a'_{3.2} - a'_{3.1} , \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

so ergiebt sich sofort die bemerkenswerte Gleichung:

$$A + B + C = A' + B' + C' + Gl_7 . \tag{3}$$

Nennen wir $(A + B + C - 180^0)$ den Excefs der Horizontalwinkelsumme des Sehnendreiecks, so ist mithin innerhalb der angegebenen Grenzen und der angegebenen Genauigkeit:

der Excefs der Horizontalwinkelsumme des Sehnendreiecks gleich dem Excefs des Kugeldreiecks.

Der Radius der Kugel ist hierbei gleichgültig; man wird aber aus andern Gründen am besten dafür $a_0 : \sqrt{K_0}$ nehmen, wobei K_0 zu

$$B_0 = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + B_3) \tag{4}$$

gehört und nach S. 59 aus der Formel folgt:

$$K_0 = \frac{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^2}{1 - e^2} = \frac{W_0^4}{1 - e^2} . \tag{5}$$

Mit Hilfe dieses Radius und der in den §§ 7 bis 11 dieses Kapitels angegebenen Formeln kann man aus den Stücken des Sehnendreiecks auf dem Ellipsoid diejenigen des Dreiecks auf der Kugel ermitteln, d. h. $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, A', B', C'. Es genügt dabei vollkommen, nur die Glieder bis zur 5. Ordnung zu berücksichtigen, um schliefslich den Excefs bis auf Glieder 6. Ordnung zu erhalten.

Nach § 10 S. 155 ist insbesondere für die Sehne zwischen B und C:

$$\mathfrak{a} = 2\sin\frac{\sigma'_{2.3}}{2}\left\{\frac{a_0(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_a}}:(1-e^2+e^2\cos^2 B_a\cos^2 a_a + Gl_4)\right\}, \quad (6)$$

$$B_a = \frac{1}{2}(B_2+B_3), \quad a_a = \frac{1}{2}(a_{2.3}+a_{3.2}\pm 180^0), \qquad (7)$$

wobei es gleichgültig ist, ob man rechter Hand mit den Azimuten auf der Kugel oder dem Ellipsoid rechnet, weil diese nur um kleine Glieder 2. Ordnung von einander abweichen.

Andrerseits hat man für die Sehne zwischen B' und C':

$$\mathfrak{a}' = 2\sin\frac{\sigma'_{2.3}}{2}\frac{a_0}{\sqrt{K_0}} = 2\sin\frac{\sigma'_{2.3}}{2}\frac{a_0\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B_0},$$

und es ist daher:

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_a}}{1-e^2\sin^2 B_0}\left(1-\frac{1}{2}e^2+e^2\cos^2 B_a\cos^2 a_a + Gl_4\right)$$

oder in weiterer Entwicklung:

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = 1+\frac{1}{2}e^2\cos^2 B_a\cos 2a_a + e^2(\sin^2 B_0 - \sin^2 B_a) + Gl_4. \quad (8)$$

Es ergiebt sich ferner für die Horizontalwinkel, insbesondere den Winkel B aus den Relationen (2):

$$B' - B = (a'_{2.1} - a_{2.1}) - (a'_{2.3} - a_{2.3}), \qquad (9)$$

und hierfür hat man nach (2) und (3) S. 157 u. 158:

$$B' - B = \frac{1}{2}e^2\cos B_2\left\{\cos B_3\sin 2a_a - \cos B_1\sin 2a_c\right\} + Gl_4, \quad (10)$$

wenn man setzt:

$$a_c = \frac{1}{2}(a_{1.2}+a_{2.1}\pm 180^0). \qquad (11)$$

Hiernach lassen sich die Seiten und die Horizontalwinkel des Kugeldreiecks finden (wobei für $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ in (8) und für A und C in (10) selbstverständlich die gehörigen Vertauschungen stattzufinden haben). In Bezug auf die Bestimmung des Excesses betrachten wir nun den wichtigsten Fall der Bestimmung aus 2 Sehnen und dem Zwischenwinkel.

§ 30. **Excefs aus 2 Sehnen und dem zwischenliegenden Horizontalwinkel.** Als Sehnen nehmen wir $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{c}'$, dazu als Winkel B' und erhalten nach (6) S. 109 für den Excefs, wobei derselbe negativ gerechnet ist, falls die Horizontalwinkel $> 180^0$ sind:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{s}'\mathfrak{t}'}{2a_0^2} K_0 \sin B' \left(1 + \frac{\mathfrak{b}'^2}{8a_0^2} K_0 + Gl_4\right). \tag{1}$$

Hierzu ist nach (8) des vorigen Paragraphen, wenn zugleich $e^2 \cos^2 B_a$ mit $e^2 \cos B_2 \cos B_3$ vertauscht wird, was nur einen Fehler 4. Ordnung giebt:

$$\frac{\mathfrak{s}'}{\mathfrak{s}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos B_2 \cos B_3 \cos 2a_a + e^2 (\cos^2 B_a - \cos^2 B_0) + Gl_4. \tag{2}$$

Um dies weiter zu entwickeln, betrachten wir zunächst das 1. Glied mit e^2 rechter Hand. Es ist identisch:

$$\cos 2a_a = -\cos(a_{2.3} + a_{3.2}) = (-\cos a_{2.3} \cos a_{3.2} + \sin a_{2.3} \sin a_{3.2}).$$

Nach (4) S. 194 hat man aber bei gehöriger Vertauschung der Indices u. s. f:

$$\left.\begin{aligned} \cos B_3 \sin a_{3.2} &= -\cos B_2 \sin a_{2.3} + Gl_2 \\ \cos B_3 \cos a_{3.2} &= -\cos B_2 \cos a_{2.3} - \frac{\mathfrak{s}}{a_0} \sin B_2 + Gl_2; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

substituiert man dies in der vorigen, mit $\cos B_2 \cos B_3$ multiplizierten Identität, so folgt:

$$\cos B_2 \cos B_3 \cos 2a_a = \cos^2 B_2 \cos 2a_{2.3} + \frac{\mathfrak{s}}{2a_0} \sin 2B_2 \cos a_{2.3} + Gl_2.$$

Dies setzen wir im 2. Gliede rechter Hand von (2) ein; zugleich aber im 3. Gliede:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 B_2 &= \cos^2 B_0 - \sin 2B_0 (B_2 - B_0) + Gl_2 \\ \sin 2B_2 &= \sin 2B_0 + Gl_1 \\ \cos^2 B_a = \cos^2 \frac{B_2 + B_3}{2} &= \cos^2 B_0 - \sin 2B_0 \left(\frac{B_2 + B_3}{2} - B_0\right) + Gl_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

womit sich ergiebt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{s}'}{\mathfrak{s}} &= 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_0 \cos 2a_{2.3} \\ &+ \frac{1}{2} e^2 \sin 2B_0 \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mathfrak{s}}{2a_0} \cos a_{2.3} - \frac{B_2 - B_1}{3} (2 + \cos 2a_{2.3}) \\ &\qquad + \frac{B_2 - B_3}{3} (1 - \cos 2a_{2.3}) \end{aligned} \right\} + Gl_4. \end{aligned} \tag{5}$$

Aus Formel (2) S. 167 entnimmt man nun leicht, daſs es zulässig ist, zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} (B_2 - B_1) \cos B_0 &= \frac{\mathfrak{t}}{a_0} \cos B_0 \cos a_{2.1} + Gl_2 \\ (B_2 - B_3) \cos B_0 &= \frac{\mathfrak{s}}{a_0} \cos B_0 \cos a_{2.3} + Gl_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wobei die Glieder 2. Ordnung für jede geographische Lage der Punkte kleine Werte haben. Damit wird endlich:

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_0 \cos 2\alpha_{2.3}$$

$$+\frac{1}{2}e^2 \sin 2B_0 \left\{\frac{\mathfrak{a}}{a_0}\cos\alpha_{2.3}\left[\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\cos 2\alpha_{2.3}\right]-\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\cos\alpha_{2.1}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos 2\alpha_{2.3}\right]\right\}+Gl_4 \quad (7)$$

und durch Vertauschung von Index 3 und 1, u. s. f., hieraus:

$$\frac{\mathfrak{c}'}{\mathfrak{c}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_0 \cos 2\alpha_{2.1}$$

$$+\frac{1}{2}e^2 \sin 2B_0 \left\{\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\cos\alpha_{2.1}\left[\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\cos 2\alpha_{2.1}\right]-\frac{\mathfrak{a}}{a_0}\cos\alpha_{2.3}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos 2\alpha_{2.1}\right]\right\}+Gl_4. \quad (8)$$

Es ist nun weiter durch Einführung von (10) S. 204 in die Identität $\sin B' = \sin B \cos (B' - B) + \cos B \sin (B' - B)$:

$$\left.\begin{aligned}\sin B' &= \sin B + \cos B\,(B' - B) + Gl_4\\ B &= \alpha_{2.1} - \alpha_{2.3},\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$B' - B = \frac{1}{2} e^2 \cos B_2 \left\{\cos B_3 \sin 2\alpha_a - \cos B_1 \sin 2\alpha_c\right\} + Gl_4.$$

Die Formeln (3) zeigen aber, dafs man setzen kann:

$$\cos B_2 \cos B_3 \sin 2\alpha_a = \cos^2 B_2 \sin 2\alpha_{2.3} + \frac{\mathfrak{a}}{2a_0} \sin 2B_0 \sin \alpha_{2.3} + Gl_2,$$

wofür man mit Rücksicht auf die 1. Gleichung (4) und die (6) schreiben darf:

$$\cos B_2 \cos B_3 \sin 2\alpha_a$$

$$=\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{2.3} - \sin 2B_0\left\{\sin 2\alpha_{2.3}\left[\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\cos\alpha_{2.3}+\frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\cos\alpha_{2.1}\right]-\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\sin\alpha_{2.3}\right\}+Gl_2.$$

Die Vertauschung der Indices 1 und 3, u. s. f., giebt hieraus zunächst:

$$\cos B_2 \cos B_1 \sin 2\alpha_c$$

$$=\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{2.1} - \sin 2B_0\left\{\sin 2\alpha_{2.1}\left[\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\cos\alpha_{2.3}+\frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\cos\alpha_{2.1}\right]-\frac{\mathfrak{c}}{2a_0}\sin\alpha_{2.1}\right\}+Gl_2.$$

Unter Benutzung der letzten beiden Formeln erhält man endlich nach einiger Reduktion:

$$B' - B = \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_0 (\sin 2\alpha_{2.3} - \sin 2\alpha_{2.1})$$

$$+\frac{1}{2}e^2\sin 2B_0\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\cos\alpha_{2.3}+\frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\cos\alpha_{2.1}\right](\sin 2\alpha_{2.1}-\sin 2\alpha_{2.3})\\ &\qquad+\left[\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\sin\alpha_{2.3}-\frac{\mathfrak{c}}{2a_0}\sin\alpha_{2.1}\right]\end{aligned}\right\}+Gl_4. \quad (10)$$

Die Formeln (7) bis (10) geben nun:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\sin B' = \sin B + \frac{1}{2}e^2\cos^2 B_0 &\left\{\begin{aligned} &\sin(a_{2.1}-a_{2.3})(\cos 2a_{2.3}+\cos 2a_{2.1}) \\ &+\cos(a_{2.1}-a_{2.3})(\sin 2a_{2.3}-\sin 2a_{2.1})\end{aligned}\right\} \\
-\frac{1}{2}e^2\sin 2B_0 &\left\{\begin{matrix}\text{wie}\\ \text{vorher}\end{matrix}\right\}\left(\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\cos a_{2.3}+\frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\cos a_{2.1}\right) \\
+\frac{1}{2}e^2\sin 2B_0 &\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\mathfrak{a}}{6a_0}\cos a_{2.3}+\frac{\mathfrak{c}}{6a_0}\cos a_{2.1}\right]\sin(a_{2.1}-a_{2.3}) \\ &+\left[\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\sin a_{2.3}-\frac{\mathfrak{c}}{2a_0}\sin a_{2.1}\right]\cos(a_{2.1}-a_{2.3})\end{aligned}\right\} + Gl_4 .
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Da aber identisch

$$(\cos 2a_{2.3}+\cos 2a_{2.1}) = 2\cos(a_{2.3}+a_{2.1})\cos(a_{2.3}-a_{2.1})$$

und ferner

$$(\sin 2a_{2.3}-\sin 2a_{2.1}) = 2\cos(a_{2.3}+a_{2.1})\sin(a_{2.3}-a_{2.1}),$$

so verschwindet die hierin zweimal auftretende geschlungene Parenthese. Im letzten allein übrig bleibenden Teil setzen wir für die groſse Parenthese:

$$\frac{\mathfrak{a}}{6a_0}\Big(\cos a_{2.3}\sin(a_{2.1}-a_{2.3})+\sin a_{2.3}\cos(a_{2.1}-a_{2.3})\Big)+\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\sin a_{2.3}\cos B$$

$$+\frac{\mathfrak{c}}{6a_0}\Big(\cos a_{2.1}\sin(a_{2.1}-a_{2.3})-\sin a_{2.1}\cos(a_{2.1}-a_{2.3})\Big)-\frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\sin a_{2.1}\cos B,$$

welcher Ausdruck sich in nachstehenden zusammenziehen läſst:

$$\frac{\mathfrak{a}}{6a_0}\sin a_{2.1}-\frac{\mathfrak{c}}{6a_0}\sin a_{2.3}+\frac{1}{3}\cos B\left(\frac{\mathfrak{a}}{a_0}\sin a_{2.3}-\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin a_{2.1}\right).$$

Hiermit geht (1) über in die Formel:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho''\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2a_0^2}K_0\left\{\sin B\left(1+\frac{\mathfrak{b}^2}{8a_0^2}K_0\right)+E\right\} \\
E &= +\frac{1}{12}e^2\sin 2B_0\left(\frac{\mathfrak{a}}{a_0}\sin a_{2.1}-\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin a_{2.3}+2\cos B\left[\frac{\mathfrak{a}}{a_0}\sin a_{2.3}-\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin a_{2.1}\right]\right)+Gl_6 .
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Man hat für diese Formel zu beachten, daſs B den Horizontalwinkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, B_0 aber die mittlere geographische Breite bezeichnet.

Diese Formel läſst sich aber auch noch in andere Gestalt bringen; da nämlich $\cos\mathfrak{B} = \sin\mu_{2.1}\sin\mu_{2.3}+\cos\mu_{2.1}\cos\mu_{2.3}\cos B$, so ist:

$$\cos B = \cos\mathfrak{B} + Gl_2 = \frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}{2\mathfrak{a}\mathfrak{c}} + Gl_2 . \qquad (13)$$

Mit Einführung dieses Wertes ergiebt sich für die runde, in $\mathfrak{a}\mathfrak{c} : a_0^2$ multiplizierte Parenthese von E in (12) die Relation:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{a_0^2}\left(\,:\,\right) = \frac{1}{6a_0^3}\left(\mathfrak{a}^3 \sin a_{2.3} - \mathfrak{c}^3 \sin a_{2.1} + [\mathfrak{c} \sin a_{2.1} - \mathfrak{a} \sin a_{2.3}]\,\mathfrak{b}^2\right) + Gl_5. \quad (14)$$

Wenn wir nun ferner die 2. Gleichung (1) S. 166 anwenden, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \cos B_1 \sin L_{2.1} &= \frac{\mathfrak{c}}{a_0} \sin a_{2.1} + Gl_3; \qquad & \cos B_3 \sin L_{2.3} &= \frac{\mathfrak{a}}{a_0} \sin a_{2.3} + Gl_3; \\ \cos B_3 \sin L_{1.3} &= \frac{\mathfrak{b}}{a_0} \sin a_{1.3} + Gl_3; \qquad & \cos B_1 \sin L_{3.1} &= \frac{\mathfrak{b}}{a_0} \sin a_{3.1} + Gl_3. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Hiermit giebt die Identität

$$\sin L_{1.3} = \sin (L_{2.3} - L_{2.1}) = \sin L_{2.3} \cos L_{2.1} - \sin L_{2.1} \cos L_{2.3}$$

nach vorhergegangener Multiplikation mit $\cos B_1 \cos B_3$:

$$\frac{\mathfrak{a}}{a_0} \sin a_{2.3} \cos B_1 \cos L_{2.1} - \frac{\mathfrak{c}}{a_0} \sin a_{2.1} \cos B_3 \cos L_{2.3}$$
$$= \frac{\mathfrak{b}}{a_0} \sin a_{1.3} \cos B_1 + Gl_3 = -\frac{\mathfrak{b}}{a_0} \sin a_{3.1} \cos B_3 + Gl_3.$$

Mit Rücksicht auf die 2. Gleichung (2) S. 167 kann man hierfür schreiben:

$$\left(\frac{\mathfrak{a}}{a_0} \sin a_{2.3} - \frac{\mathfrak{c}}{a_0} \sin a_{2.1}\right) \cos B_0 = \frac{\mathfrak{b}}{a_0} \cos B_0 \sin \frac{a_{1.3} + a_{3.1} \pm 180^0}{2} + Gl_2, \quad (16)$$

wobei das Vorzeichen des Sinus rechter Hand wie dasjenige von $\sin a_{1.3}$ zu nehmen ist. Dies führen wir in (14) ein und reduzieren damit (12). Es ergiebt sich dann schliefslich:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho'' \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{2a_0^2} K_0 \sin B \left(1 + \frac{\mathfrak{b}^2}{8a_0^2} K_0\right) \\ &+ \frac{1}{24} \varrho'' e^2 \sin 2B_0 \left\{\frac{\mathfrak{a}^3}{a_0^3} \sin a_{2.3} - \frac{\mathfrak{c}^3}{a_0^3} \sin a_{2.1} + \frac{\mathfrak{b}^3}{a_0^3} \sin a_b\right\} + Gl_6, \\ a_b &= \frac{1}{2}(a_{3.1} + a_{1.3} \pm 180^0); \ \left\{\begin{array}{c}\sin a_b \text{ hat mit} \\ \sin a_{1.3} \text{ gleiches} \\ \text{Vorzeichen.}\end{array}\right. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Durch cyklische Vertauschung folgt noch hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho'' \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{2a_0^2} K_0 \sin C \left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{8a_0^2} K_0\right) \\ &+ \frac{1}{24} \varrho'' e^2 \sin 2B_0 \left\{\frac{\mathfrak{b}^3}{a_0^3} \sin a_{3.1} - \frac{\mathfrak{a}^3}{a_0^3} \sin a_{3.2} + \frac{\mathfrak{c}^3}{a_0^3} \sin a_c\right\} + Gl_6, \\ a_c &= \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} \pm 180)^0; \ \left\{\begin{array}{c}\sin a_c \text{ hat mit} \\ \sin a_{1.2} \text{ gleiches} \\ \text{Vorzeichen.}\end{array}\right. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho''\,\dfrac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{2a_0^2}\,K_0 \sin A\left(1 + \dfrac{\mathfrak{a}}{8a_0^2}\,K_0\right) \\ + \dfrac{1}{24}\,\varrho''\,e^2 \sin 2B_0 \left\{\dfrac{\mathfrak{c}^3}{a_0^3}\sin \alpha_{1.2} - \dfrac{\mathfrak{b}^3}{a_0^3}\sin \alpha_{1.3} + \dfrac{\mathfrak{a}^3}{a_0^3}\sin \alpha_a\right\} + Gl_6 \\ \alpha_a = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_{2.3} + \alpha_{3.2} + 180^0\right); \left\{\begin{array}{c}\text{sin } \alpha_a \text{ hat mit} \\ \text{sin } \alpha_{2.3} \text{ gleiches} \\ \text{Vorzeichen.}\end{array}\right.\end{array}\right\} \quad (19)$$

§ 31. Zahlenbeispiel III, vergl. S. 200.

$\log \dfrac{\varrho''}{2a_0^2} = 1{,}4041082-10$ $\qquad \log K_0 = 9{,}9993197-10$

$B_0 = 51^0\,48',6$ $\qquad \log \sin 2B_0 = 9{,}988-10$

$\log \dfrac{M}{8a_0^2} = \underset{\text{f. Einh. der 7. Dec.}}{2{,}1255-10}$ $\qquad \log \dfrac{e^2 \sin 2B_0}{12\,a_0} = 9{,}929-20$

$\alpha_{1.2} =$ 23° 12′	log sin = 9,595 —10		$\alpha_a =$ 156° 1′	log sin = 9,609 —10
$\alpha_{1.3} =$ 65 16	9,958 —10		$\alpha_b =$ 242 25	$9{,}947_n$—10
$\alpha_{2.1} =$ 199 58	$9{,}533_n$—10		$\alpha_c =$ 21 35	9,566 —10
$\alpha_{2.3} =$ 157 10	9,589 —10		$A =$ 42 4	log cos = 9,871 —10
$\alpha_{3.1} =$ 239 33	$9{,}936_n$—10		$B =$ 42 48	9,866 —10
$\alpha_{3.2} =$ 334 52	$9{,}628_n$—10		$C =$ 95 19	$8{,}967_n$—10

Die *Formel* (12) S. 207 giebt bezw. für die Berechnung mit $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$:

$\varepsilon =$ 699,1825″ — 0,0156″ — 0,0264″ + 0,0260″ + 0,0341″ = 699,2006″
699,1798 — 0,0134 + 0,0269 + 0,0051 — 0,0025 = 699,1959
699,1797 + 0,0625 — 0,0184 + 0,0403 — 0,0633 = 699,2008
Mittel = 699,1991″.

Dagegen geben die *Formeln* (17) bis (19) S. 208 u. 209 bezw.:

$\varepsilon =$ 699,1825″ + 0,0119″ + 0,0344″ — 0,0283″ = 699,2005″
699,1798 — 0,0275 + 0,0130 + 0,0371 = 699,2022
699,1797 + 0,0397 — 0,0290 + 0,0124 = 699,2028
Mittel = 699,2019″.

Der genaue Wert ist nach S. 200 gleich 699,2014″. Mit demselben stimmen die Mittel aus den Berechnungen beider Art, nämlich die Werte 699,2006 ..., 1992 ..., 2018 im allgemeinen besser überein, als die Ergebnisse der einzelnen Berechnungen.

§ 32. **Schlufsbemerkungen.** Der im Vorstehenden entwickelte Sinussatz und die Formel für ε bilden die Grundlagen für die Ausgleichung und Berechnung eines Dreiecksnetzes. Zur Vollständigkeit

der Formelsammlung würde aber insbesondere im Hinblick auf die Berechnung von Polarkoordinaten noch die Aufstellung von solchen Formeln wie S. 109, § 24 für die sphärische Rechnung gehören.

(Der Tangentensatz würde sich wie früher aus dem Sinussatz ableiten lassen, während die Ableitung einer Formel, die $\mathfrak{c}^2$ direkt aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und C giebt, von den Formeln:

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cos\mathfrak{C},$$

$$\cos\mathfrak{C} = \sin\mu_{3.1}\sin\mu_{3.2} + \cos\mu_{3.1}\cos\mu_{3.2}\cos C$$

auszugehen hätte.)

Die Ausführung hierzu mag indes unterbleiben, weil eine Anwendung der Formeln nicht in Aussicht steht. Denn die schon für rein sphärische Rechnung mühsame Berechnung von Sehnenpolarkoordinaten (vergl. S. 111) kompliziert sich fürs Ellipsoid offenbar noch weit mehr.

Bei *Bearbeitung eines Dreiecksnetzes mittelst Sehnen und Horizontalwinkeln* wird man daher am zweckmäfsigsten direkt mittelst der Sehnen, die im *beobachteten* Netze vorkommen, Breiten- und Längendifferenzen berechnen. Da hierbei der *Grunert*sche Satz (unter Anwendung eines besonderen mittleren K_0 für jedes Dreieck) gerade noch ausreicht und da ferner die Berechnung geographischer Breiten- und Längendifferenzen mittelst der Sehnen, falls eine Tafel für log W vorliegt, nicht unbequem ist, wird der Rechnungsgang für diese Methode recht einfach. Sie verdient daher einige Beachtung in allen Fällen, wo die geographischen Koordinaten *aller* Netzpunkte ein geeignetes Ziel der Berechnungen bilden, wie bei gröfsern Landesvermessungen.

Bremiker hat in seinen *Studien* ebenfalls die Berechnung mit Sehnen durchgeführt, jedoch in der Weise (vergl. § 9), dafs jeder Horizontalwinkel auf seinen Sehnenwinkel nach einer der Formeln reduziert wird:

$$\sin\frac{A-\mathfrak{A}}{2} = \frac{n^2\cos 2N}{\sin\frac{A+\mathfrak{A}}{2}} \text{ mit } \begin{cases} n\cos N = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{\mu_{1.2}+\mu_{1.3}}{2} \\ n\sin N = \cos\frac{A}{2}\sin\frac{\mu_{1.2}-\mu_{1.3}}{2}, \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - \mathfrak{A}} = \varrho''\tan\frac{A}{2}\left(\frac{\mu_{1.2}+\mu_{1.3}}{2}\right)^2 - \varrho''\cot\frac{A}{2}\left(\frac{\mu_{1.2}-\mu_{1.3}}{2}\right)^2 + \cdots,$$

deren zweite eine Näherungsformel ist, welche, obgleich sie auf Werte von A nahe an 0° oder 180° nicht angewandt werden darf, für wohlgeformte, mefsbare Dreiecke in der Regel ausreichen wird. Es sind dies Formeln, die leicht aus der Gleichung

$$\cos\mathfrak{A} = \sin\mu_{1.2}\sin\mu_{1.3} + \cos\mu_{1.2}\cos\mu_{1.3}\cos A$$

abgeleitet werden können.

Diese Methode ist zur Berechnung von Polarkoordinaten wohl noch weniger wie die oben angegebene geeignet, da sie eine fortwährende Hin- und Her-Reduktion zwischen Sehnen- und Horizontalwinkeln erfordert. Denn Sehnenwinkel entbehren des Vorteils der Horizontalwinkel, wenn sie denselben Scheitel haben, auch in *einer* Ebene zu liegen und deshalb unmittelbar addiert und subtrahiert werden zu können.

Überdies ist die Ausgleichung und Berechnung eines beobachteten Dreiecksnetzes mittelst Sehnen und Horizontalwinkeln, wie leicht zu erkennen, ungleich einfacher als diejenige mit Sehnen und Sehnenwinkeln. Wenn es je in Frage kommen kann, ob mit Sehnen zu rechnen ist, so dürfte sodann die weitere Entscheidung, ob Horizontalwinkel oder Sehnenwinkel, nur zu Gunsten der ersteren ausfallen.

Was die Formeln zur Übertragung geographischer Koordinaten und zur Berechnung von Sehne und Azimut aus geographischen Positionen anlangt, so sind unsere Entwicklungen nicht wesentlich von denen *Bremikers* verschieden. In dessen *Studien* fehlen aber die wichtigen Näherungsformeln für kleine Distanzen in Bezug auf die letztgenannte Aufgabe.

Diese Näherungsformeln haben auch, abgesehen von der Anwendung der Sehne, einen Wert, da sie ganz geeignet sind, wie sich später zeigen wird, *die geodätische Linie zwischen 2 Punkten aus deren geographischen Positionen zu ermitteln.* Ein Übergang hierzu ist schon gewonnen, insofern die Sehne mit der Länge der vertikalen Schnitte in Verbindung gebracht ist.

Sie lehren überdies die S. 203 angegebenen einfachen Beziehungen kennen, welche zwischen den Horizontalwinkeln auf dem Ellipsoid und den entsprechenden auf der Kugel bei gleichen geographischen Positionen der Punkte stattfinden. Der allgemeinen Verwendung der *Abbildung des Ellipsoids auf einer Kugel* ohne Veränderung der geographischen Positionen steht aber die Gröfse der Azimut-Reduktionen nach S. 157 § 11 (2) und (3) entgegen.

Dies letztere hängt zusammen mit derjenigen Eigentümlichkeit unserer Lösung der Aufgabe, die Azimute der Vertikalschnitte aus den geographischen Positionen zu finden, nach welcher die aus der Ellipticität entspringende Korrektion der sphärischen Rechnung nahezu unabhängig von der Distanz ist. Nichtsdestoweniger vereinfacht sich doch die Rechnung für kurze Distanzen sehr, und da die Formeln überhaupt einfach sind, so ist jener Umstand, insoweit nur diese Aufgabe in betracht kommt, kein Mangel.

Wollte man indes Formeln haben, die jene Korrektion von der Entfernung abhängig machen, so könnten solche leicht aus Betrachtungen, welche *Hansen* in seinen *Geodätischen Untersuchungen* zu anderen Zwecken anstellt, (speziell aus denen des 2. Abschnitts) entnommen werden. Handelt es sich insbesondere um 2 Punkte P_1 und P_2, so reduziert Hansen die geographische Breite eines der Punkte, also etwa diejenige von P_2, auf die Linie $P_2 K'_1$ (Fig. 8 S. 134), so dafs es möglich ist, K'_1 als Zentrum einer Hilfskugel zu nehmen.

Wir müssen hier noch erwähnen, dafs *Delambre* 1799 in seinen *Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien* ebenfalls (wie später *Bremiker*) die Rechnung mit Sehnendreiecken empfahl und Formeln zur Übertragung geographischer Koordinaten durch Sehnen aufstellte. Zunächst giebt er sphärische Formeln und zwar Reihenentwicklungen, die

noch k^3 berücksichtigen. Er wendet dann diese auf die Kugel mit dem Zentrum K'_1 an (wie später *Hansen* und schon früher *Legendre*, 1787) und ermittelt die Korrektionen wegen der ellipsoidischen Gestalt. In den Endformeln berücksichtigt er nur e^2 und k^2 (S. 83 a. a. O.; in der Formel für δ ist das Vorzeichen von e^2 umzukehren). Diese Endformeln geben daher nur für sehr geringe Sehnenlängen eine ausreichende Genauigkeit.

In dem Hauptwerke der englischen Vermessung *Ordnance Trigonometrical Survey, Principal Triangulation* p. 228 — 253 finden sich Formeln für eine *Geodäsie mit Horizontalwinkeln und Vertikalschnitten*. Wir sind indes der Meinung, dafs die Anwendung der letzteren anstatt der Sehne nicht zu empfehlen ist, in welcher Meinung uns auch die Formeln a. a. O. nicht beirrt haben.

Einen in mehreren Beziehungen interessanten, selbständigen Beitrag zur Geodäsie *ohne* Anwendung der geodätischen Linie gab *Sonderhof* in der *Zeitschr. f. Math. u. Physik*. Bd. 17. 1872. S. 89 u. 177 u. ff.

---

5. Kapitel.

Fundamentalformeln für die geodätische Linie.

§ 1. Horizontale Entfernung und geodätische Linie auf dem Rotationsellipsoid. Im vorigen Kapitel ist gezeigt worden, dafs die gegenseitigen Vertikalschnitte zweier Punkte im allgemeinen von einander abweichen. Aber der Betrag ist nach S. 189 für Entfernungen bis zu 64^{km} so gering, dafs er in der Regel praktisch ohne alle Bedeutung bleibt; wenn also bei gegenseitiger Sichtbarkeit der Punkte die Vertikalschnitte abgesteckt werden, so werden sie nicht merkbar von einander abweichen und es wird darum auch der Geodät nicht zweifelhaft sein, was er im Sinne der geodätischen Praxis als gerade Linie und als horizontale Entfernung anzusehen hat.

Immerhin existiert eine Unklarheit für kleine Entfernungen im Sinne der Mathematik, für gröfsere Entfernungen aber auch im Sinne der Praxis. Zunächst in Bezug auf letztere läfst sich dieselbe aber dadurch beseitigen, dafs man dem in der Anmerkung zu § 1, S. 70 geschilderten Vorgange folgt. Dabei ist der Einfachheit halber von der Verbindung *zweier* Punkte zunächst abgesehen und nur die Rede von der Absteckung einer Linie von *einem* Punkt P_0 aus in gegebener Richtung:

Man geht (Fig. 14) von P_0 aus in einer dem gegebenen Azimut entsprechenden Vertikalebene bis P_1, wobei P_1 so nahe an P_0 zu denken ist, dafs die Vertikalebene von P_0 nach P_1 von der anderen, die von P_1 nach P_0 gelegt werden kann, zwischen P_1 und P_0 nicht merklich abweicht. In dieser letzteren Ebene geht man nun weiter

bis P_2 und von hier aus in der rückwärts verlängerten Vertikalebene von P_2 nach P_1 weiter bis P_3, u. s. f. Sind die Entfernungen $P_0 P_1$, $P_1 P_2$ gehörig klein, so wird die in der beschriebenen Weise abgesteckte Linie praktisch als kontinuierliche Linie auftreten und der Geodät wird sie als gerade Linie im Sinne der Praxis zwischen irgend zweien der Punkte P auffassen.

Um nun aber die kleinen Brechungen der Linie ganz zu beseitigen, denkt man sich die Elemente P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 u. s. f. unendlich klein. Nach (25) S. 187 sind in diesem Falle die Brechungswinkel unendlich klein von der 2. Ordnung; und es ergiebt sich daher eine kontinuierliche Linie, die wir nach S. 70 als *geodätische Linie* auch im Sinne der strengen Anforderungen der Mathematik bezeichnen dürfen. Für diese Linie ist es gleichgültig, in welcher Richtung man die Absteckung beginnt, denn augenscheinlich bekommt man keine andere Linie, wenn man (Fig. 14) von P_n aus rückwärts sich die Absteckung wiederholt denkt. Als eindeutige Verbindung zweier Punkte und als eine dem Vorgange der geodätischen Praxis bei Absteckung und Verlängerung gerader Linien entsprechende Verbindung ist die geodätische Linie vorzüglich geeignet, die *horizontale Entfernung* zweier Punkte zu bezeichnen.

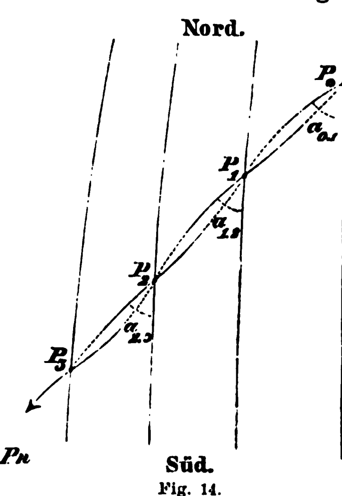


Fig. 14.

Weiterhin werden wir sehen, dafs sie zugleich in der Regel die kürzeste Entfernung angiebt und dafs sie zu einem verhältnismäfsig einfachen Kalkül führt.

Hier ist nun die nächste Aufgabe, aus der geometrischen Herleitung der geodätischen Linie eine sie definierende Gleichung herzustellen.

§ 2. Grundgleichung der geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid. S. 169 des vorigen Kapitels fanden wir in Formel (12) für zwei durch ihre gegenseitigen Vertikalschnitte verbundene Punkte P_1 und P_2 die Beziehung:

$$\sin \alpha_{1.2} \cos \beta_1 \cos \mu_{1.2} = \sin (\alpha_{2.1} - 180^0) \cos \beta_2 \cos \mu_{2.1}. \qquad (1)$$

Hierin sind $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ die Azimute der Vertikalschnitte von P_1 nach P_2 und von P_2 nach P_1, $\mu_{1.2}$ und $\mu_{2.1}$ die Depressionswinkel der Sehne $P_1 P_2$ in P_1 und P_2, und β_1 und β_2 die reduzierten Breiten der Punkte P_1 und P_2.

Diese Formel wenden wir an auf die Punkte P_0 und P_1, P_1 und P_2, P_2 und P_3 u. s. f. und haben:

$$\left.\begin{aligned}\sin a_{0.1}\cos\beta_0 &= \sin(a_{1.0}-180^0)\cos\beta_1\frac{\cos\mu_{1.0}}{\cos\mu_{0.1}}\\ \sin a_{1.2}\cos\beta_1 &= \sin(a_{2.1}-180^0)\cos\beta_2\frac{\cos\mu_{2.1}}{\cos\mu_{1.2}}\\ \sin a_{2.3}\cos\beta_2 &= \sin(a_{3.2}-180^0)\cos\beta_3\frac{\cos\mu_{3.2}}{\cos\mu_{2.3}}\\ &\text{u. s. f.}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Da nun zugleich $a_{1.2}=a_{1.0}-180^0$, $a_{2.3}=a_{2.1}-180^0$, u. s. f., so ist $\sin a_{1.2}=\sin(a_{1.0}-180^0)$, $\sin a_{2.3}=\sin(a_{2.1}-180^0)$, u. s. f. Multipliziert man daher die Gleichungen (2) Seite für Seite und geht bis P_n, so wird erhalten:

$$\sin a_{0.1}\cos\beta_0=\sin(a_{n.\overline{n-1}}-180^0)\cos\beta_n\left(\frac{\cos\mu_{1.0}}{\cos\mu_{0.1}}\frac{\cos\mu_{2.1}}{\cos\mu_{1.2}}\cdots\frac{\cos\mu_{n.\overline{n-1}}}{\cos\mu_{\overline{n-1}.n}}\right).\ (3)$$

Dies ist bereits die Grundgleichung der geodätischen Linie und es ist nur noch zu beweisen, dafs die Klammer bei unendlich kleinen Abständen der benachbarten Punkte $P_0, P_1, P_2 \ldots P_n$ d. h. für $n=\infty$ genau gleich 1 wird.

Nun kann man aber nach den Formeln (3) S. 29 für den natürlichen Logarithmus von $\cos\mu$ setzen $-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2$, wobei $\varkappa$ für kleine μ nahezu gleich 1 ist. Bezeichnet man die Klammer in (3) mit P und nimmt darin alle Cosinus in den Zähler oder Nenner, so wird hiermit:

$$-\frac{1}{2}\sum\varkappa\mu^2<\log P<+\frac{1}{2}\sum\varkappa\mu^2.\qquad(4)$$

Hierin deutet Σ die Summierung aller Werte $\varkappa\mu^2$ mit verschiedenen Indices an. Setzt man nun links und rechts für jedes $\varkappa$ das gröfste derselben, ferner für je einen Faktor μ das gröfste aller μ, so folgt weiter:

$$-\frac{1}{2}\varkappa_m\mu_m\sum\mu<\log P<+\frac{1}{2}\varkappa_m\mu_m\sum\mu.\qquad(5)$$

Läfst man jetzt die Elemente unendlich klein werden, so ist doch $\Sigma\mu$ ein endlicher Winkel, nämlich derjenige, den die Normale beschreibt, wenn sie von P_0 bis P_n entlang der geodätischen Linie gleitet. Dagegen ist μ_m alsdann unendlich klein, d. h. es wird $\log P=$ null, $P=1$. Wir haben daher

$$\sin\alpha_0\cos\beta_0=\sin\alpha_n\cos\beta_n,\qquad(6)$$

wobei das Azimut $a_{0.1}$ der wachsenden Linie in P_0 mit α_0 und das

Azimut $(\alpha_{n.\overline{n-1}} - 180^0)$ in P_n für die noch weiter wachsenden Linie mit α_n bezeichnet ist, Fig. 15.

Indem nun P_n jeden beliebigen Punkt der geodätischen Linie, welche von P_0 im Azimut α_0 ausgeht, bezeichnen kann, bedeutet (6) nichts anderes als:

Es ist $\sin\alpha\cos\beta$ *für alle Punkte einer geodätischen Linie konstant.*

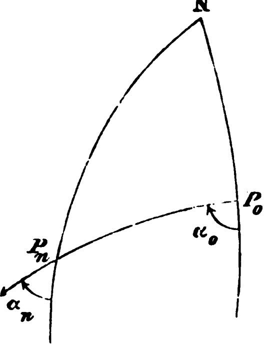


Fig. 15.

Wenn wir den genauen Ausdruck für P und μ berücksichtigen, so läfst sich angeben, um wieviel P von 1 bei endlichem n abweicht. Diese Rechnung wollen wir noch durchführen.

Nach Formel (1) S. 174 ist:

$$\left.\begin{aligned}\sin\mu_{1.2} &= \frac{\mathfrak{k}_{1.2}\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}{2a_0}\left(1+\delta\cos^2\chi_{1.2}\right)\\ \sin\mu_{2.1} &= \frac{\mathfrak{k}_{1.2}\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{2a_0}\left(1+\delta\cos^2\chi_{1.2}\right),\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

worin $\mathfrak{k}_{1.2}$ die Sehne P_1P_2 und $\chi_{1.2}$ deren Neigungswinkel zur Rotationsaxe bezeichnet. Auf die Differenz der Quadrate dieser Werte:

$$\sin^2\mu_{2.1} - \sin^2\mu_{1.2} = \frac{e^2\mathfrak{k}_{1.2}^2}{4a_0^2}(1+\delta\cos^2\chi_{1.2})(\sin^2 B_1 - \sin^2 B_2) \quad (8)$$

läfst sich nun der Quotient $(\cos\mu_{2.1} : \cos\mu_{1.2})$ leicht zurückführen. Es ist, unter log den natürlichen Logarithmus verstanden:

$$\log\frac{\cos\mu_{2.1}}{\cos\mu_{1.2}} = \frac{1}{2}\log(1-\sin^2\mu_{2.1}) - \frac{1}{2}\log(1-\sin^2\mu_{1.2})$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{(\sin^2\mu_{2.1}-\sin^2\mu_{1.2}) + \frac{1}{2}(\sin^4\mu_{2.1}-\sin^4\mu_{1.2}) + \frac{1}{3}(\sin^6\mu_{2.1}-\sin^6\mu_{1.2}) + \cdots\right\}$$

Hier kann man $(\sin^2\mu_{2.1} - \sin^2\mu_{1.2})$ als Faktor ziehen, und es geben dann innerhalb der geschlungenen Parenthese

das 2. Glied: $\frac{1}{2}(\sin^2\mu_{2.1} + \sin^2\mu_{1.2})$,

das 3. Glied: $\frac{1}{3}(\sin^4\mu_{2.1} + \sin^2\mu_{2.1}\sin^2\mu_{1.2} + \sin^4\mu_{1.2})$,

u. s. f.

Das n. Glied giebt $\frac{1}{n}$-mal einem Aggregat von n Sinuspotenzen n. Grades. Bezeichnet nun μ einen Wert, der gröfser ist als $\mu_{2.1}$ und $\mu_{1.2}$, der aber für $\mathfrak{k}_{1.2} = 0$ ebenfalls null wird, so ergiebt sich, indem man für $\mu_{2.1}$ und $\mu_{1.2}$ innerhalb der geschlungenen Parenthese einfach μ setzt:

$$\log \frac{\cos \mu_{2.1}}{\cos \mu_{1.2}} = -\frac{1}{2} (\sin^2 \mu_{2.1} - \sin^2 \mu_{1.2}) (1 + \sin^2 \mu + \sin^4 \mu + \cdots) \varkappa$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \mu_{2.1} - \sin^2 \mu_{1.2}}{1 - \sin^2 \mu} \varkappa,$$

$\varkappa$ ein positiver echter Bruch. Durch Einführung von Formel (8) erhalten wir hieraus:

$$\log \frac{\cos \mu_{2.1}}{\cos \mu_{1.2}} = \frac{\mathfrak{k}_{1.2}^2 (\sin^2 B_2 - \sin^2 B_1)}{8 a_0^2} (1 + \delta \cos^2 \chi_{1.2}) \frac{e^2 \varkappa}{1 - \sin^2 \mu}. \quad (9)$$

Diese Formel können wir auf $(\cos \mu_{1.0} : \cos \mu_{0.1})$, $(\cos \mu_{2.1} : \cos \mu_{1.2})$, $(\cos \mu_{3.2} : \cos \mu_{2.3})$ u. s. f. anwenden und die Logarithmen addieren. Nehmen wir dabei die rechte Seite immer positiv, setzen ferner für

$$(\sin^2 B_i - \sin^2 B_{i-1}), \; i = 1 \text{ bis } n,$$

den absolut gröfsten Wert unter diesen Differenzen, den wir mit $\Delta \sin^2 B$ bezeichnen, setzen endlich noch für $\cos^2 \chi_{1.2}$ und $\varkappa$ einfach 1 und für μ in $(1 - \sin^2 \mu)$ das gröfste der vorkommenden μ, so folgt:

$$\log P < \frac{\delta \cdot \Delta \sin^2 B}{8 a_0^2 (1 - \sin^2 \mu)} \Sigma \mathfrak{k}^2. \quad (10)$$

Die Summierung der $\mathfrak{k}^2$ hat sich über alle Strecken auszudehnen:

$$\Sigma \mathfrak{k}^2 = \mathfrak{k}_{0.1}^2 + \mathfrak{k}_{1.2}^2 + \cdots \mathfrak{k}_{n.\overline{n-1}}^2.$$

Substituiert man aber in jedem Teile für eines der $\mathfrak{k}$ einen unter allen $\mathfrak{k}$ vorkommenden Maximalwert $\mathfrak{k}_m$, so ergiebt sich:

$$\Sigma \mathfrak{k}^2 < \mathfrak{k}_m \Sigma \mathfrak{k}. \quad (11)$$

Nimmt man nun die Anzahl der Strecken unendlich grofs, jede einzelne aber unendlich klein, so ist $\Sigma \mathfrak{k}$ selbstredend ein endlicher Wert, nämlich die Länge der geodätischen Linie, dagegen ist $\mathfrak{k}_m$ unendlich klein und ebenso $\Delta \sin^2 B$. Man hat daher für $n = \infty$ wie oben $\log P =$ null.

Besteht dagegen die Linie $P_0 P_n$ aus einer endlichen Anzahl nahezu gleich langer Strecken und beschränkt man sich auf Ausdehnungen, innerhalb welcher das Azimut α nicht sehr erheblichen Variationen ausgesetzt ist, so kann man für $\Sigma (\sin^2 B_i - \sin^2 B_{i-1})$ setzen $n$mal einen mittleren Wert von $\sin^2 B_i - \sin^2 B_{i-1}$, d. i. angenähert

$$n \left(-\frac{s}{a_0 n} \cos \alpha \sin 2B\right) \quad \text{oder einfacher} \quad -\frac{s}{a_0} \cos \alpha \sin 2B,$$

worin α ein mittleres Azimut, B eine mittlere geographische Breite und s die Länge der ganzen Linie $P_0 P_n$ vorstellt. Man erhält hiermit, sowie mittelst einiger anderer, leicht ersichtlicher Vernachlässigungen:

$$\log (\sin \alpha_0 \cos \beta_0) = \log (\sin \alpha_n \cos \beta_n) - \frac{\delta s^3}{8 a_0^3 n^2} \cos \alpha \sin 2B + \cdots (12)$$

als näherungsweise Beziehung für den Anfangspunkt und Endpunkt einer in n gleich langen, kleinen aber endlichen Strecken abgesteckten Linie von der Länge s, dem mittleren Azimut α und der mittleren geographischen Breite B.

§ 3. **Lauf der geodätischen Linie.** Betrachtet man das Produkt $\sin\alpha\cos\beta$, welches für eine bestimmte geodätische Linie gleichen Wert in allen ihren Punkten hat, nach der relativen Gröfse seiner Faktoren, so ist ersichtlich, dafs für $\alpha = 90^0$ β seinen Maximalwert erreicht. Geht nun eine geodätische Linie von einem Punkte P_1 mit nördlicher Breite in einem Azimut α_1 zwischen 90^0 und 180^0 aus, so nimmt zunächst β zu und also $\cos\beta$ ab. Mit abnehmenden $\cos\beta$ wächst aber $\sin\alpha$, so dafs also anfangs gleichzeitig β zunimmt, α abnimmt, bis endlich α gleich 90^0 geworden ist.

Ist dieser Wert von α und damit die höchste Breite erreicht, so nimmt bei weiterem Verlaufe β wieder ab, da es wegen der Konstanz des Produkts $\sin\alpha\cos\beta$ nicht mehr wachsen kann, da es ferner aber auch nicht konstant bleiben kann, weil ja sonst die geodätische Linie mit dem Parallelkreis zusammenfiele. (Dieser ist sicher keine geodätische Linie, da seine Schmiegungsebene schief zur Oberfläche steht). Weil nun $\sin\alpha$ bei wachsendem $\cos\beta$ abnimmt, hierbei aber $\alpha < 90^0$ ist, so mufs jetzt α kleiner und kleiner werden. Für $\cos\beta = 1$, d. h. im Äquator tritt ein Minimum ein. Dieses Minimum von α ergänzt das Maximum von β zu 90^0, da sein Sinus gleich dessen Cosinus sein mufs:

$$\alpha_{\text{Min.}} + \beta_{\text{Max.}} = 90^0. \tag{1}$$

Nach Überschreitung des Äquators nimmt $\cos\beta$ ab, $\sin\alpha$ zu, und dies geht so fort, bis wieder $\alpha = 90^0$ ist und β sein negatives Maximum erreicht hat. Indem α alsdann in den 2. Quadranten übergeht, nimmt $\sin\alpha$ wieder ab und $\cos\beta$ zu, bis bei erneuter Durchkreuzung des Äquators α ein Maximum im 2. Quadranten erreicht und von hier aus die geodätische Linie wieder in die nördliche Ellipsoidhälfte eintritt. Zwischen $\alpha_{\text{Min.}}$ und $\alpha_{\text{Max.}}$ findet die Beziehung statt:

$$\alpha_{\text{Min.}} + \alpha_{\text{Max.}} = 180^0. \tag{2}$$

Hiernach bewegt sich die geodätische Linie, welche an irgend einer Stelle ein Azimut zwischen 0^0 und 180^0 hat, stets in Azimuten vorwärts, die zwischen zwei Grenzwerten $\alpha_{\text{Min.}}$ und $\alpha_{\text{Max.}}$ liegen. Diese Grenzwerte sind die Azimute bei Durchkreuzung des Äquators.

Ist dagegen auch nur in einem Punkte das Azimut zwischen 180^0 und 360^0 befindlich, so sind alle Azimute $> 180^0$ und schwanken zwischen zwei im 3. und 4. Quadraten gelegenen Grenzwerten, für welche aber auch (bis auf einen Fehler von 360^0) die Relation (2) gilt.

Bei der von uns angenommenen Zählweise der Azimute hat im 1. Falle die geodätische Linie einen westlichen Lauf, im 2. Falle aber einen östlichen Lauf. Ein wesentlicher Unterschied ist jedoch nicht zwischen beiden Arten Linien, denn beschreibt man zunächst eine geodätische Linie in westlicher Richtung und nimmt sodann eine Rückwärtsbewegung vor, so wächst das Azimut der Bewegungsrichtung um 180^0, und man beschreibt in östlicher Richtung die frühere Bahn.

Eine jede geodätische Linie ist in ihrem Laufe auf ein Gebiet beschränkt, welches zwischen zwei in gleichem Abstande nördlich und südlich vom Äquator befindlichen Parallelkreisen gelegen ist. Die Amplitude in Breite hängt von der Konstanten $\sin\alpha\cos\beta$ ab.

Ist diese null, so ist entweder α jederzeit null oder β jederzeit 90^0. Der 1. Fall entspricht den Meridianen, der 2. Fall giebt keine Linie.

Ist die Konstante gleich ± 1, so ist $\alpha = 90^0$ oder 270^0 und $\beta = 0$. Dies entspricht dem Äquator.

§ 4. **Länge einer geodätischen Linie, die von einem gegebenen Punkte in bestimmter Richtung ausgeht.** Ist β_1 die reduzierte Breite des gegebenen Punktes P_1 und α_1 das Azimut der geodätischen Linie, so besteht für einen beliebigen Punkt P derselben, dessen reduzierte Breite β ist, die Relation:

$$\sin\alpha\cos\beta = \sin\alpha_1\cos\beta_1\,, \tag{1}$$

wenn α das Azimut der wachsenden geodätischen Linie bezeichnet.

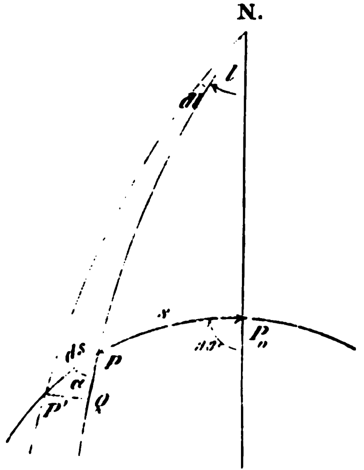


Fig. 16.

Unter den verschiedenen Punkten heben wir nun besonders einen derjenigen Punkte hervor, wo β sein positives Maximum erreicht. In Fig. 16 ist derselbe mit P_0 bezeichnet. Nennen wir die maximale reduzierte Breite β_0, so ist

$$\sin\alpha\cos\beta = \cos\beta_0\,. \tag{2}$$

Die Länge der geodätischen Linie von P_0 bis zu dem beliebigen Punkte P nennen wir s und setzen sie vorläufig *positiv* in *westlicher* Richtung, *negativ* in *östlicher* Richtung.

Wächst s durch Verschiebung von P nach P' um ds, wobei die reduzierte Breite β in $\beta + d\beta$ übergeht, und denkt man sich außerdem P ein andermal im Meridian nach Q mit der reduzierten Breite $\beta + d\beta$ verschoben, so sind P' und Q

Punkte eines und desselben Parallelkreises. Man kann $P'Q$ als rechtwinklig zum Meridian betrachten und setzen (Fig. 16):

$$ds = PQ \sec\alpha .$$

Nach S. 55 (1) ist aber das zu $d\beta$ gehörige Element dM des Meridianbogens gleich

$$a_0\sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}\, d\beta ;$$

setzt man dies für PQ ein und berücksichtigt, dafs bei $\alpha < 90^0$ $d\beta$ negativ ist, ds aber positiv genommen werden mufs, so folgt:

$$ds = - a_0\sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}\sec\alpha\, d\beta . \tag{3}$$

Diese Formel pafst im Vorzeichen auch auf diejenigen Teile der Linie, für welche α zwischen 90 und 180° liegt; denn alsdann ist $d\beta$ positiv, aber $\sec\alpha$ negativ, ds mithin positiv.

Um nun s durch Integration ermitteln zu können, setzen wir versuchsweise nach (2) für $\sec\alpha$ den Wert $\pm 1 : \sqrt{1 - \cos^2\beta_0 \sec^2\beta}$ und erhalten

$$ds = \pm a_0\sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\beta_0}}\cos\beta\, d\beta , \tag{4}$$

wobei das obere Vorzeichen für wachsende, das untere für abnehmende β gilt.

Ehe wir integrieren, erinnern wir uns des bekannten Resultats, welches für $e^2 =$ null, also den Fall der Kugel, herauskommt. Fig. 17 zeigt die entsprechende sphärische Figur, und zwar auf einer Kugel vom Radius 1.

Hier tritt an Stelle von s der Bogen φ, und es ist auf der Kugel vom Radius a_0 $s = a_0\varphi$ und $ds = a_0 d\varphi$. Formel (4) giebt aber für $e^2 =$ null:

$$ds = \pm a_0 \frac{\cos\beta\, d\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\beta_0}} ;$$

man sieht, dafs die Einführung der Variablen φ die Rechnung wesentlich vereinfacht, denn φ läfst sich aus der sphärischen Figur ohne Integration nach bekannten Formeln berechnen.

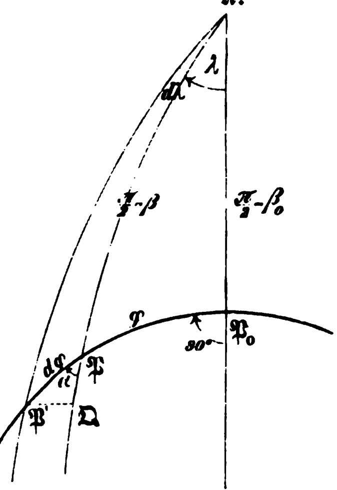


Fig. 17.

Es ist nun ein günstiger Umstand, dafs wir die Variable φ und die zu grunde liegende sphärische Hilfsfigur (Fig. 17) auch fürs Ellipsoid beibehalten können. Wählt man nämlich auf einer Hilfskugel

vom Radius 1 einen Punkt $\mathfrak{N}$ als Nordpol und nimmt einen Punkt $\mathfrak{P}_0$ in der Breite β_0 an, legt darauf rechtwinklig zum Meridian den gröfsten Kreis $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$, so erhält man wieder Fig. 17, und es ist in dem sphärischen Dreieck, welches die Meridiane von $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}$ mit dem gröfsten Kreis $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}$ bilden, nach dem Sinussatz

$$\sin\alpha\cos\beta = \cos\beta_0\,.$$

Dies ist aber Gleichung (2), d. h. hat ein Punkt $\mathfrak{P}$ als Breite die reduzierte Breite β des Punktes P der geodätischen Linie Fig. 16, so hat der gröfste Kreis $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{P}$ Fig. 17 gleiches Azimut mit der geodätischen Linie in P.

Hiermit ist natürlich noch nicht festgestellt, welche Beziehung im übrigen zwischen den Figuren 16 und 17 besteht. Einstweilen bezeichnen wir die Winkel der Meridiane in beiden Figuren verschieden und in der That werden wir finden, dafs die geographischen Längenunterschiede l und λ in Fig. 16 und 17 verschieden sind.*)

Man hat nun mittelst des bei wachsenden φ sich bildenden differentialen rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}$ (Fig. 17)

$$d\varphi = -\sec\alpha\, d\beta \tag{5}$$

und hiermit giebt die Formel (3) unter Elimination von $\sec\alpha$ sofort:

$$ds = a_0\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}\; d\varphi\,. \tag{6}$$

Diese Formel hat vor (4) nächst der Einfachheit noch den Vorzug, dafs keine Vorzeichenzweideutigkeit besteht, weil ds und $d\varphi$ gleichzeitig wachsen. Behufs Integration kann man aus dem sphärischen Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$ mittelst des Cosinussatzes für β die Beziehung zu φ entnehmen:

$$\sin\beta = \sin\beta_0\cos\varphi\,.$$

Führt man dies in (6) ein und hebt aus der Wurzel zugleich den Faktor $\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}$ aus, so folgt:

$$ds = a_0\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}\sqrt{1 - \frac{e^2\sin^2\beta_0}{1 - e^2\cos^2\beta_0}\sin^2\varphi}\; d\varphi\,. \tag{7}$$

Etwas eleganter wird diese Formel, wenn man die zu β_0 gehörige geographische Breite B_0 einführt. Man hat nach S. 40 (3) und (5)

*) Die hier eingeführte Hilfskugel ist ganz andrer Art als die im vorigen Kapitel S. 114 u. ff. benutzte, insofern sie nicht wie jene eine *Abbildung* des *ganzen* Ellipsoids vorstellt. Vielmehr haben jetzt nur die Punkte der geodätischen Linie und des gröfsten Kreises eine Beziehung zu einander.

$$\sin^2 B_0 = \frac{\sin^2 \beta_0}{1 - e^2 \cos^2 \beta_0}, \qquad \cos^2 \beta_0 = \frac{\cos^2 B_0}{1 - e^2 \sin^2 B_0},$$

und hiermit geht Formel (7), wenn man zur Abkürzung setzt

$$k = e \sin B_0, \tag{8}$$

über in:

$$ds = a_0 \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - k^2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \; d\varphi. \tag{9}$$

§ 5. **Fortsetzung. Länge der geodätischen Linie.** Vergleichen wir die oben gewonnene Formel (9) für das Bogendifferential der geodätischen Linie mit der Formel für das Bogendifferential dM des Meridianbogens, S. 55 (1), so zeigt sich eine grofse Ähnlichkeit. Unwesentlich ist, dafs dort der Sinus, hier der Cosinus unter dem Wurzelzeichen vorkommt, weil der Sinus in Cosinus übergeht, wenn man anstatt der Variablen ihr Komplement zu 90^0 einführt. Nun hing das Integral für den Meridianbogen (S. 55) ab von Koefficienten A_0, A_2, A_4 u. s. f., welche in 3 Formen dargestellt wurden (S. 47):

1. als Potenzreihen von e^2,
2. „ „ „ n, wobei $n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$,
3. „ „ „ m, „ $m = \frac{e^2}{2 - e^2}$.

Es fand sich, dafs die Anwendung von n am günstigsten ist. Demgemäfs nehmen wir jetzt sogleich die entsprechende Umwandlung wie damals vor, wobei dann an Stelle von k^2 eine neue Hilfsgröfse k_1 tritt, die mit k^2 durch nachstehende Relationen zusammenhängt:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = \frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{8} + \frac{5k^6}{64} + \frac{7k^8}{128} + \cdots, \\ k^2 &= \frac{4k_1}{(1 + k_1)^2} = 4k_1 - 8k_1^2 + 12k_1^3 - 16k_1^4 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die hier angegebenen Reihen sind von S. 37 entnommen mittelst Vertauschung von e und k, n und k_1. Ihre Konvergenz ist aufser Frage, da $k \leq e$ ist und bereits für e kein Zweifel in dieser Hinsicht bestand. Wir setzen nun in Formel (9) des vorigen Paragraphen für $\sin^2\varphi$ den Cosinus des doppelten Winkels und erhalten bei gleichzeitiger Einführung von k_1:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\varphi}}{1 + k_1},$$

$$\sqrt{1 - k^2} = \frac{1 - k_1}{1 + k_1},$$

hiermit aber anstatt (9):

$$ds = a_0 \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-k_1} \sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\varphi}\, d\varphi. \tag{2}$$

Die weitere Entwicklung ist wie S. 55. Setzen wir

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(\varepsilon^{2i\varphi} + \varepsilon^{-2i\varphi}),$$

wobei ε die Basis der natürlichen Logarithmen, i die $\sqrt{-1}$ bedeuten (S. 42), so ergiebt sich für die Wurzel in (2) die Formel:

$$\sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\varphi} = (1 + k_1 \varepsilon^{2i\varphi})^{\frac{1}{2}} (1 + k_1 \varepsilon^{-2i\varphi})^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

$$(1 + k_1 \varepsilon^{\pm 2i\varphi})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{k_1}{2}\varepsilon^{\pm 2i\varphi} - \frac{k_1^2}{8}\varepsilon^{\pm 4i\varphi} + \frac{k_1^3}{16}\varepsilon^{\pm 6i\varphi} - \frac{5k_1^4}{128}\varepsilon^{\pm 8i\varphi} + \cdots. \tag{4}$$

Die beiden Faktoren der Wurzelgröfse werden multipliziert und das Imaginäre alsdann mittelst der Relation $\cos u = \frac{1}{2}(\varepsilon^{iu} + \varepsilon^{-iu})$ entfernt. Nach S. 56 ist es hierbei überflüssig, k_1^4 zu berücksichtigen, wenigstens kann man sogleich das Glied mit $\sin 8\varphi$ weglassen. Dagegen soll in den andern Gliedern, um die starke Konvergenz der Koefficientenreihen besser übersehen zu können, bis k_1^4 gegangen werden. Es wird

$$\sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\varphi} = \left(1 + \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{64}k_1^4 + \cdots\right) + \left(k_1 - \frac{1}{8}k_1^3 + \cdots\right)\cos 2\varphi$$
$$- \left(\frac{1}{4}k_1^2 - \frac{1}{16}k_1^4 + \cdots\right)\cos 4\varphi + \left(\frac{1}{8}k_1^3 - \cdots\right)\cos 6\varphi + \cdots. \tag{5}$$

Dies in (2) eingeführt und integriert, wobei zu beachten, dafs für $\varphi = 0$ auch $s = 0$ ist, giebt:

$$s = a_0 \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-k_1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{64}k_1^4 + \cdots\right)\varphi + \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{16}k_1^3 + \cdots\right)\sin 2\varphi \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{16}k_1^2 - \frac{1}{64}k_1^4 + \cdots\right)\sin 4\varphi + \left(\frac{1}{48}k_1^3 - \cdots\right)\sin 6\varphi \cdots \right\}. \tag{6}$$

Hierin setzen wir für $a_0\sqrt{1-e^2}$ die kleine Halbaxe b_0 der Meridianellipse. Den Faktor von φ nehmen wir zugleich vor die grofse Parenthese und erhalten dann ebenso genau wie vorher:

$$s = b_0 \frac{1 + \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{64}k_1^4 + \cdots}{1 - k_1} \left\{ \varphi + \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{16}k_1^3 + \cdots\right)\sin 2\varphi \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{16}k_1^2 - \frac{1}{32}k_1^4 + \cdots\right)\sin 4\varphi + \left(\frac{1}{48}k_1^3 - \cdots\right)\sin 6\varphi + \cdots \right\}. \tag{7}$$

Der gröfste Wert von k_1 ist n d. i. nahezu $\frac{1}{600}$; es ist daher

$$\frac{k_1^4}{64} \leq 1 : 8\,000\,000\,000\,000 \text{ rund},$$

und man darf dieses Glied im Faktor vor der Parenthese weglassen, weil es selbst für eine die ganze Erde umkreisende geodätische Linie, wobei φ nahezu 2π wird, erst $\frac{1}{200}$ Millimeter giebt. Erst recht darf man ferner das Glied mit k_1^4 im Faktor von $\sin 4\varphi$ vernachlässigen und erhält somit für die Länge der Linie P_0P die Formel:

$$s = b_0 \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\varphi + \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{16}k_1^3\right)\sin 2\varphi - \frac{1}{16}k_1^2 \sin 4\varphi + \frac{1}{48}k_1^3 \sin 6\varphi\right\} + \cdots, \quad (8)$$

welche Formel noch für eine die ganze Erde umkreisende Linie in den Hundertstelmillimetern scharf ist.

Kommt es aber auf 5^{mm} nicht an, so kann man auch noch k_1^3 in der Parenthese vernachlässigen.

Denken wir uns nun Formel (8) auf zwei Punkte P_1 und P_2 angewandt, für welche φ die Werte φ_1 und φ_2 hat, wobei $\varphi_2 > \varphi_1$ sei, so folgt aus (8) durch Subtraktion:

$$s_2 - s_1 = b_0 \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\begin{array}{l}(\varphi_2-\varphi_1) + \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{16}k_1^3\right)(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \\ \quad - \frac{1}{16}k_1^2(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) + \frac{1}{48}k_1^3(\sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_1)\end{array}\right\} + \cdots$$

oder in einfacherer Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{l} s = b_0 \dfrac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\begin{array}{l}\Delta\varphi + \left(k_1 - \frac{3}{8}k_1^3\right)\cos 2\varphi \sin \Delta\varphi \\ \quad - \frac{1}{8}k_1^2 \cos 4\varphi \sin 2\Delta\varphi + \frac{1}{24}k_1^3 \cos 6\varphi \sin 3\Delta\varphi\end{array}\right\} + \cdots \\ \qquad s = \text{der horizontalen Entfernung } P_1P_2, \\ \qquad \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \end{array}\right\} \quad (9)$$

§ 6. **Gegeben die Länge s einer geodätischen Linie, die Lage eines der Endpunkte und das Azimut daselbst, gesucht die reduzierte Breite und das Azimut im andern Endpunkt.** Der gegebene Punkt werde P_1 genannt; seine reduzierte Breite sei gleich β_1 und das Azimut der Linie daselbst gleich α_1. In Bezug auf dieses fügen wir vorläufig die Bedingung hinzu, dafs $\alpha_1 < 180^0$ sei, damit im Anschlufs an das Vorige, insbesondere an Fig. 16, die Entfernung des gesuchten Punktes P_2 vom gegebenen Punkte P_1 eine positive Gröfse werde. Vergl. Fig. 18 und 19 auf S. 225.

Das rechtwinklige Dreieck $\mathfrak{U}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1$ giebt zunächst β_0, woraus

k und k_1 folgen; dann giebt es ferner φ_1, und hiermit giebt Formel (8) des vorigen Paragraphen sofort s_1.

Addiert man zu s_1 die gegebene Länge s, so folgt s_2, und nunmehr ist die auf φ_2 und s_2 angewandte Formel (8) nach φ_2 aufzulösen.

Hierbei verfahren wir ganz ebenso wie S. 53 § 10. Wir bezeichnen zunächst zur Abkürzung

$$\frac{s_1\,(1-k_1)}{b_0\left(1+\frac{1}{4}\,k_1^2\right)} \text{ mit } \sigma_1 \text{ und } \frac{s_2\,(1-k_1)}{b_0\left(1+\frac{1}{4}\,k_1^2\right)} \text{ mit } \sigma_2 \tag{1}$$

und setzen demgemäfs:

$$\frac{s\,(1-k_1)}{b_0\left(1+\frac{1}{4}\,k_1^2\right)} = \sigma_2 - \sigma_1 = \varDelta\sigma. \tag{2}$$

Formel (8) giebt nun, wenn der Faktor von φ_2 nach links dividiert wird:

$$\sigma_2 = \varphi_2 + \left(\frac{1}{2}\,k_1 - \frac{3}{16}\,k_1^3\right)\sin 2\varphi_2 - \frac{1}{16}\,k_1^2 \sin 4\varphi_2$$
$$+ \frac{1}{48}\,k_1^3 \sin 6\varphi_2 - \cdots. \tag{3}$$

Der aus dieser Formel ersichtliche Unterschied von σ_2 und φ_2 ist aber stets eine kleine Gröfse, im Maximum nur etwa gleich $\frac{1}{1200}$ oder in Sekunden gleich $206265:1200$ d. i. noch nicht $200''$. Es stöfst daher die folgende Entwicklung auf keine Bedenken.

Mit Vernachlässigung kleiner Glieder mit der 3. und mit höheren Potenzen von k_1 folgt aus (3):

$$\sin 2\sigma_2 = \sin 2\varphi_2 \cos\left\{k_1 \sin 2\varphi_2 - \frac{1}{8}\,k_1^2 \sin 4\varphi_2 + \cdots\right\}$$
$$+ \cos 2\varphi_2 \sin\left\{k_1 \sin 2\varphi_2 - \frac{1}{8}\,k_1^2 \sin 4\varphi_2 + \cdots\right\}.$$

Indem wir die Reihen für Cosinus und Sinus beachten, und konsequent die kleinen Glieder, welche in k_1^3 u. s. f. multipliziert sind, vernachlässigen, erhalten wir hieraus:

$$\sin 2\sigma_2 = \sin 2\varphi_2 + k_1 \sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 - \frac{1}{2}\,k_1^2 \sin^3 2\varphi_2$$
$$- \frac{1}{8}\,k_1^2 \cos 2\varphi_2 \sin 4\varphi_2 + \cdots.$$

Wir setzen nun im Vorstehenden:

$$\sin^3 2\varphi_2 = \frac{3}{4}\sin 2\varphi_2 - \frac{1}{4}\sin 6\varphi_2\,,$$

$$\sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 = \frac{1}{2}\sin 4\varphi_2\,,$$

$$\cos 2\varphi_2 \sin 4\varphi_2 = \frac{1}{2}\sin 6\varphi_2 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_2$$

und erhalten damit:

$$\sin 2\sigma_2 = \left(1 - \frac{7}{16}k_1^2\right)\sin 2\varphi_2 + \frac{1}{2}k_1 \sin 4\varphi_2 + \frac{1}{16}k_1^2 \sin 6\varphi_2 + \cdots. \quad (4)$$

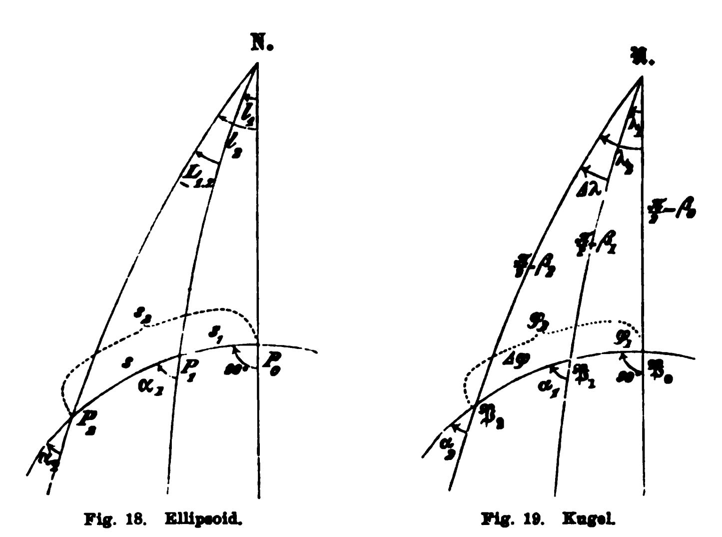


Fig. 18. Ellipsoid. Fig. 19. Kugel.

Mit Hilfe dieser Gleichung eliminieren wir $\sin 2\varphi_2$ aus (3), indem wir sie mit $\left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{16}k_1^3\right) : \left(1 - \frac{7}{16}k_1^2\right)$ multiplizieren und alsdann von (3) subtrahieren; wir erhalten:

$$\sigma_2 - \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{32}k_1^3\right)\sin 2\sigma_2$$

$$= \varphi_2 - \frac{5}{16}k_1^2 \sin 4\varphi_2 - \frac{1}{96}k_1^3 \sin 6\varphi_2 + \cdots. \quad (5)$$

Diese Formel vernachlässigt ebenso wie (3) alle Glieder mit höheren Potenzen als k_1^3, und es bleibt bei einiger Beachtung der höheren Glieder kein Zweifel, dafs sie auch numerisch noch ungefähr ebenso genau ist, als jene.

Wir setzen weiter mittelst (3):

$$\sin 4\sigma_2 = \sin 4\varphi_2 \cos(2k_1 \sin 2\varphi_2 + \cdots) + \cos 4\varphi_2 \sin(2k_1 \sin 2\varphi_2 + \cdots)$$

oder unter Vernachlässigung kleiner in k_1^2 u. s. f. multiplizierter Glieder:

$$\sin 4\sigma_2 = \sin 4\varphi_2 + 2k_1 \sin 2\varphi_2 \cos 4\varphi_2 + \cdots,$$

oder

$$\sin 4\sigma_2 = \sin 4\varphi_2 + k_1(\sin 6\varphi_2 - \sin 2\varphi_2) + \cdots. \tag{6}$$

Indem wir (6) mit $\frac{5}{16}k_1^2$ multiplizieren und zu (5) addieren, findet sich:

$$\sigma_2 - \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{32}k_1^3\right)\sin 2\sigma_2 + \frac{5}{16}k_1^2 \sin 4\sigma_2$$
$$= \varphi_2 + \frac{29}{96}k_1^3 \sin 6\varphi_2 - \frac{5}{16}k_1^3 \sin 2\varphi_2 + \cdots. \tag{7}$$

Jetzt aber kann man die in k_1^3 multiplizierten Glieder nach links nehmen und dabei für φ_2 einfach σ_2 setzen, was wieder nur kleine Fehler der Ordnung k_1^4 erzeugt. Somit ergiebt sich endlich:

$$\varphi_2 = \sigma_2 - \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{9}{32}k_1^3\right)\sin 2\sigma_2 + \frac{5}{16}k_1^2 \sin 4\sigma_2$$
$$- \frac{29}{96}k_1^3 \sin 6\sigma_2 + \cdots. \tag{8}$$

Vergleicht man diese Formel mit (3), so hat es den Anschein, als ob (8) weniger stark convergiere als (3). Obgleich nun in der That Formel (8) etwas weniger genau als (3) ist, so genügt sie doch noch für alle Fälle; dies erkennt man, wenn man bedenkt, dafs k_1^4 im Maximum rund 1 : 130 000 000 000 ist und die vernachlässigten Glieder diesen Betrag keinesfalls erreichen, dafs indes auch jener Wert nur einen Einflufs von a_0 : 130 000 000 000 oder 0,05^{mm} auf s_2 haben würde. Kommt es auf 10^{mm} nicht an, so kann man auch noch k_1^3 in Formel (8) vernachlässigen.

Nachdem aus (8) φ_2 ermittelt ist, giebt das sphärische Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_2$ unzweideutig aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen rechten Winkel sofort β_2 und α_2. Die dabei anzuwendenden Formeln, welche nichts Neues bieten, übergehen wir einstweilen; später stellen wir alles Zusammengehörige in ein Berechnungsschema zusammen. Dagegen mufs gleich hier noch darauf hingewiesen werden, dafs es in der Regel wegen des verhältnismäfsig kleinen Betrages der Entfernung $P_1P_2 = s$ vorteilhaft ist, nicht direkt φ_2, sondern $\Delta\varphi$ zu berechnen. Vertauscht man demgemäfs in (8) φ_2 mit φ_1 und σ_2 mit σ_1 und subtrahiert die neue Formel Seite für Seite von (8), so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi = \Delta\sigma - \left(k_1 - \frac{9}{16}k_1^3\right)\cos 2\sigma \sin \Delta\sigma + \frac{5}{8}k_1^2 \cos 4\sigma \sin 2\Delta\sigma \\ - \frac{29}{48}k_1^3 \cos 6\sigma \sin 3\Delta\sigma + \cdots; \\ 2\sigma = \sigma_2 + \sigma_1 = 2\sigma_1 + \Delta\sigma, \\ \varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hierzu liefert Formel (2) $\Delta\sigma$ direkt aus s, Formel (3) aber giebt nach Vertauschung von σ_2 mit σ_1 und φ_2 mit φ_1:

$$2\sigma_1 = 2\varphi_1 + k_1 \sin 2\varphi_1 - \frac{1}{8} k_1^2 \sin 4\varphi_1 + \cdots, \tag{10}$$

wobei es ausreicht, wie angenommen, nur k_1 und k_1^2 zu berücksichtigen, weil die trigonometrischen Funktionen von σ, zu dessen Berechnung einzig und allein σ_1 gebraucht wird, in (9) nur mit k_1, k_1^2 und k_1^3 multipliziert vorkommen und somit die vernachlässigten Glieder der Formel (10) in Formel (9) nur kleine Fehler der Ordnung k_1^4 erzeugen.

§ 7. Berechnung von k_1 und der von k_1 abhängenden Koefficienten. Nach S. 221 (8) ist $k = e \sin B_0 = e \sin \beta_0 : \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_0}$ und hiermit

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_0} - \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_0} + \sqrt{1 - e^2}},$$

also auch, da $\delta = \frac{e^2}{1 - e^2}$:

$$k_1 = \left(\sqrt{1 + \delta \sin^2 \beta_0} - 1\right) : \left(\sqrt{1 + \delta \sin^2 \beta_0} + 1\right).$$

Setzen wir nun

$$\tan E = \sqrt{\delta} \sin \beta_0, \tag{1}$$

so folgt:

$$k_1 = \tan^2 \frac{E}{2}. \tag{2}$$

Hiermit ist die Berechnung von k_1 sehr vereinfacht. Nächstdem bedürfen wir des Ausdrucks:

$$\frac{1 + \frac{1}{4} k_1^2}{1 - k_1} \text{ oder genauer } \frac{1 + \frac{1}{4} k_1^2 + \frac{1}{64} k_1^4 + \cdots}{1 - k_1},$$

wobei für den Zähler bereits die Zulässigkeit der Vernachlässigung von k_1^4 nachgewiesen ist. Man hat aber

$$\log\left(1 + \frac{1}{4} k_1^2 + \frac{1}{64} k_1^4 + \cdots\right) = M\left(\frac{1}{4} k_1^2 - \frac{1}{64} k_1^4 + \cdots\right)$$

und ersieht hieraus, daſs es durchaus zulässig ist, dafür einfach $\frac{1}{4} M k_1^2$ zu setzen. Ferner ist

$$1 - k_1 = 1 - \tan^2 \frac{E}{2} = \cos E \sec^2 \frac{E}{2};$$

man hat daher endlich mit einer stets ausreichenden Genauigkeit:

$$\log \frac{1 + \frac{1}{4} k_1^2 + \cdot\cdot}{1 - k_1} = 2 \log \cos \frac{E}{2} - \log \cos E + \frac{1}{4} M k_1^2 + \cdots . \quad (3)$$

Indessen ist diese Form noch nicht die beste; es läfst sich die rechte Seite vielmehr auf 2 Glieder reduzieren. Man hat nämlich nach S. 29 (3):

$$\log \cos E = - M \left(\frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{12} E^4 + \frac{1}{45} E^6 + \frac{17}{2520} E^8 + \cdot\cdot \right)$$

und also, indem man für E einfach $\frac{1}{2} E$ setzt:

$$4 \log \cos \frac{E}{2} = - M \left(\frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{48} E^4 + \frac{1}{16 \cdot 45} E^6 + \frac{17}{64 \cdot 2520} E^8 + \cdot\cdot \right)$$

Hieraus folgt durch Subtraktion:

$$\log \cos E = 4 \log \cos \frac{E}{2} - M \left(\frac{1}{16} E^4 + \frac{1}{48} E^6 + \frac{17}{64 \cdot 40} E^8 + \cdot\cdot \right).$$

Nun ist aber nach (2):

$$k_1 = \frac{1}{4} E^2 \left(1 + \frac{1}{12} E^2 + \frac{1}{120} E^4 + \cdot\cdot \right)^2$$

$$k_1^2 = \frac{1}{16} E^4 \left(1 + \frac{1}{3} E^2 + \frac{3}{40} E^4 + \cdot\cdot \right).$$

Daher wird, wie leicht zu finden:

$$\log \cos E = 4 \log \cos \frac{E}{2} - M k_1^2 - \frac{1}{2} M k_1^4 - \cdots . \quad (4)$$

Hiermit geht (3) über in:

$$\log \frac{1 + \frac{1}{4} k_1^2 + \frac{1}{64} k_1^4 + \cdot\cdot}{1 - k_1} = - 2 \log \cos \frac{E}{2} + \frac{5}{4} M k_1^2 + \frac{31}{64} M k_1^4 + \cdots . \quad (5)$$

Das in k_1^4 multiplizierte Glied ist nun bei Rechnung mit zehnziffrigen Logarithmen ganz unmerkbar; auch ist sein Einflufs in Formel (9) S. 223 selbst für eine die ganze Erde umkreisende Linie nur $0{,}2^{mm}$. Man kann daher für alle Fälle setzen:

$$\log \frac{1 + \frac{1}{4} k_1^2 + \cdot\cdot}{1 - k_1} = - 2 \log \cos \frac{E}{2} + \frac{5}{4} M k_1^2 + \cdots . \quad (5^*)$$

Zu (9) des vorigen Paragraphen hat man noch:

$$\log \left(k_1 - \frac{9}{16} k_1^3 \right) = \log k_1 - \frac{9}{16} M k_1^2 + \cdots , \quad (6)$$

ebenfalls mit einer jederzeit völlig ausreichenden Genauigkeit, weil

die vernachlässigten Glieder der logarithmischen Entwicklung in der genannten Formel selbst nur Glieder mit k_1^5 als Fehler geben.

§ 8. Bestimmung des geographischen Längenunterschieds. Bezeichnet x den normalen Abstand eines Punktes P von der Rotationsaxe, so giebt das an P angrenzende differentiale Dreieck in Fig. 16 S. 218:

$$xdl = ds \,.\, \sin\alpha \,.$$

Nach S. 39 (1) ist $x = a_0 \cos\beta$, daher wird xdl gleich

$$a_0 \cos\beta\, dl = \sin\alpha\, ds \,. \tag{1}$$

Substituiert man hier für ds seinen Wert $a_0\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}\; d\varphi$ und für $\sin\alpha$ nach S. 218 (2) den Wert $\cos\beta_0 : \cos\beta$, so folgt weiter:

$$dl = \frac{\cos\beta_0}{\cos^2\beta}\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}\; d\varphi \,. \tag{2}$$

Bei der Integration dieser Gleichung erinnern wir uns, dafs bisher die Einführung der Elemente der sphärischen Figur 17, welche der Fig. 16 auf dem Ellipsoid zugeordnet ist, von Nutzen war. Fig. 17 zeigt nun, dafs die zu $d\varphi$ gehörige Änderung des geographischen Längenunterschieds auf der Kugel gleich ist

$$d\lambda = \frac{d\varphi \,.\, \sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta_0}{\cos^2\beta}\, d\varphi \,. \tag{3}$$

Man hat daher durch Subtraktion dieser Gleichung von (2) Seite für Seite:

$$dl = d\lambda - \cos\beta_0 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}}{\cos^2\beta}\right) d\varphi \,. \tag{4}$$

Es ist jetzt der in Parenthese gestellte Faktor von $d\varphi$ durch φ auszudrücken. S. 220 wurde aber beim Übergang von (6) zu (9) gefunden, dafs

$$\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta} = \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}\,\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,, \tag{5}$$

$$k^2 = \frac{e^2\sin^2\beta_0}{1 - e^2\cos^2\beta_0} \,.$$

Hiermit wird:

$$(1 - \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}) = \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}} - \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\right\} \cdot \tag{6}$$

Aus der soeben mit aufgeführten Gleichung für k^2 folgt nun weiter durch Auflösung nach e^2, dafs $e^2 = k^2 : (\sin^2\beta_0 + k^2\cos^2\beta_0)$ ist und hiermit findet sich leicht:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}} = \sqrt{1 + k^2\cot^2\beta_0} \,. \tag{7}$$

Dies setzen wir in die Gleichung (6) innerhalb der Parenthese ein, womit alsdann (4) auf nachstehende Form gebracht werden kann:

$$dl = d\lambda - \cos\beta_0\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}\,\frac{\sqrt{1+k^2\cot^2\beta_0}-\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi}\,d\varphi\,. \quad (8)$$

Entwickelt man die Wurzelgröfsen rechter Hand, so ist sofort ersichtlich, dafs die einzelnen zu k^2, k^4 u. s. f. gehörigen Glieder ihrer Differenz allesamt durch $(\cot^2\beta_0 + \sin^2\varphi)$ teilbar sind. Der Nenner $(1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi)$ aber läfst sich schreiben $(\cot^2\beta_0+\sin^2\varphi)\sin^2\beta_0$, womit der Quotient übergeht in

$$\frac{k^2}{2\sin^2\beta_0}\Big(1+\frac{k^2}{4}(\sin^2\varphi-\cot^2\beta_0)$$
$$+\frac{k^4}{8}(\sin^4\varphi-\sin^2\varphi\cot^2\beta_0+\cot^4\beta_0)+\cdots\Big).$$

Die hierbei vernachlässigten Glieder geben, da $k\cot\beta$ ebenso wie k ein kleines Glied gleicher Ordnung mit e ist, im Resultat nur kleine Glieder der Ordnung k^8. Setzen wir nun im Vorstehenden

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi \text{ und } \sin^4\varphi = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi\,,$$

so wird schliefslich für Gleichung (8) erhalten:

$$dl = d\lambda - \frac{k^2\cos\beta_0}{2\sin^2\beta_0}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}\Big\{\Big(1-\frac{k^2}{4}\cot^2\beta_0+\frac{k^2}{8}+\frac{k^4}{8}\cot^4\beta_0-\frac{k^4}{16}\cot^2\beta_0+\frac{3k^4}{64}+\cdots\Big)$$
$$-\Big(\frac{k^2}{8}-\frac{k^4}{16}\cot^2\beta_0+\frac{k^4}{16}\Big)\cos 2\varphi+\frac{k^4}{64}\cos 4\varphi+\cdots\Big\}d\varphi. \quad (9)$$

Diese Gleichung kann nunmehr integriert werden. Zuvor jedoch vereinfachen wir die Koefficienten durch Einführung von k_1 und n. Zunächst folgt aus $k^2 = e^2\sin^2\beta_0 : (1-e^2\cos^2\beta_0)$ leicht, indem man im Nenner für 1 setzt $(\sin^2\beta_0+\cos^2\beta_0)$:

$$k^2\cot^2\beta_0 = (e^2-k^2):(1-e^2)\,. \quad (10)$$

Da aber nach S. 221 (1) für k^2 gesetzt werden kann $4k_1:(1+k_1)^2$ und da ferner $e^2 = 4n:(1+n)^2$, so ist auch

$$\left.\begin{aligned} k^2\cot^2\beta_0 &= 4\frac{(n-k_1)(1-nk_1)}{(1+k_1)^2(1-n)^2} = 4(n-k_1)+8(n-k_1)^2+\cdots,\\ k^2 &= 4k_1-8k_1^2+\cdots. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Man hat ferner aus der oben benutzten Relation für k^2 sofort weiter die Beziehung $k^2(1-e^2\cos^2\beta_0) = e^2\sin^2\beta_0$ und hiermit:

$$\frac{k^2\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}}{\sin^2\beta_0} = \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}} = e^2\sqrt{1+k^2\cot^2\beta_0}\,,$$

also endlich:

$$\frac{k^2\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}}{\sin^2\beta_0} = c^2\left(1 + 2(n-k_1) + 2(n-k_1)^2 + \cdots\right). \quad (12)$$

Dieses letztere setzen wir in Gleichung (9) im Faktor vor der Parenthese ein, die (11) aber innerhalb der Parenthese. Dann ergiebt sich ohne Mühe:

$$dl = d\lambda - \frac{1}{2}c^2\cos\beta_0\left\{\left(1 + n - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \cdots\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}k_1\cos 2\varphi + \frac{1}{4}k_1^2\cos 4\varphi + \cdots\right\}d\varphi. \quad (13)$$

Die Formel (13) berücksichtigt innerhalb der Parenthese alle Glieder bis zur Ordnung n^3 excl., was mit Rücksicht darauf, dafs im Faktor von $\cos 2\varphi$ k_1^2 nicht auftritt, besonders hervorgehoben werden mufs. Die gröfsten vernachlässigten Glieder, welche die Ordnung n^4 bezw. k_1^4 haben, sind jedenfalls ganz unerheblich. Durch die Integration aber wird die Konvergenz der Reihe noch verstärkt.

Integriert man von l_1 bis l_2 und nennt den Längenunterschied von P_1 bis P_2 $L_{1.2}$, so folgt unter Zusammenziehung der in $\sin 2\varphi_1$ und $\sin 2\varphi_2$, sowie der in $\sin 4\varphi_1$ und $\sin 4\varphi_2$ multiplizierten Glieder (vergl. auch Fig. 18 und 19 S. 225):

$$\left.\begin{array}{l}
L_{1.2} = \Delta\lambda - \frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left\{\begin{array}{c}\left(1 + n - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \cdots\right)\Delta\varphi \\ - \frac{1}{2}k_1\cos 2\varphi\sin\Delta\varphi + \frac{1}{8}k_1^2\cos 4\varphi\sin 2\Delta\varphi + \cdots\end{array}\right\} \\
\qquad L_{1.2} = l_2 - l_1 \qquad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \\
\qquad \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 .
\end{array}\right\} \quad (14)$$

Wenn wir die Abplattung $\mathfrak{a}$ einführen, so läfst sich der Koefficient von $\Delta\varphi$ noch in eine für kleine Entfernungen vorteilhafte Gestalt bringen. Nach S. 37 ist

$$e^2 = 4n : (1+n)^2 = 2\mathfrak{a} : (1+n)$$

und hiermit hat man für den Koefficienten von $\Delta\varphi$ in (14), ebenso genau wie bisher, die Formel:

$$\frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left(1 + n - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \cdots\right)$$
$$= \mathfrak{a}\cos\beta_0\left(1 - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{4}\mathfrak{a}k_1 + \cdots\right). \quad (15)$$

Sobald man aber Glieder der Ordnung k_1^2 in der Parenthese rechter

Hand vernachlässigen kann, geht der Koefficient in die einfache Form $\mathfrak{n} \cos \beta_0 (1 - \frac{1}{2} k_1)$ über.

Die Formel (14) giebt selbst für eine die ganze Erde umkreisende Linie kaum eine geringe Unsicherheit in den Hunderttausendstelsekunden von $L_{1.2}$, wie man leicht unter der jedenfalls annähernd zutreffenden Annahme findet, dafs der Koefficient von $\Delta\varphi$ noch nicht um n^4 fehlerhaft sei.

§ 9. **Zusammenstellung der Formeln zur Übertragung der geographischen Breite und Länge mittelst einer geodätischen Linie von bekannter Länge und mit bekanntem Anfangsazimut.**

Die horizontale Entfernung $P_1 P_2 = s$ kann beliebig grofs sein.

Zunächst ist, falls nicht die Dimensionen des Erdellipsoids nach *Bessel* zur Anwendung gelangen, zu berechnen:

$$e^2 = 2\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2 \qquad \sqrt{1 - e^2} = 1 - \mathfrak{a}$$

$$\sqrt{\delta} = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \qquad b_0 = a_0 \sqrt{1 - e^2}\,.$$

Fig. 20. Ellipsoid. Fig. 21. Kugel.

Die geographische Breite von P_1 sei B_1, so ist nun die reduzierte Breite β_1 mittelst der Formel aufzusuchen:

$$\tan \beta_1 = \sqrt{1 - e^2} \tan B_1\,; \quad \log \sqrt{1 - e^2} = 9{,}9985458.202 - 10\,. \quad (1)$$

Die Anwendung dieser Formel von S. 40 erscheint hier am geeignetsten, da $\tan \beta_1$ sofort gebraucht wird. Es ist nämlich demnächst das sphärische Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1$ (Fig. 21) aufzulösen, wozu die Formeln (1) S. 76 (für $A = 90^0$ u. s. f.) dienen:

$$\left.\begin{aligned} \sin \beta_0 \cos \varphi_1 &= \sin \beta_1 \\ \sin \beta_0 \sin \varphi_1 &= \cos \beta_1 \cos \alpha_{1.2} \\ \cos \beta_0 \quad &= \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta_1\cos\lambda_1 &= \cos\varphi_1\cos\beta_0\\ \cos\beta_1\sin\lambda_1 &= \sin\varphi_1\,.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Die Auflösung der Formeln (2) und (3) ist eine möglichst scharfe und auch ganz bestimmte, insofern wir wie bisher β_0 positiv nehmen.

Es ist nunmehr zu berechnen nach S. 227 (1) und (2), sowie nach S. 224 (2) und S. 228 (5):

$$\left.\begin{aligned}&\tan E = \sqrt{\delta}\sin\beta_0 \qquad \log\sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9-10\\ &\log k_1 = 2\,\log\tan\tfrac{1}{2}E\,;\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma} = s\,\frac{\varrho''}{b_0}\,\frac{1-k_1}{1+\frac{1}{4}k_1^2}\\ &\log\frac{1-k_1}{1+\frac{1}{4}k_1^2} = 2\log\cos\frac{E}{2}-\frac{5}{4}Mk_1^2+\cdots\\ &\log\left(\tfrac{5}{4}M\right) = \underset{\text{für Einh. der 7. Dec.}}{6{,}73469}\\ &\log\varrho'' = 5{,}3144251.332\\ &\log\frac{\varrho''}{b_0} = 8{,}5112358.493-10.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Hierauf ist nach den Formeln (9) u. (10) S. 226 u. 227 weiter zu berechnen:

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\text{in Sek.}}{2\sigma_1} = \underset{\text{in Sek.}}{2\varphi_1} + \varrho''k_1\sin 2\varphi_1 - \tfrac{1}{8}\varrho''k_1^2\sin 4\varphi_1\\ &\log\varrho'' = 5{,}31443\\ &\log\left(-\tfrac{1}{8}\varrho''\right) = 4{,}411n\,,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

wobei es ausreicht, $2\sigma_1$ auf Hundertstelsekunden anzugeben, wenn man weiterhin nur noch Hunderttausendstelsekunden in Rechnung ziehen will; ferner, mit Rücksicht auf (6) S. 228:

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\varphi} = \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma} + \mathfrak{A}\cos 2\sigma\sin\varDelta\sigma + \mathfrak{B}\cos 4\sigma\sin 2\varDelta\sigma + \mathfrak{C}\cos 6\sigma\sin 3\varDelta\sigma+\cdots\\ &2\sigma = 2\sigma_1 + \varDelta\sigma\\ &\log\mathfrak{A} = \log(-\varrho'') + \log k_1 - \tfrac{9}{16}Mk_1^2+\cdots\\ &\phantom{\log\mathfrak{A}} = 5{,}3144251.3_n + \log k_1 - \underset{\text{f. Einh. d. 7. Dec.}}{[6{,}388]\,k_1^2+\cdots}\\ &\log\mathfrak{B} = \log\left(\tfrac{5}{8}\varrho''k_1^2+\cdots\right) = 5{,}11031 + 2\log k_1+\cdots\\ &\log\mathfrak{C} = \log\left(-\tfrac{29}{48}\varrho''k_1^3+\cdots\right) = 5{,}096n + 3\log k_1+\cdots.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Hiermit erhält man $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$ und nunmehr durch Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{U}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_2$ nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta_2 &= +\sin\beta_0\cos\varphi_2 \\ \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1} &= -\sin\beta_0\sin\varphi_2 \\ \cos\beta_2\sin\alpha_{2.1} &= -\cos\beta_0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta_2\cos\lambda_2 &= \cos\varphi_2\cos\beta_0 \\ \cos\beta_2\sin\lambda_2 &= \sin\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

β_2, $\alpha_{2.1}$ und λ_2. Diese Formeln gehen aus (2) und (3) durch Vertauschung von β_1, $\alpha_{1.2}$ und λ_1 mit β_2 bezw. $\alpha_{2.1} - 180^0$ und λ_2 hervor. ($\alpha_{2.1}$ ist das Azimut der Linie P_2P_1 in P_2, vergl. Fig. 20 und 21.) Da $\cos\beta_2$ positiv sein mufs, so ist die Auflösung von (8) und (9) ganz bestimmt.

Aus β_2 folgt nunmehr die geographische Breite für Punkt P_2 mittelst der Formel

$$\tan B_2 = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\tan\beta_2, \qquad \log\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = 0{,}0014541.798, \quad (10)$$

wozu $\tan\beta_2$ bereits aus (8) bekannt ist.

Zur Berechnung des geographischen Längenunterschieds $L_{1.2}$ haben die Formeln (3) und (9) bereits λ_1 und λ_2 gegeben. Man hat nun weiter nach (14) und (15) S. 231:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} &= \underset{\text{in Sek.}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \cos\beta_0\left\{\mathfrak{A}'\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\varphi} + \mathfrak{B}'\cos 2\varphi\sin\Delta\varphi + \mathfrak{C}'\cos 4\varphi\sin 2\Delta\varphi + \cdots\right\} \\ 2\varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \log\mathfrak{A}' &= \log\mathfrak{a} - \frac{1}{2}M\left(1 - \frac{1}{2}\mathfrak{a}\right)k_1 - \frac{3}{8}Mk_1^2 + \cdots \\ &= 7{,}5241069.0 - 10 - [6{,}33603]\underset{\text{für Einh. d. 7. Dec.}}{k_1} - [6{,}212]k_1^2 + \cdots \\ \log\mathfrak{B}' &= \log\left(-\frac{1}{4}\varrho'' e^2 k_1 + \cdots\right) = 2{,}53678_n + \log k_1 + \cdots \\ \log\mathfrak{C}' &= \left(\frac{1}{16}\varrho'' e^2 k_1^2 + \cdots\right) = 1{,}935 + 2\log k_1 + \cdots .^{*)} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Wenn man nicht mit *Bessels* $\mathfrak{a}$ rechnet, so ändern sich in den (11) auch die für $\log\mathfrak{B}'$ und $\log\mathfrak{C}'$ angegebenen Zahlen etwas, streng genommen aufserdem der Koefficient $\frac{1}{2}M\left(1-\frac{1}{2}\mathfrak{a}\right)$ von k_1 in $\log\mathfrak{A}'$. Jedoch wird man diesen meist beibehalten können. Die Änderung für $\log\mathfrak{B}'$ und $\log\mathfrak{C}'$ ermittelt sich mit Rücksicht darauf, dafs jetzt darin $\log e^2 = 7{,}82441 - 10$ gesetzt ist.

---

*) Behufs teilweiser Benutzung der Rechnung von (7) setze man in der 1. Formel (11):

$$\{\div\} = \mathfrak{A}'\Delta\varphi + \mathfrak{B}'\cos 2\sigma\sin\Delta\sigma + 3\mathfrak{C}'\cos 4\sigma\sin 2\Delta\sigma + \cdots$$

Bei der Entwicklung vorstehender Formeln ist $\alpha_{1.2} < 180^0$ vorausgesetzt, damit die horizontale Entfernung s positiv werde. Man darf sich der Formeln aber ohne weiteres für jeden Wert von $\alpha_{1.2}$ bedienen und doch s immer positiv setzen. Da nun aber für $\alpha_{1.2} > 180^0$ $\cos\beta_0$ negativ wird, was nach der ursprünglichen geometrischen Bedeutung von β_0 als geographische Breite ausgeschlossen ist, so mufs man von dieser Bedeutung ganz absehen, und es ist nachzuweisen, dafs die Formeln als solche auch für $\alpha_{1.2} > 180^0$ gelten.

Sie gelten aber jedenfalls, wenn gleichzeitig ein östliches λ positiv, ein südöstliches $\alpha_{1.2}$ positiv und φ nach Osten hin positiv gerechnet werden. Denn dies entspricht Figuren, die zu den bisher angewandten Figuren 16 bis 21 symmetrisch auf der andern Seite des Meridians von P_0 liegen. Bezeichnen wir nun jene Gröfsen und die zugehörigen β mit Strichen, so ist u. a. aus (2) und (3):

$$\begin{aligned}
\sin\beta_0'\cos\varphi_1' &= \sin\beta_1' \\
\sin\beta_0'\sin\varphi_1' &= \cos\beta_1'\cos\alpha_{1.2}' \\
\cos\beta_0' &= \cos\beta_1'\sin\alpha_{1.2}' \\
\cos\beta_1'\cos\lambda_1' &= \cos\varphi_1'\cos\beta_0' \\
\cos\beta_1'\sin\lambda_1' &= \sin\varphi_1'.
\end{aligned}$$

Da aber $\beta_1' = \beta_1$ und $\alpha_{1.2}' = 360^0 - \alpha_{1.2}$ ist, so wird hieraus:

$$\begin{aligned}
\sin\beta_0'\cos\varphi_1' &= \sin\beta_1 \\
\sin\beta_0'\sin\varphi_1' &= \cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} \\
\cos\beta_0' &= -\cos\beta_1\sin\alpha_{1.2} \\
\cos\beta_1\cos\lambda_1' &= \cos\varphi_1'\cos\beta_0' \\
\cos\beta_1\sin\lambda_1' &= \sin\varphi_1'.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun anstatt β_0' die neue Hilfsgröfse $\pi - \beta_0$ und anstatt λ_1' die Gröfse $180^0 - \lambda_1$, schreiben ferner für φ_1' einfach φ_1, so folgt:

$$\begin{aligned}
\sin\beta_0\cos\varphi_1 &= \sin\beta_1 \\
\sin\beta_0\sin\varphi_1 &= \cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} \\
\cos\beta_0 &= \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2} \\
\cos\beta_1\cos\lambda_1 &= \cos\varphi_1\cos\beta_0 \\
\cos\beta_1\sin\lambda_1 &= \sin\varphi_1.
\end{aligned}$$

Diese Formeln stimmen mit den (2) und (3) überein. Ebenso gelten auch die (8) und (9) wieder. Auch die Formeln (4) bis (7) behalten ihre Geltung, da $\sin\beta_0$ sich nicht ändert und $\varphi' = \varphi$ ist.

Was endlich den Ausdruck für $L_{1.2}$ nach (11) anbetrifft, so nimmt die mit oberen Indices an λ, β_0 und φ geschriebene rechte Seite,

da $\lambda' = 180^0 - \lambda$ und $\cos \beta_0' = -\cos \beta_0$ ist, den entgegengesetzten Wert an. Die Formel giebt aber den östlichen Längenunterschied $L'_{1.2}$, welcher gleich dem negativen westlichen Längenunterschied $L_{1.2}$ ist. Somit bleibt auch diese Formel für den westlichen Längenunterschied bestehen.

§ 10. Abkürzung der Formeln. In den meisten Fällen wird es ausreichen, in vorstehenden Formeln die klein gedruckten Glieder wegzulassen. Es erzeugt dies in der Position von P_2 höchstens Fehler, die einer Verschiebung von 0,001 bis 0,002 Äquatorsekunden, oder 0,03 bis 0,06^m entsprechen. Für kleine Distanzen ist der Fehler aber erheblich geringer.

Betrachten wir in dieser Hinsicht zunächst die Formeln (7) für $\varDelta\varphi$ und berücksichtigen auch das in Formel (6) für $2\sigma_1$ weggelassene Glied, so findet sich als Einflufs der kleingedruckten Glieder der Betrag:

$$\varrho'' \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{8} k_1^3 \sin 2\sigma \sin \varDelta\sigma \sin 4\varphi_1 + \frac{9}{16} k_1^3 \cos 2\sigma \sin \varDelta\sigma \\ -\frac{29}{48} k_1^3 \cos 6\sigma \sin 3\varDelta\sigma \,. \end{array} \right\} \tag{1}$$

Die ungünstigste Voraussetzung ist, dafs die 3 Teile hiervon sich absolut genommen summieren. Im Maximum giebt dies, $k_1 = n$ gesetzt:

$$\varrho'' \frac{62}{48} n^3 \quad \text{d. i.} \quad 0{,}0012''.$$

Der wirkliche Maximalwert beträgt etwas weniger. Ist $\varDelta\sigma$ klein, so können wir φ_1 mit σ sowie $\sin \varDelta\sigma$ und $\sin 3\varDelta\sigma$ mit $\varDelta\sigma$ bezw. $3\varDelta\sigma$ vertauschen und erhalten anstatt (1)

$$-\varrho'' k_1^3 \varDelta\sigma \cos 2\sigma \left(7 \cos^2 2\sigma - \frac{23}{4}\right), \tag{2}$$

dessen Maximalwert nahezu gleich ist

$$\pm 2\varrho'' n^3 \varDelta\sigma \qquad \text{d. i.} \qquad \pm 0{,}002'' \varDelta\sigma.$$

Für $\varDelta\sigma = 0{,}2$ giebt dies nur 0,0004″, welcher Betrag einem Fehler in s von etwa 0,013^m entspricht.

Noch besser erkennt man die Geringfügigkeit von (2), wenn man den Einflufs auf $\log \varDelta\varphi$ ermittelt. Dieser beträgt für den Maximalwert $0{,}002'' \varDelta\sigma$ nur 4 Einheiten der 9. Decimalstelle, da $0{,}002\, M : \varrho'' = 0{,}0000000.04$ ist.

Was nun die kleingedruckten Glieder in (11) anlangt, so ist deren Betrag gleich

$$\frac{1}{8} \varrho'' \mathfrak{a} k_1^2 \cos \beta_0 \,(3\varDelta\varphi - \cos 4\varphi \sin 2\varDelta\varphi). \tag{3}$$

Setzt man für k_1 den Näherungswert $n \sin^2 \beta_0$ und beachtet, dafs das Maximum von $\sin^4 \beta_0 \cos \beta_0$ nahezu 0,3 beträgt, so folgt als gröfster Betrag von (3) für eine die Erde umkreisende Linie 0,0013″. Nimmt man aber $\Delta\varphi$ klein an, so geht (3) über in

$$\frac{1}{4}\,\varrho'' n^3 \sin^4 \beta_0 \cos \beta_0\, \Delta\varphi\,(3 - 2\cos 4\varphi)\,. \tag{4}$$

Der Maximalwert hiervon ist nahezu gleich

$$0{,}4\,\varrho'' n^3 \Delta\varphi \qquad \text{d. i.} \qquad 0{,}0004''\,\Delta\varphi$$

und dies giebt für $\Delta\varphi = 0{,}2$ nur 0,0001″. Der Einflufs der kleingedruckten Glieder in (11) ist also geringer als wie in (7).

Nächstdem wird $L_{1.2}$ noch von den Vernachlässigungen in φ und $\Delta\varphi$ beeinflufst, jedoch nur in dem Gliede λ_2 in merklicher Weise und zwar in dem Mafse, wie sich bei sphärischer Beziehung ein kleiner Fehler in der Distanz auf geographische Länge überträgt

Die sphärische Rechnung kann für mäfsige Werte der Distanz s in der Weise modificiert werden, dafs man nicht φ_2 und λ_2 mittelst der Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_2$ sucht und daraus $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ ableitet, sondern diese direkt durch Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ bestimmt. Man erspart dann eine Decimale der Logarithmen. Die hierzu erforderlichen Formeln gehen aus den (9) S. 126 hervor, wenn anstatt B und σ gesetzt wird β bezw. φ. Sie hierher zu stellen, scheint überflüssig, da wir weiterhin für den Fall kleiner s besondere Formeln entwickeln werden, die oben gegebenen Formeln aber geographische Breite und Länge bei Anwendung 8 ziffriger Logarithmen auch schon bis auf 0,002″ genau und bei Anwendung 7 ziffriger Logarithmen mit Ansetzen der 8. Stelle aus den Proportionalteilen meistens in den Hundertstelsekunden richtig ergeben.

Es mag hier aber noch eine Formel für $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ Platz finden, die bei kleinen s in der Regel zur Kontrolle dienen kann.

Das schiefwinklige Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ giebt nämlich nach dem Sinussatz sofort:

$$\sin \Delta\lambda = \sin \Delta\varphi \frac{\sin \alpha_{1.2}}{\cos \beta_2} = - \sin \Delta\varphi \frac{\sin \alpha_{2.1}}{\cos \beta_1}\,, \tag{5}$$

welche Formel nur für Lagen von s nahe dem Pole unbrauchbar wird.

Zur Erleichterung der Rechnung können die als Funktionen von k_1 auftretenden Koefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ u. s. f. in Tafeln gebracht werden. Als Argument würde dabei $\log \tan E$ zu nehmen sein. Diese Tafeln würden nicht nur für *Bessels* Dimensionen des Erdellipsoids,

sondern für jede Werte derselben brauchbar sein, wenn bei den Logarithmen von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ bezw. log $\mathfrak{a}$ und log e^2 abgetrennt werden. Für das aufserdem in log $\mathfrak{A}'$ vorkommende kleine Glied $\mathfrak{a}k_1$ reicht ein konstanter Wert von $\mathfrak{a}$ jedenfalls aus, da sein Maximalbetrag nur $0{,}0004'' \Delta\varphi$ ist ($\Delta\varphi$ als Arcus genommen).

Indes ist auch ohne Tafeln die Rechnung verhältnismäfsig bequem.

Sehr bequeme Tafeln finden sich bei *Albrecht* S. 207 u. ff. Dieselben geben die Koefficienten der von *Bessel* 1825 aufgestellten Formeln (vergl. *Engelmann*, *Abhdlgn. von Bessel*, Bd. 3 S. 6 u. ff.) und zwar zum Teil in engerem Intervall des Arguments als die ursprünglichen *Bessel*schen Tafeln. Diese Tafeln gelten für jede beliebige Abplattung.

Bessels Formeln unterscheiden sich von den oben mitgeteilten hauptsächlich in zwei Beziehungen. Einesteils darin, dafs $\Delta\varphi$ durch successive Annäherung aus Formel (9) S. 223 abgeleitet wird, andernteils in der Bildung der Koefficienten der Reihe für $L_{1.2}$. Für diese haben wir eine weniger künstliche Ableitung gegeben.

Wenn es sich um grofse Distanzen oder um grofse Rechnungsschärfe handelt, dürfte die Rechnung nach unsern Formeln derjenigen nach *Bessel* vorzuziehen sein, weil dann seine Tafeln nicht ausreichen. Für mäfsige Distanzen jedoch und 0,001″ Schärfe ist unter Anwendung seiner Tafeln die Rechnung sehr bequem. Die indirekte Ermittlung von $\Delta\varphi$ ist hier nicht nur nicht unbequemer als die direkte mittelst $\Delta\sigma$ (denn die 2. Annäherung führt schon zum Ziele), sondern bietet auch den Vorteil, dafs dabei für die Berechnung von $L_{1.2}$ bereits einige Logarithmen (nämlich für sin $\Delta\varphi$ u. s. f.) bekannt werden.

Hansen gab 1865 in seinen *Geodätischen Untersuchungen* (Abh. der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Bd. 8) eine sehr eingehende Bearbeitung des Problems, die jedoch wenigstens für beliebige grofse Distanzen immer noch eine indirekte Rechnung von $\Delta\varphi$ erfordert und in der Entwicklung von $L_{1.2}$ vielleicht nicht ganz glücklich gewählt ist.

In ersterer Beziehung ist es wesentlich, nicht von einer Formel für $P_1 P_2 = s$, sondern von einer solchen für $P_0 P$, also von der vom Scheitel der geodätischen Linie abgerechneten Distanz auszugehen. Durch Beachtung dieses Umstandes ist es gelungen, eine direkte Formel für $\Delta\varphi$ zu erhalten.

Unsere Formeln schliefsen sich insofern und in Betreff der Einführung von $\mathfrak{a}$ im Ausdruck für $L_{1.2}$ an diejenigen von *Winterberg* an, die in Bd. 89 der *Astronom. Nachr.* Nr. 2119 u. 2120 gegeben sind. Nur läfst *Winterberg* alle Glieder weg, welche den hier klein gedruckten entsprechen. Der genannte Autor fufst seinerseits auf den von *Jacobi* mit Hilfe der elliptischen Funktionen gegebenen Reihenentwicklungen (*Crelles Journal* Bd. 53; *Astronom. Nachr.* Bd. 41, Nr. 974 u. 1006).

Abgesehen von der interessanten Lösung der Aufgabe, welche *Jacobi* mittelst Thetafunktionen in *geschlossener Form* gab, ist es aber nicht notwendig (wie unsere Entwicklungen zeigen) über die Elemente der Analysis hinauszugehen, um zu den Resultaten in Reihenform zu gelangen. Denn die Endresultate enthalten nur Reihen, die nach Vielfachen von φ und σ, zwei ganz elementar zu erlangenden Funktionen, fortschreiten. Die ein-

zige Reminiscenz an die elliptischen Funktionen ist bei *Winterberg* ein in den Koefficienten auftretender Modul q, für welchen, abgesehen von Gliedern der Ordnung q^5 und höher, die Relation besteht:

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k^4}{8}+\frac{21\,k^6}{256}+\cdots\right).$$

Die Vergleichung mit S. 221 (1) zeigt, daſs $4q$ und k_1 nur um $\frac{1}{128}k^6$ von einander abweichen, mithin um eine Gröſse, die nicht mehr von Bedeutung ist. Setzt man in unseren Formeln

$$k_1 = 4q - 16q^2 + \cdots,$$

so wird man einerseits keine Verstärkung der Konvergenz der Koefficientenreihen bemerken, während andrerseits die Formeln mit denen von *Winterberg* gegebenen bei Vernachlässigung von q^3 identisch werden (abgesehen von hierbei unwesentlichen Modifikationen, die uns in anderer Beziehung wünschenswert schienen). Man vergleiche unsere ausführlichere Darlegung in den *Astronom. Nachr.* Bd. 94, Nr. 2252, S. 314; 1879.

Hansen führte in seinen Reihenentwicklungen ebenfalls q ein, während *Bessel* k_1 benutzte (von ihm s genannt).

Wir erwähnen noch die Bearbeitung des Problems durch *Baeyer* (vergl. *Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche,* Berlin 1862 S. 52 u. ff. und besonders das 3. Heft der als Manuskript gedruckten *Wissenschaftlichen Begründung der Rechnungsmethoden des Zentralbureaus der Europäischen Gradmessung,* mit Tafeln). Die Ausdrücke *Baeyers* für s und $L_{1.2}$ setzen sich aus der Differenz je zweier Reihen zusammen, die für s nach Potenzen von $\sin^2\beta_1$ bezw. $\sin^2\beta_2$, für $L_{1.2}$ nach denen von $\cos^2\beta_1$ bezw. $\cos^2\beta_2$ fortschreiten. Die Tafeln geben die Koefficienten nicht in logarithmischer Form und sind nur brauchbar für *Bessels* Excentricität des Erdellipsoids. Eine direkte Berechnung der Koefficienten (oder ihrer Logarithmen) dürfte weniger bequem sein, wie bei den andern erwähnten Lösungen. Es gilt die Lösung aber auch wie bei den andern Autoren ohne Rücksicht auf die Gröſse von s.

In mehrerer Beziehung interessant ist die Schrift: *Die Kürzeste auf dem Erdsphäroid* von *Bachoven von Echt*, 1865. Hier wird direkt mit der geographischen Breite gerechnet, anstatt mit der reduzierten, worin wir aber keinen Vorteil erblicken können, da die Reihenkonvergenz abnimmt, wie für die lineare Länge im speziellen Falle des Meridianbogens schon gezeigt worden ist, und da im übrigen die Rechnung nicht einfacher wird. Verfasser untersucht namentlich auch den Lauf der geodätischen Linie, auf welchen wir in einem der nächsten Kapitel eingehen.

Zuerst wohl hat *Legendre* die geodätische Linie zur Übertragung geographischer Koordinaten benutzt, und zwar gab er 1806 in einer Abhandlung in den Memoiren der franz. Akademie sowohl allgemein gültige Formeln wie Reihen für kurze Distanzen (nach *Trepied,* vergl. weiterhin das 6. Kap.). Dagegen benutzt er noch 1799 S. 14 u. ff. des Werkes: *Delambre, Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien* für letzteren Zweck sphärische Distanzen. Die Einführung der Hilfsgröſse φ wird allgemein *Legendre* zugeschrieben unter Hinweis auf seine *Théorie des fonctions elliptiques,* 1825.

Nach *Soldner* (*Die bayerische Landesvermessung.* 1873; S. 533) haben schon *Euler* (*Mém. de l'Ac. de Berlin* 1753) und *du Séjour* vorgeschlagen, die terrestrischen Distanzen als kürzeste Linien zu betrachten, und demgemäfs die Übertragung geographischer Koordinaten durchgeführt.

Nach *Todhunter, History of Attraction etc.* Bd. 1; S. 88 u. 118, hat auch schon *Clairaut* in den Memoiren der Pariser Akademie für 1733 (publiziert 1735) die geodätische Linie auf Rotationsflächen behandelt und zwar ausgehend von ihrer (weiterhin zu betrachtenden) Eigenschaft als kürzeste Linie. Er fand, dafs für jeden Punkt der Abstand von der Rotationsaxe mal $\sin \alpha$ (d. i. beim Ellipsoid $\cos \beta \sin \alpha$, S. 215) eine Konstante ist und bemerkt, dafs die Linie nur auf der Kugel eine ebene Kurve wird. Zu dieser Untersuchung wurde er durch *Cassinis* Vorgehen (vergl. jene Memoiren f. 1734), Dreieckspunkte durch Perpendikel auf einen Hauptmeridian zu beziehen, veranlafst, und wies nach, dafs diese Perpendikel streng genommen kürzeste Linien seien.

§ 11. **Zahlenbeispiel IV.** Wir wählen ein Beispiel, das von *Baeyer* (Rechnungsmethoden, 3. Heft S. 22) scharf berechnet ist und auch von *Winterberg*, *Hansen* und *Albrecht* behandelt wurde. Gegeben:

$$B_1 = 55^0\,45' \qquad \log s = 7{,}1495432.083 \qquad \alpha_{1.2} = 83^0\,23'\,51{,}200''.$$

Die *Formeln des* § 9 S. 232 u. ff. geben nun der Reihe nach*):

$$\begin{array}{rl} \log\tan B_1 = & 0{,}1669321.238 \\ & 9{,}9985458.202 - 10 \\ \hline \log\tan \beta_1 = & 0{,}1654779.440 \end{array}$$

$$\log\sin\beta_1 = 9{,}9168283.498 - 10 \qquad \log\sin\alpha_{1.2} = 9{,}9971101.048 - 10$$
$$\log\cos\beta_1 = 9{,}7513504.058 - 10 \qquad \log\cos\alpha_{1.2} = 9{,}0606205.339 - 10$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\beta_0\cos\varphi_1 & = [9{,}9168283.498 - 10] \\ \sin\beta_0\sin\varphi_1 & = [8{,}8119709.397 - 10] \\ \cos\beta_0 & = [9{,}7484605.106 - 10] \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\beta_1\cos\lambda_1 & = [9{,}7471248.284 - 10] \\ \cos\beta_1\sin\lambda_1 & = [8{,}8938069.077 - 10] \end{array}\right\}$$

Hiernach ist

$$\log\tan\varphi_1 = 8{,}8951425.899 - 10 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = 4^0\,29'\,28{,}76702''$$

$$\left.\begin{array}{l} \log\sin\varphi_1 = 8{,}8938069.077 - 10 \\ \log\cos\varphi_1 = 9{,}9986643.178 - 10 \end{array}\right\} \log\sin\beta_0 = 9{,}9181640.320 - 10,$$

$$\left.\begin{array}{l} \log\cos\lambda_1 = 9{,}9957744.226 - 10 \\ \log\sin\lambda_1 = 9{,}1424565.019 - 10 \end{array}\right\} \lambda_1 = 7^0\,58'\,46{,}75083''.$$

*) Zur Vergleichung mit der Rechnung nach anderen Formeln sind alle Zahlen angesetzt, die im Verlaufe der Rechnung entstehen, abgesehen von denen für die Interpolation der Logarithmen und solchen, die im Kopfe behalten werden können.

$\log \sin \beta_0$ und $\log \cos \beta_0$, ebenso wie $\log \cos \lambda_1$ und $\log \sin \lambda_1$ gehören innerhalb der Genauigkeit der Tafeln zu demselben Winkel.

Zur Berechnung von k_1 und $\Delta\sigma$ ist weiter:

$$\log \sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9 - 10$$
$$\log \sin \beta_0 = 9{,}9181640.3 - 10$$
$$\log \tan E = 8{,}8318234.2 - 10 \qquad E = 3^0\ 53'\ 2{,}429''$$
$$\log \tan \frac{E}{2} = 8{,}5302938.5 - 10 \qquad \frac{E}{2} = 1\ \ 56\ \ 31{,}2145$$
$$\log k_1 = 7{,}0605877.0 - 10;$$

$$\left\{\begin{aligned} \log s &= 7{,}1495432.083 \\ \log \frac{\varrho''}{b_0} &= 8{,}5112358.493 - 10 \\ 2\log \cos \frac{E}{2} &= 9{,}9995009.748 - 10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log\left(\tfrac{5}{4}M\right) &= 6{,}73469 \\ 2\log k_1 &= 4{,}12118 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 5{,}6602800.324 \qquad \text{Summa} = 0{,}85587$$
$$\text{num.} = 7.176$$
$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\sigma} = 5{,}6602793.148$$
$$\Delta\sigma = 457382{,}25862'' = 127^0\ 3'\ 2{,}25862''.$$

Die Berechnung von $2\sigma_1$ ergiebt:

$$\left\{\begin{aligned} \log \varrho'' &= 5{,}31443 \\ \log k_1 &= 7{,}06059 - 10 \\ \log \sin 2\varphi_1 &= 9{,}19350 - 10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log\left(-\tfrac{1}{8}\varrho''\right) &= 4{,}411_n \\ 2\log k_1 &= 4{,}121 - 10 \\ \log \sin 4\varphi_1 &= 9{,}489 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 1{,}56852 \qquad \text{Summa} = 8{,}021_n - 10$$

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi_1 &= 8^0\ 58'\ 57{,}534'' \\ [1{,}56852] &= \quad +\ 37{,}027 \\ [8{,}021_n - 10] &= \quad -\ 0{,}010 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2\sigma_1 &= \ \ 8^0\ 59'\ 34{,}551'' \\ 2\sigma &= 136\ \ \ 2\ \ 36{,}810. \end{aligned}$$

Hieraus hat man folgende Rechnung für $\Delta\varphi$ und φ_2:

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(\tfrac{9}{16}M\right) &= 6{,}388 \\ 2\log k_1 &= 4{,}121 - 10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log(-\varrho'') &= 5{,}3144251.3_n \\ \log k_1 &= 7{,}0605877.0 - 10 \\ -[0.509] &= \qquad -\ 3.2 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 0{,}509 \qquad \log \mathfrak{A} = 2{,}3750125.1_n$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(\tfrac{5}{8}\varrho''\right) &= 5{,}110 \\ 2\log k_1 &= 4{,}121 - 10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log\left(-\tfrac{29}{48}\varrho''\right) &= 5{,}096_n \\ 3\log k_1 &= 1{,}182 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\log \mathfrak{B} = 9{,}231 - 10 \qquad \log \mathfrak{C} = 6{,}278_n - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log \mathfrak{A} &= 2{,}3750125.1_n \\ \log\cos 2\sigma &= 9{,}8572526.9_n - 10 \\ \log\sin \varDelta\sigma &= 9{,}9020591.7 - 10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log \mathfrak{B} &= 9{,}231 - 10 \\ \log\cos 4\sigma &= 8{,}561 - 10 \\ \log\sin 2\varDelta\sigma &= 9{,}983_n - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 2{,}1343243.7 \qquad\qquad \text{Summa} = 7{,}775_n - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log \mathfrak{C} &= 6{,}278_n - 10 \\ \log\cos 6\sigma &= 9{,}825 - 10 \\ \log\sin 3\varDelta\sigma &= 9{,}557 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 5{,}660_n - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \varDelta\sigma &= 127^0\, 3'\ 2{,}25862'' \\ [2{,}1343243.7] &= +\quad 2\ 16{,}24620 \\ [7{,}775_n - 10] &= -\qquad 596 \\ [5{,}660_n - 10] &= -\qquad 5 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} \varDelta\varphi &= 127^0\, 5'\, 18{,}49881'' \\ &= 457518{,}49881''. \end{aligned}$$

Zur numerischen Prüfung der Formeln wurde $(\varDelta\varphi - \varDelta\sigma)$ auch nach Formel (9) S. 223 berechnet. Es fand sich hierbei derselbe Wert wie vorher, nämlich:

$$2'\, 16{,}24140'' - 0{,}00122'' + 0{,}00000'' = 2'\, 16{,}24018''.$$

Man hat nun weiter

$$\varphi_2 = 131^0\, 34'\, 47{,}26583''$$

und

$$\log\sin\varphi_2 = 9{,}8739202.704 - 10, \quad \log\cos\varphi_2 = 9{,}8219472.649_n - 10.$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \sin\beta_2 &= [9{,}7401112.969_n - 10] \\ \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1} &= [9{,}7920843.024_n - 10] \\ \cos\beta_2\sin\alpha_{2.1} &= [9{,}7484605.106_n - 10] \\ \cos\beta_2\cos\lambda_2 &= [9{,}5704077.755_n - 10] \\ \cos\beta_2\sin\lambda_2 &= [9{,}8739202.704 - 10] \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\log\tan\alpha_{2.1} = 9{,}9563762.082 - 10 \qquad \alpha_{2.1} = 222^0\ 7'\, 37{,}98543''$$

$$\log\tan\lambda_2 = 0{,}3035124.949_n \qquad \lambda_2 = 116^0 26'\ 3{,}37617''$$

$$\log\sin\alpha_{2.1} = 9{,}8265794.683_n - 10 \quad \log\sin\lambda_2 = 9{,}9520392.280 - 10$$

$$\log\cos\alpha_{2.1} = 9{,}8702032.601_n - 10 \quad \log\cos\lambda_2 = 9{,}6485267.332_n - 10,$$

und hieraus folgt mittelst obiger Gleichungen

$$\log\cos\beta_2 = 9{,}9218810.423 - 10\,,$$

dreimal übereinstimmend und einmal mit 4 anstatt 3 in der 10. Decimalstelle. Dieser Wert für $\log\cos\beta_2$ gehört innerhalb der Genauigkeit der Tafeln demselben β_2 an, wie der oben angegebene $\log\sin\beta_2$.

Es ist weiter:

$$\left\{\begin{aligned} \log\tan\beta_2 &= 9{,}8182302.546_n - 10 \\ -\log\sqrt{1-e^2} &= 0{,}0014541.798 \end{aligned}\right.$$
$$\log\tan B_2 = 9{,}8196844.344_n - 10; \quad B_2 = -33^0\,26'\,0{,}00002''.$$

Man hat endlich noch zur Berechnung von $L_{1.2}$:

$$\varDelta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 108^0\,27'\,16{,}62534''.$$

Ferner:

$$\left\{\begin{aligned} \log\left\{\frac{1}{2}M\left(1-\frac{1}{2}\mathfrak{a}\right)\right\} &= 6{,}33603 \\ \log k_1 &= 7{,}06059 - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 3{,}39662$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(\frac{3}{8}M\right) &= 6{,}212 \\ 2\log k_1 &= 4{,}121 - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 0{,}333$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\mathfrak{a} &= 7{,}5241069.0 - 10 \\ -[3{,}39662] &= -2492.4 \\ -[0{,}333] &= -2.2 \end{aligned}\right.$$
$$\log\mathfrak{A}' = 7{,}5238574.4 - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(-\frac{1}{4}\varrho'' e^2\right) &= 2{,}53678_n \\ \log k_1 &= 7{,}06059 - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\log\mathfrak{B}' = 9{,}59737_n - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(\frac{1}{16}\varrho'' e^2\right) &= 1{,}935 \\ 2\log k_1 &= 4{,}121 - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\log\mathfrak{C}' = 6{,}056 - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\cos\beta_0 &= 9{,}7484605.1 - 10 \\ \log\mathfrak{A}' &= 7{,}5238574.4 - 10 \\ \log\varDelta\varphi &= 5{,}6604086.6 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 2{,}9327266.1$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\cos\beta_0 &= 9{,}74846 - 10 \\ \log\mathfrak{B}' &= 9{,}59737_n - 10 \\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}85745_n - 10 \\ \log\sin\varDelta\varphi &= 9{,}90184 - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 9{,}10512 - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\cos\beta_0 &= 9{,}748 - 10 \\ \log\mathfrak{C}' &= 6{,}056 - 10 \\ \log\cos 4\varphi &= 8{,}572 - 10 \\ \log\sin 2\varDelta\varphi &= 9{,}983_n - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 4{,}36_n - 10$$

Es ist daher für $L_{1.2}$:

$$\begin{array}{rl} \lambda_2 - \lambda_1 = & 108^0\ 27'\ 16{,}62534'' \\ -\ [2{,}9327266.1] = - & 14\ 16{,}49848 \\ -\ [9{,}10512 - 10] = - & 0{,}12739 \\ +\ [4{,}36 - 10] = & 0 \\ \hline L_{1.2} = & 108^0\ 12'\ 59{,}99947''. \end{array}$$

Die Berechnung von $\varDelta\lambda$ aus der 1. Gleichung (5) S. 237 giebt

$$\log \sin \varDelta\lambda = \left\{\begin{array}{l} 9{,}9018424.667 - 10 \\ 9{,}9971101.048 - 10 \\ 0{,}0781189.577 \end{array}\right\} = 9{,}9770715.292 - 10$$

mit $\varDelta\lambda = 108^0\ 27'\ 16{,}6254''$. Die Bestimmung ist aus leicht ersichtlichem Grunde nicht sehr scharf und auf 0,0001″ unsicher. Übrigens paſst der Wert gut mit dem oben gefundenen. Die

$$\text{Resultate:} \left\{\begin{array}{rl} \alpha_{2.1} = & 222^0\ 7'\ 37{,}98543'' \\ B_2 = & -33^0 26'\ 0{,}00002'' \\ L_{1.2} = & 108^0 12'\ 59{,}99947'' \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 37{,}986'' \\ 0{,}000'' \\ 60{,}000'' \end{array}\right.$$

stimmen mit den neben angeschriebenen Ergebnissen von *Baeyers* Rechnung, bei welcher zwar zehnziffrige Logarithmen benutzt, aber die Ergebnisse der logarithmischen Rechnung nur bis zu den Tausendstelsekunden incl. angeschrieben sind, völlig überein, soweit dies erwartet werden kann. *Baeyers* wie auch *Bessels* Tafeln genügen im vorliegenden Falle wegen der Gröſse von s nicht zu einer Genauigkeit auf Hunderttausendstelsekunden; nun gestatten allerdings die Formeln beider jede wünschenswerte Genauigkeit zu erreichen, aber die direkte Berechnung der Koefficienten ist, wie bemerkt, mühsamer als oben.

§ 12. **Zahlenbeispiel I.** Gegeben:

$$B_1 = 52^0\ 30'\ 16{,}7'' \qquad s = 529979{,}5784^m \qquad \alpha_{1.2} = 239^0\ 33'\ 0{,}68921''.$$

S. 43 ist bereits β_1 berechnet, sodaſs wir es hier nicht nochmals aus der Tangente zu berechnen brauchen:

$$\beta_1 = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''.$$

$$\log \sin \beta_1 = 9{,}8989537.053 - 10 \quad \log \sin \alpha_{1.2} = 9{,}9355442.631_n - 10$$
$$\log \cos \beta_1 = 9{,}7853155.518 - 10 \quad \log \cos \alpha_{1.2} = 9{,}7048223.603_n - 10.$$

Die *Formeln* S. 232 u. ff. geben nun:

$$\begin{array}{ll} \sin \beta_0 \cos \varphi_1 & = [9{,}8989537.053 - 10] \\ \sin \beta_0 \sin \varphi_1 & = [9{,}4901379.121_n - 10] \\ \cos \beta_0 & = [9{,}7208598.149_n - 10]. \end{array}$$

Hieraus folgt:

$\log\tan\varphi_1 = 9{,}5911842.068_n - 10 \qquad \varphi_1 = -21^0\,18'\,40{,}05148''$

$\log\sin\varphi_1 = 9{,}5604233.251_n - 10 \qquad \log\cos\varphi_1 = 9{,}9692391.183 - 10$

$$\log\sin\beta_0 = 9{,}9297145.870 - 10.$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta_1\cos\lambda_1 &= [9{,}6900989.332_n - 10]\\ \cos\beta_1\sin\lambda_1 &= [9{,}5604233.251_n - 10]\end{aligned}\right\}$$

und hiernach:

$$\left.\begin{aligned}\log\cos\lambda_1 &= 9{,}9047833.814_n - 10\\ \log\sin\lambda_1 &= 9{,}7751077.733_n - 10\end{aligned}\right\}\ \lambda_1 = 216^0\,34'\,13{,}42302''.$$

Es ist nun weiter:

$$\left\{\begin{aligned}\log\sqrt{\delta} &= 8{,}9136593.9 - 10\\ \log\sin\beta_0 &= 9{,}9297145.9 - 10\end{aligned}\right.$$

$\log\tan E = 8{,}8433739.8 - 10 \qquad E = 3^0\,59'\,18{,}097''$

$\log\tan\frac{E}{2} = 8{,}5418171 \quad - 10 \qquad \frac{E}{2} = 1^0\,59'\,39{,}0485''$

$$\log k_1 = 7{,}0836342 - 10$$

$$\left\{\begin{aligned}\log s &= 5{,}7242591.353\\ \log\frac{\varrho''}{b_0} &= 8{,}5112358.493 - 10\\ 2\log\cos\frac{E}{2} &= 9{,}9994737.942 - 10\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\log\left(\tfrac{5}{4}M\right) &= 6{,}73469\\ 2\log k_1 &= 4{,}16727 - 10\end{aligned}\right.$$

$\text{Summa} = 4{,}2349687.788 \qquad \text{Summa} = 0{,}90196$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{num.} = 7.979$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\sigma} = 4{,}2349679.809$$

$$\Delta\sigma = 17177{,}81736'' = 4^0\,46'\,17{,}81736''.$$

Die Berechnung von $2\sigma_1$ giebt:

$\log\sin 2\varphi_1 = 9{,}83069_n - 10$

$\log\sin 4\varphi_1 = 9{,}999_n \quad - 10$

$$\left\{\begin{aligned}2\varphi_1 &= -\,42^0\,37'\,20{,}10''\\ \varrho''k_1\sin 2\varphi_1 &= -\qquad\quad 2\ \ 49{,}34\\ -\tfrac{1}{8}\varrho''k_1^2\sin 4\varphi_1 &= +\qquad\qquad\ \ 0{,}04\end{aligned}\right.$$

$$2\sigma_1 = -\,42^0\,40'\ \ 9{,}40''$$
$$2\sigma = -\,37\ \ 53\ \ 51{,}58.$$

Die Berechnung von $\Delta\varphi$ giebt:

$\log \sin \varDelta\sigma \;= 8{,}9200407 - 10$

$\log \cos 2\sigma \;= 9{,}8971371 - 10$ $\qquad \log \mathfrak{A} = 2{,}3980589_n$

$\log \sin 2\varDelta\sigma = 9{,}21959 - 10$ $\qquad \log \mathfrak{B} = 9{,}27758 - 10$

$\log \cos 4\sigma \;= 9{,}38985 - 10$ $\qquad \log \mathfrak{C} = 6{,}35_n - 10$

$\log \sin 3\varDelta\sigma = 9{,}393 - 10$

$\log \cos 6\sigma \;= 9{,}604_n - 10$

$$\left\{\begin{array}{rl} \varDelta\sigma = & 4^0\,46'\,17{,}81736'' \\ \mathfrak{A}\cos 2\sigma \sin \varDelta\sigma = - & 16{,}41484 \\ \mathfrak{B}\cos 4\sigma \sin 2\varDelta\sigma = + & 0{,}00771 \\ \mathfrak{C}\cos 6\sigma \sin 3\varDelta\sigma = + & 2 \end{array}\right.$$

$$17161{,}41025'' = \varDelta\varphi = 4^0\,46'\,\;1{,}41025''$$

$$\varphi = -\,18^0\,55'\,39''; \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = -\,21\;\;18\;\;40{,}05148 \\ \varphi_2 = -\,16^0\,32'\,38{,}64123'' \end{array}\right.$$

$\log \sin \varphi_2 = 9{,}4544678.545_n - 10 \quad \log \cos \varphi_2 = 9{,}9816378.827 - 10.$

Hiermit erhält man weiter:

$$\left.\begin{array}{rl} \sin \beta_2 = & [9{,}9113524.697 - 10] \\ \cos \beta_2 \cos \alpha_{2.1} = & [9{,}3841824.415 - 10] \\ \cos \beta_2 \sin \alpha_{2.1} = & [9{,}7208598.149 - 10] \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \cos \beta_2 \cos \lambda_2 = & [9{,}7024976.976_n - 10] \\ \cos \beta_2 \sin \lambda_2 = & [9{,}4544678.545_n - 10]. \end{array}\right\}$$

Dies giebt:

$\log \tan \alpha_{2.1} = 0{,}3366773.734$ $\qquad \alpha_{2.1} = 65^0\,16'\,\;9{,}36534''$

$\log \tan \lambda_2 \;= 9{,}7519701.569 - 10$ $\qquad \lambda_2 = 209^0\,27'\,43{,}28944''$

$\log \sin \alpha_{2.1} = 9{,}9582216.230 - 10$ $\quad \log \sin \lambda_2 = 9{,}6918296.627_n - 10$

$\log \cos \alpha_{2.1} = 9{,}6215442.496 - 10$ $\quad \log \cos \lambda_2 = 9{,}9398595.058_n - 10,$

und es wird

$\log \cos \beta_2 \;= 9{,}7626381.919 - 10$ bezw. .918 je 2mal;

$\log \tan \beta_2 \;= 0{,}1487142.779$

$\log \tan B_2 = 0{,}1501684.577; \quad B_2 = 54^0\,42'\,50{,}60000''.$

Ferner ist $\varDelta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = -\,7^0\,6'\,30{,}13358''$. Zu weiterer Kon-

trolle kann man dieses nochmals mittelst des Sinussatzes aus $\Delta\varphi$ berechnen, vergl. S. 237 (5), und erhält mit log sin $\Delta\varphi = 8{,}9196266.655 - 10$ aus $\alpha_{1.2}$ sowohl wie aus $\alpha_{2.1}$:

$$\log \sin \Delta\lambda = 9{,}0925327.367_n - 10; \quad \Delta\lambda = -\,7^0\,6'\,30{,}13350''.$$

Dieser Wert ist als der genauere beizubehalten. Bei Berechnung von $L_{1.2}$ findet sich nun weiter:

$$\begin{array}{llll}
\log \Delta\varphi & = 4{,}2345530 & \log \mathfrak{A}' = 7{,}5238439 & -10 \\
\log \cos 2\varphi & = 9{,}8974 - 10 & \log \mathfrak{B}' = 9{,}6204_n & -10 \\
\log \sin \Delta\varphi & = 8{,}9196 - 10 & \log \mathfrak{C}' = 6{,}10 & -10
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\Delta\lambda = & -\,7^0\,6'\,30{,}13350'' \\
-\cos\beta_0 \,.\, \mathfrak{A}'\Delta\varphi = & +\qquad 30{,}14788 \\
-\cos\beta_0 \,.\, \mathfrak{B}' \cos 2\varphi \sin \Delta\varphi = & -\qquad 0{,}01440 \\
-\cos\beta_0 \,.\, \mathfrak{C}' \cos 4\varphi \sin 2\,\Delta\varphi = & \qquad\quad 0 \\
\hline
L_{1.2} = & -\,7^0\,6'\;\;0{,}00002''.
\end{array}$$

Die Berechnung des 3. und 4. Gliedes mit σ ergiebt dieselben Werte.

Man hat somit als

$$\text{Resultat:} \begin{cases} B_2 = 54^0\,42'\,50{,}60000'' \\ L_{1.2} = \;\;7^0\;\;6'\;\;0{,}00002'' \text{ östlich} \\ \alpha_{2.1} = 65^0\,16'\;\;9{,}36534''. \end{cases}$$

§ 13. **Bestimmung der geodätischen Linie aus der geographischen Lage zweier Punkte.** Diese Aufgabe ist, abgesehen vom Falle eines kleinen Abstandes beider Punkte (der in einem spätern Kapitel behandelt werden wird) noch nicht direkt gelöst worden.

Man löst aber dieselbe indirekt dadurch, dafs man aus dem schiefwinkligen sphärischen Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ Fig. 21 S. 248 mittelst der Seiten $\frac{\pi}{2} - \beta_1$ und $\frac{\pi}{2} - \beta_2$ sowie mit Hilfe des Zwischenwinkels $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, wofür man in 1. Annäherung $L_{1.2}$ setzt, $\alpha_{1.2}$, $\alpha_{2.1}$ und $\Delta\varphi$ bestimmt. Nun lassen sich vorläufige Werte von φ_1, φ_2, β_0, k_1 ermitteln, worauf die Gleichung zwischen $L_{1.2}$ und $\Delta\lambda$ den Unterschied beider angiebt.

Man erhält dadurch einen bessern Wert für $\Delta\lambda$, womit eine neue Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks erfolgt u. s. f., bis der Unterschied $L_{1.2} - \Delta\lambda$ konstant bleibt.

Zur Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ benutzen wir die *Gaufs*ischen Gleichungen (vergl. S. 131):

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= -\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\cos\frac{\varDelta\lambda}{2}\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= -\cos\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\sin\frac{\varDelta\lambda}{2}\\
\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= +\cos\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\cos\frac{\varDelta\lambda}{2}\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= +\sin\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\sin\frac{\varDelta\lambda}{2}
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

und beschränken uns bei der Auflösung auf die Annahme $\varDelta\varphi < \pi$.

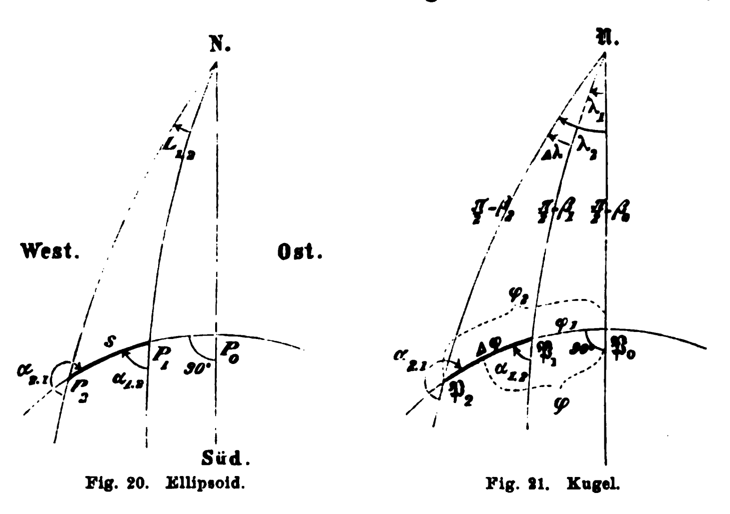


Fig. 20. Ellipsoid. Fig. 21. Kugel.

Zur Berechnung von β_1 und β_2 aus B_1 und B_2 ist die Formel anzuwenden:

$$\tan\beta = \sqrt{1-e^2}\tan B;\ \log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.202 - 10; \quad (2)$$

zur Bestimmung von $\varDelta\lambda$ aus $L_{1.2}$ aber führen die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\lambda} &= \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} + \cos\beta_0\{\underset{\text{in Sek.}}{\mathfrak{A}'\varDelta\varphi} + \mathfrak{B}'\cos 2\varphi\sin\varDelta\varphi + \mathfrak{C}'\cos 4\varphi\sin 2\varDelta\varphi + \cdots\}\\
\log\mathfrak{A}' &= \log\mathfrak{a} - \frac{1}{2}M\left(1-\frac{1}{2}\mathfrak{a}\right)k_1 - \frac{3}{8}Mk_1^2 + \cdots\\
&= 7{,}5241069.0 - 10 - [6{,}33603]\,k_1 - [6{,}212]\,k_1^2 + \cdots \quad \text{für Einh. der 7. Dec.}\\
\log\mathfrak{B}' &= \log\left(-\frac{1}{4}\varrho'' e^2 k_1 + \cdots\right) = 2{,}53678_n + \log k_1 + \cdots\\
\log\mathfrak{C}' &= \log\left(\frac{1}{16}\varrho'' e^4 k_1^2 + \cdots\right) = 1{,}935 + 2\log k_1 + \cdots;
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{array}{ll|c|ll}
\sin\beta_0\cos\varphi_1 & = \sin\beta_1 & & \sin\beta_0\cos\varphi_2 & = +\sin\beta_2\\
\sin\beta_0\sin\varphi_1 & = \cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} & \text{oder auch} & \sin\beta_0\sin\varphi_2 & = -\cos\beta_2\cos\alpha_{2.1}\\
\cos\beta_0 & = \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2} & & \cos\beta_0 & = -\cos\beta_2\sin\alpha_{2.1}
\end{array}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi = 2\varphi_1 + \Delta\varphi = 2\varphi_2 - \Delta\varphi \\ \tan E = \sqrt{\delta}\sin\beta_0; \qquad \log\sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9-10 \\ \log k_1 = 2\log\tan\frac{E}{2}\cdot \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Bei einer ersten Berechnung von $\Delta\lambda$ wird man die Glieder mit k_1 weglassen. Wie im übrigen der Gang der Rechnung ist, lassen am besten die folgenden Beispiele erkennen.

Hier ist zunächst noch hervorzuheben, dafs für *kleine* Entfernungen ein vom vorigen etwas abweichendes Verfahren sich empfiehlt, bei welchem man in 1. Annäherung in die (1) nicht für $\Delta\lambda$ einfach $L_{1.2}$ einführt, sondern besser (wie *Albrecht* S. 80 angiebt) einen Wert, den die Anwendung der folgenden beiden Formeln liefert:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\lambda_1} &= \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} + \varrho''\mathfrak{A}\cos\beta_1\cos\beta_2\sin L_{1.2} \\ \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\lambda} &= \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} + \varrho''\mathfrak{A}\cos\beta_1\cos\beta_2\sin\Delta\lambda_1 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Zu diesen Formeln gelangt man sofort, wenn man in der 1. Gleichung (3) alle Glieder mit k_1 vernachlässigt, also $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ setzt, aufserdem aber für $\Delta\varphi$ $\sin\Delta\varphi$ schreibt und nun beachtet, dafs in Strenge ist (vergl. die 3. Gleichung (4) oben und S. 237 (5)):

$$\cos\beta_0\sin\Delta\varphi = \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2}\sin\Delta\varphi = \cos\beta_2\cos\beta_1\sin\Delta\lambda.$$

Es wird sich weiterhin zeigen, dafs bei kleinen Distanzen die (6) den Wert von $\Delta\lambda$ auf Tausendstelsekunden genau geben und dann ist die ganze Rechnung, insofern man sich mit dieser Genauigkeit begnügt, als eine *direkte* zu betrachten. [Vergl. noch S. 264 (3).]

Wenn nun bei fortgesetzter Annäherungsrechnung $\Delta\lambda$ sich nicht mehr ändert, so kann dann s aus $\Delta\varphi$ abgeleitet werden nach den Formeln (vergl. S. 223 (9) und S. 233 (4) u. (5)):

$$\left.\begin{aligned} s = b_0\,\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\varrho''}\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\varphi} + \left(k_1 - \tfrac{3}{8}k_1^3\right)\cos 2\varphi\sin\Delta\varphi \\ - \frac{1}{8}k_1^2\cos 4\varphi\sin 2\Delta\varphi \\ + \tfrac{1}{24}k_1^3\cos 6\varphi\sin 3\Delta\varphi + \cdots \end{aligned}\right\} \\ \log\frac{b_0}{\varrho''} = 1{,}4887641.507 \qquad \log\left(-\frac{b_0}{8}\right) = 5{,}90010_n \\ \log b_0 = 6{,}8031892.8 \qquad \log\frac{b_0}{24} = 5{,}423 \\ \log\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 2\log\sec\frac{E}{2} + \frac{5}{4}Mk_1^2 + \cdots \\ \log\left(\frac{5}{4}M\right) = 6{,}73469 \text{ und } \log\left(-\tfrac{3}{8}M\right) = 6{,}212_n \text{ für Einh. der 7. Dec.} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Die Formeln des § 9 und des § 13 dieses Kapitels gestatten die Lösung aller Aufgaben, die sich auf die Lage von 2 Punkten beziehen. (Vergl. hierzu die ausführliche Darstellung von *Winterberg, Astronom. Nachr.* Bd. 95. Nr. 2271 u. ff. S. 223 u. ff., auch *Hansen, Geodät. Untersuchungen.*) Mit Hilfe des in den genannten Paragraphen Gegebenen lassen sich u. a. ohne weiteres die wichtigsten Aufgaben über *beliebig grofse geodätische Dreiecke* lösen, insbesondere diejenige seiner Bestimmung aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel, wenn die geographische Lage und die Azimute im Scheitel des letzteren gegeben sind.

§ 14. Zahlenbeispiel IV. Gegeben:

$$B_1 = 55^0 45', \qquad B_2 = -33^0 26', \qquad L_{1.2} = 108^0 13'.$$

Wir rechnen mit 7ziffrigen Logarithmen (Tafeln v. *Bruhns*) unter Mitführung der 8. Decimalstelle aus den Proportionalteilen.

Zunächst ist nach *Formel* (2) S. 248:

$$\begin{cases} \log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.2 - 10 \\ \log\tan B_1 = 0{,}1669321 \end{cases}$$
$$\log\tan\beta_1 = 0{,}1654779.2 - 10$$
$$\beta_1 = 55^0 39' 38{,}500''$$
$$\log\sin\beta_1 = 9{,}9168283.4 - 10$$
$$\log\cos\beta_1 = 9{,}7513504.2 - 10$$

$$\begin{cases} \log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.2 - 10 \\ \log\tan B_2 = 9{,}8196844_n \end{cases}$$
$$\log\tan\beta_2 = 9{,}8182302.2_n - 10$$
$$\beta_2 = -33^0 20' 42{,}642''$$
$$\log\sin\beta_2 = 9{,}7401112.6_n - 10$$
$$\log\cos\beta_2 = 9{,}9218810.5 - 10.$$

Die *Formeln* (1) S. 248 geben hiermit:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= \cos\frac{\Delta\lambda}{2}[9{,}8456844.2 - 10] = [9{,}6138 - 10] \\
\cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= \sin\frac{\Delta\lambda}{2}[9{,}9917124.5_n - 10] = [9{,}9003_n - 10] \\
\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= \cos\frac{\Delta\lambda}{2}[9{,}8532202.1 - 10] = [9{,}6213 - 10] \\
\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= \sin\frac{\Delta\lambda}{2}[9{,}2867058.0 - 10] = [9{,}1953 - 10].
\end{aligned}\right\}$$

Die äufsersten rechten Seiten beziehen sich auf die Annahme

$$\Delta\lambda = 108^0 13'.$$

Es folgt damit:

$$\Delta\varphi = 126^0 57', \qquad \Delta\varphi = 457020'', \qquad \log\Delta\varphi = 5{,}6599;$$
$$\alpha_{1.2} = 83^0 13', \qquad \alpha_{2.1} = 222^0 7'$$

und nach den 3. *Gleichungen* (4) S. 248 übereinstimmend:

$$\log\cos\beta_0 = 9{,}7484 - 10.$$

Hiermit ergiebt sich nunmehr in 2. Annäherung aus *Formel* (3) S. 248:

$$\varDelta\lambda = L_{1.2} + [9{,}7484 - 10 + 7{,}5241 - 10 + 5{,}6599] = 108^0 27' 16''.$$

Mit diesem Werte von $\varDelta\lambda$ erhält man aus dem obigen Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}612522 \;-10] \\
\cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}900916_n - 10] \\
\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}620058 \;-10] \\
\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}195910 \;-10];
\end{aligned}\right\}$$

$$\varDelta\varphi = 127^0 5' 18{,}1'', \quad \alpha_{1.2} = 83^0 23' 51{,}0'', \quad \alpha_{2.1} = 222^0 7' 37{,}8''.$$

Das 1. *System* (4) S. 248 giebt jetzt:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\beta_0\cos\varphi_1 &= [9{,}916828 - 10] \\
\sin\beta_0\sin\varphi_1 &= [8{,}811974 - 10] \\
\cos\beta_0 &= [9{,}748460 - 10],
\end{aligned}\right\}$$

$$\varphi_1 = 4^0 29' 28{,}9'', \qquad \log\sin\beta_0 = 9{,}918164 - 10;$$

die beiden Werte von β_0 aus $\cos\beta_0$ und $\sin\beta_0$ stimmen hinlänglich mit einander überein.

Man hat nun zur Berechnung von $\varDelta\lambda$ aus $L_{1.2}$ in 3. Annäherung nach den *Formeln* (5) S. 249 und (3) S. 248:

$$2\varphi_1 = 8^0 58' 57{,}8'', \quad 2\varphi = 136^0 4' 16'', \quad \varDelta\varphi = 457518{,}1'';$$

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\log\sqrt{\delta} = 8{,}913659 - 10 \\ \log\sin\beta_0 = 9{,}918164 - 10\end{cases} \\
&\log\tan E = 8{,}831823 - 10 \qquad E = 3^0 53'\; 2{,}4'' \\
&\log\tan\frac{E}{2} = 8{,}530293 - 10 \qquad \frac{E}{2} = 1^0 56' 31{,}2'' \\
&\log k_1 = 7{,}060586 - 10 \qquad \log\mathfrak{B}' = 9{,}597_n \quad - 10 \\
&\log\mathfrak{A}' = 7{,}5241069 - 10 - \underset{\text{Einh. d. 7. Dec.}}{2492} = 7{,}523858 - 10,
\end{aligned}$$

wobei in $\log\mathfrak{A}'$ die Glieder mit k_1^2 weggelassen sind. Es ist ferner:

$$\begin{cases}\log\cos\beta_0 = 9{,}748460 - 10 \\ \log\mathfrak{A}' = 7{,}523858 - 10 \\ \log\varDelta\varphi = 5{,}660408\end{cases} \qquad \begin{cases}\log\cos\beta_0 = 9{,}748 \;- 10 \\ \log\mathfrak{B}' = 9{,}597_n - 10 \\ \log\cos 2\varphi = 9{,}857_n - 10 \\ \log\sin\varDelta\varphi = 9{,}902 \;- 10\end{cases}$$

$$\text{Summa} = 2{,}932726 \qquad\qquad \text{Summa} = 9{,}104 \;- 10$$

$$\left\{\begin{aligned} L_{1.2} &= 108^\circ 13'\ 0'' \\ [2{,}932726] &= +\quad 14'16{,}497'' \\ [9{,}104-10] &= +\qquad 0{,}127'' \end{aligned}\right.$$
$$\varDelta\lambda = 108^\circ 27' 16{,}624''.$$

Hiermit erhält man weiter aus dem oben mehrfach benutzten Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}6125217.6 - 10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}9009166.8_n - 10] \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}6200575.5 - 10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}1959100.3 - 10]; \end{aligned}\right\}$$

$$\varDelta\varphi = 127^\circ 5' 18{,}47'',\quad \alpha_{1.2} = 83^\circ 23' 51{,}18'',\quad \alpha_{2.1} = 222^\circ 7' 38{,}00''.$$

Dies weicht so wenig von den vorher erhaltenen Werten ab, dafs durch eine neue Rechnung $\varDelta\lambda$ höchstens ein wenig in den Tausendstelsekunden geändert werden würde. Wir bleiben daher bei den bis jetzt erhaltenen Resultaten stehen und ermitteln s.

Hierzu geben die *Formeln* (7) S. 249 mit

$$\varDelta\varphi = 457518{,}47''$$

und

$$2\varphi = 136^\circ 4' 16{,}3'',$$

der Reihe nach:

$$\left\{\begin{aligned} \log\varDelta\varphi &= 5{,}6604086.5 \\ \log\frac{b_0}{\varrho''} &= 1{,}4887641.5 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 7{,}1491728.0$$

$$\left\{\begin{aligned} \log b_0 &= 6{,}803189 \\ \log k_1 &= 7{,}060586 - 10 \\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}857455_n - 10 \\ \log\sin\varDelta\varphi &= 9{,}901842 - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 3{,}623072_n$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(-\frac{b_0}{8}\right) &= 5{,}900_n \\ 2\log k_1 &= 4{,}121 - 10 \\ \log\cos 4\varphi &= 8{,}572 - 10 \\ \log\sin 2\varDelta\varphi &= 9{,}983_n - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} \doteq 8{,}576 - 10$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\log\left(\frac{5}{4}M\right) & = 6{,}735 \\ 2\log k_1 & = 4{,}121 - 10\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll}2\log\sec\frac{E}{2} & = 0{,}0004990.4 \\ [0{,}856] & = \quad + \quad 7.2\end{array}\right.$$

$$\log\left(\frac{5}{4}Mk_1^2\right) = 0{,}856 \qquad \log\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 0{,}0004997.6\,.$$

Dies wird den vorher gefundenen drei Logarithmensummen zugefügt und so erhalten:

$$s = 14114729{,}3 - 4203{,}2 + 0{,}0 = 14110526{,}1\,.$$

$$\text{Die Resultate:}\left\{\begin{array}{ll}\log s = 7{,}1495432.0 & \ldots 432.1 \\ \alpha_{1.2} = 83^0 23' 51{,}18'' & 51{,}20 \\ \alpha_{2.1} = 222 \quad 7 \; 38{,}00 & 37{,}99\end{array}\right.$$

stimmen mit den Angaben auf S. 240 u. 244, die rechter Hand beigefügt sind, in völlig genügender Weise überein.

§ 15. **Zahlenbeispiel V.** Gegeben:

$$B_1 = 51^0 12', \quad B_2 = 51^0 55', \quad L_{1.2} = 69^0 3'.$$

Wir rechnen wieder mit 7ziffrigen Logarithmen (Tafeln von *Bruhns*) wie im vorigen Beispiel.

Die *Formel* (2) S. 248 giebt zuerst:

$$\left\{\begin{array}{ll}\log\sqrt{1-e^2} & = 9{,}9985458.2 - 10 \\ \log\tan B_1 & = 0{,}0947328\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll}\log\sqrt{1-e^2} & = 9{,}9985458.2 - 10 \\ \log\tan B_2 & = 0{,}1058886\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ll}\log\tan\beta_1 & = 0{,}0932786.2 \\ \beta_1 & = 51^0 6' 22{,}603'' \\ \log\sin\beta_1 & = 9{,}8911537.2 - 10 \\ \log\cos\beta_1 & = 9{,}7978751.1 - 10\end{array} \qquad \begin{array}{ll}\log\tan\beta_2 & = 0{,}1044344.2 \\ \beta_2 & = 51^0 49' 24{,}545'' \\ \log\sin\beta_2 & = 9{,}8954835.0 - 10 \\ \log\cos\beta_2 & = 9{,}7910490.7 - 10.\end{array}$$

Die *Gleichungen* (1) S. 248 führen hierauf zu:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} = \cos\frac{\varDelta\lambda}{2}\,[7{,}7964889_n - 10] = [7{,}71235_n - 10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} = \sin\frac{\varDelta\lambda}{2}\,[9{,}7944840_n - 10] = [9{,}54789_n - 10] \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} = \cos\frac{\varDelta\lambda}{2}\,[9{,}9999915.0 - 10] = [9{,}91585 - 10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} = \sin\frac{\varDelta\lambda}{2}\,[9{,}8933325.1 - 10] = [9{,}64674 - 10]\,.\end{array}\right\}$$

Die äufsersten rechten Seiten beziehen sich auf $\Delta\lambda = 69^\circ 3'$. Es folgt leicht:

$$\Delta\varphi = 41^\circ 21' 30'' = 148890''; \qquad \log = 5{,}17287;$$

$$\alpha_{2.1} = 242^\circ 33' 4'', \qquad \alpha_{1.2} = 119^\circ 7' 20''.$$

Die 3. *Gleichungen* (4) S. 248 geben übereinstimmend:

$$\log \cos \beta_0 = 9{,}73918 - 10.$$

Hiermit findet sich in 2. Annäherung aus *Formel* (3) S. 248:

$$\Delta\lambda = L_{1.2} + [9{,}73918 - 10 + 7{,}52411 - 10 + 5{,}17287] = 69^\circ 7' 33{,}00''.$$

Mit diesem Werte giebt das obige Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
\sin \frac{\alpha_{2.1} + \alpha_{1.2}}{2} \sin \frac{\Delta\varphi}{2} &= [7{,}7121545_n \;\; -10] \\
\cos \frac{\alpha_{2.1} + \alpha_{1.2}}{2} \sin \frac{\Delta\varphi}{2} &= [9{,}5483051_n \;\; -10] \\
\sin \frac{\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2}}{2} \cos \frac{\Delta\varphi}{2} &= [9{,}9156570.7 - 10] \\
\cos \frac{\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2}}{2} \cos \frac{\Delta\varphi}{2} &= [9{,}6471536.0 - 10];
\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta\varphi = 41^\circ 23' 57{,}2'', \quad \alpha_{2.1} = 242^\circ 30' 57{,}26'', \quad \alpha_{1.2} = 119^\circ 9' 18{,}26''.$$

Hiermit erhält man mittelst des 1. *Systems* (4) S. 248:

$$\left.\begin{aligned}
\sin \beta_0 \cos \varphi_1 &= [9{,}891154 \;\; -10] \\
\sin \beta_0 \sin \varphi_1 &= [9{,}485560_n - 10] \\
\cos \beta_0 \qquad &= [9{,}739040 \;\; -10];
\end{aligned}\right\}$$

$$\varphi_1 = -21^\circ 27' 19{,}5'', \qquad \log \sin \beta_0 = 9{,}922344.$$

die Werte von β_0 aus $\cos \beta_0$ und $\sin \beta_0$ stimmen hinlänglich mit einander überein.

Man hat nun zur Berechnung von $\Delta\lambda$ aus $L_{1.2}$ in 3. Annäherung aus den *Formeln* (5) S. 249 und (3) S. 248:

$$2\varphi_1 = -42^\circ 54' 39{,}0'', \quad 2\varphi = -1^\circ 30' 41{,}8'', \quad \Delta\varphi = 149037{,}2'';$$

$$\log \tan E = 8{,}836003 - 10 \qquad E = 3^\circ 55' 17{,}2''$$

$$\log \tan \frac{E}{2} = 8{,}534464 - 10 \qquad \frac{E}{2} = 1^\circ 57' 38{,}6''$$

$$\log k_1 = 7{,}068928 - 10 \qquad \log \mathfrak{K} = 9{,}606_n - 10$$

$$\log \mathfrak{L}' = 7{,}5241069 - 10 - 2541 \text{ Einh. d. 7. Dec.} = 7{,}523853 - 10,$$

wobei in $\log \mathfrak{A}'$ die Glieder mit k_1^2 weggelassen sind. Ferner ist:

$$\left\{\begin{array}{ll}\log\cos\beta_0 &= 9{,}739040-10\\ \log\mathfrak{A}' &= 7{,}523853-10\\ \log\varDelta\varphi &= 5{,}173295\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll}\log\cos\beta_0 &= 9{,}739\ -10\\ \log\mathfrak{B}' &= 9{,}606_n-10\\ \log\cos 2\varphi &= 0{,}000\\ \log\sin\varDelta\varphi &= 9{,}820\ -10\end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = 2{,}436188 \qquad \text{Summa} = 9{,}165_n-10$$

$$\left\{\begin{array}{rl}L_{1.2} &= 69^0\ 3'\ 0''\\ [2{,}436188] &= +\ 4'\ 33{,}016''\\ [9{,}165_n-10] &= -\quad 0{,}146''\end{array}\right.$$

$$\varDelta\lambda = 69^0\ 7'\ 32{,}870''.$$

Dies weicht von der 2. Annäherung so wenig ab, dafs jetzt in 3. Annäherung $\varDelta\varphi$, $\alpha_{2.1}$ und $\alpha_{1.2}$ kaum in den Zehntelsekunden Änderungen erleiden werden und für 7ziffrige Rechnung jedenfalls die folgenden Werte als definitiv anzusehen sind.

Es wird:

$$\frac{\varDelta\lambda}{2} = 34^0\ 33'\ 46{,}435''; \left\{\begin{array}{l}\log\sin\frac{\varDelta\lambda}{2} = 9{,}7538208.9-10\\ \log\cos\frac{\varDelta\lambda}{2} = 9{,}9156656.7-10;\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} = [7{,}7121546_n-10]\\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} = [9{,}5483049_n-10]\\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} = [9{,}9156571.7-10]\\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} = [9{,}6471534.0-10];\end{array}\right\}$$

$$\varDelta\varphi = 41^0\ 23'\ 57{,}34'',\quad \alpha_{2.1} = 242^0\ 30'\ 57{,}32'',\quad \alpha_{1.2} = 119^0\ 9'\ 18{,}20''.$$

Zur Berechnung von s geben nun die *Formeln* (7) S. 249 mit

$$\varDelta\varphi = 149037{,}34'' \text{ und } 2\varphi = -\ 1^0\ 30'\ 41{,}8''$$

der Reihe nach:

$$\left\{\begin{array}{ll}\log\varDelta\varphi &= 5{,}1732950.6\\ \log\frac{b_0}{\varrho''} &= 1{,}4887641.5\end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = 6{,}6620592.1$$

$$\left\{\begin{aligned} \log b_0 &= 6{,}80319 \\ \log k_1 &= 7{,}06893-10 \\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}99985-10 \\ \log\sin\varDelta\varphi &= 9{,}82040-10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\log\left(-\frac{b_0}{8}\right) = 5{,}90_n \\ &2\log k_1 = 4{,}14-10 \\ &\log\cos 4\varphi = 0{,}00 \\ &\log\sin 2\varDelta\varphi = 0{,}00 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 3{,}69237 \qquad \text{Summa} = 0{,}04_n$$

$$\left\{\begin{aligned} &\log\left(\tfrac{5}{4}M\right) = 6{,}735 \\ &2\log k_1 = 4{,}138-10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &2\log\sec\frac{E}{2} = 0{,}0005087.2 \\ &[0{,}873] \quad = \quad + \quad 7.5 \end{aligned}\right.$$

$$\log\left(\tfrac{5}{4}Mk_1^2\right) = 0{,}873-10 \qquad \log\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 0{,}0005094.7$$

Dies wird den vorhergefundenen 3 Logarithmensummen hinzugefügt und so erhalten:

$$s = 4597996{,}6 + 4930{,}4 - 1{,}1 = 4602925{,}9^m.$$

$$\text{Resultat:} \left\{\begin{aligned} \log s &= 6{,}6630340 \\ \alpha_{1.2} &= 119^0\ 9'\ 18{,}20'' \\ \alpha_{2.1} &= 242\ 30\ 57{,}32 \end{aligned}\right\}.$$

Hansen, der dasselbe Beispiel in seinen *Geodät. Untersuchungen* behandelt, hat a. a. O. S. 47 und S. 88 für $\alpha_{2.1}$ 57,30″ und 57,27″; $\alpha_{1.2}$ und $\log s$ (auf Meter reduziert) stimmen mit den hier erhaltenen Resultaten.

§ 16. **Zahlenbeispiel I.** Gegeben:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Königsberg} \quad B_1 = 54^0\ 42'\ 50{,}6'' \\ &\text{Berlin} \quad B_2 = 52\ \ 30\ \ 16{,}7 \end{aligned}\right\} L_{1.2} = +\ 7^0\ 6'.$$

Es ist zunächst nach früheren Rechnungen:

$$\beta_1 = 54^0\ 37'\ 24{,}75639''\ (\text{S. }171) \quad \beta_2 = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''\ (\text{S. }43).$$

Hiermit hat man bei Anwendung 7ziffriger Logarithmen (Tafeln von *Bruhns*) unter Beibehaltung der 8. Ziffer aus den Proportionalteilen nach den *Gleichungen* (1) S. 248:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [8{,}2855261.9\ -10]\cos\frac{\varDelta\lambda}{2} = [8{,}28470\ -10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}7742057.3_n-10]\sin\frac{\varDelta\lambda}{2} = [8{,}56604_n-10] \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}9999191.0\ -10]\cos\frac{\varDelta\lambda}{2} = [9.99909\ -10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}9052782.2\ -10]\sin\frac{\varDelta\lambda}{2} = [8{,}69711\ -10] \end{aligned}\right\}.$$

Die äufsersten rechten Seiten beziehen sich auf $\varDelta\lambda = 7^0\ 6'\ 0''$. Es wird:

$$\alpha_{1.2} = 65^0\ 14'\ 17'' \quad \alpha_{2.1} = 239^0\ 31'\ 33''$$

$$\varDelta\varphi = 4^0\ 45'\ 46'' = 17146'' \quad \log \varDelta\varphi = 4{,}23416\,.$$

Die 3. *Gleichungen* (4) S. 248 geben nun in guter Übereinstimmung:

$$\log \cos \beta_0 = 9{,}72075-10\,.$$

Hiermit aber folgt in 2. Annäherung aus *Formel* (3) S. 248:

$$\varDelta\lambda = L_{1.2} + [9{,}72075-10 + 7{,}52411-10 + 4{,}23416]$$

$$\varDelta\lambda = 7^0\ 6'\ 30{,}131'' \quad \frac{\varDelta\lambda}{2} = 3^0\ 33'\ 15{,}066''$$

$$\log \sin \frac{\varDelta\lambda}{2} = 8{,}7923388.3-10 \quad \log \cos \frac{\varDelta\lambda}{2} = 9{,}9991638.9-10\,.$$

Im vorliegenden Beispiel erlangt man diesen Wert etwas rascher nach den *Formeln* (6) S. 249. Diese geben:

$$\left\{\begin{aligned} \log(\varrho''\mathfrak{a}) &= 2{,}83853 \\ \log\cos\beta_1 &= 9{,}78532-10 \\ \log\cos\beta_2 &= 9{,}76264-10 \\ \log\sin 7^0\ 6' &= 9{,}09202-10 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 1{,}47851$$

$$\varDelta\lambda = 7^0\ 6'\ 30{,}10''\,.$$

Mit $\log \sin 7^0\ 6'\ 30{,}10'' = 9{,}09253-10$ anstatt der 4. Zeile folgt als Summe 1,47902 und damit

$$\varDelta\lambda = 7^0\ 6'\ 30{,}131''.$$

Jetzt wird mit dem 2. Näherungswert für $\varDelta\lambda$ (man mag denselben auf die eine oder andere Art ermittelt haben):

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [8{,}2846900.8\ -10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [8{,}5665445.6_n-10] \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}9990829.9\ -10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [8{,}6976170.5\ -10] \end{aligned}\right\}$$

und hieraus:

$$\varDelta\varphi = 4^0\ 46'\ 1{,}410'' \quad \alpha_{2.1} = 239^0\ 33'\ 0{,}67'' \quad \alpha_{1.2} = 65^0\ 16'\ 9{,}34''\,.$$

Das 1. *System* (4) S. 248 führt nun zu:

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta_0\cos\varphi_1 &= [9{,}9113525-10]\\ \sin\beta_0\sin\varphi_1 &= [9{,}3841825-10]\\ \cos\beta_0 \quad &= [9{,}7208598-10]\end{aligned}\right\}$$

$$\varphi_1 = 16^0\,32'\,38{,}64'' \quad \log\sin\beta_0 = 9{,}9297146-10\,,$$

welcher letztere Wert mit $\cos\beta_0$ zu demselben Winkel gehört, wie es sein mufs.

Man hat jetzt zu den *Formeln* (5) und (3) S. 249 u. 248 in 3. Annäherung, wenn wir zum Zwecke einer anderweiten Benutzung anstatt mit 6ziffrigen (wie hier genügend ist) mit 7ziffrigen Logarithmen rechnen:

$$2\varphi_1 = 33^0\,5'\,17{,}28'' \quad 2\varphi = 37^0\,51'\,18{,}69'' \quad \varDelta\varphi = 17161{,}410''$$

$$\log\tan E = 8{,}8433740-10 \qquad E = 3^0\,59'\,18{,}097''$$

$$\log\tan\frac{E}{2} = 8{,}5418171-10 \qquad \frac{E}{2} = 1\;\;59\;\;39{,}048$$

$$\log k_1 = 7{,}0836342-10 \qquad \log\mathfrak{B}' = 9{,}6204_n-10$$

$$\log\mathfrak{A}' = 7{,}5241069-10 - (2628+2)_{\text{Einh. d. 7. Dec.}} = 7{,}5238439-10$$

$$\left\{\begin{aligned}\log\cos\beta_0 &= 9{,}7208598-10\\ \log\mathfrak{A}' &= 7{,}5238439-10\\ \log\varDelta\varphi &= 4{,}2345530\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\log\cos\beta_0 &= 9{,}7209\;\;-10\\ \log\mathfrak{B}' \quad &= 9{,}6204_n-10\\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}8974\;\;-10\\ \log\sin\varDelta\varphi &= 8{,}9196\;\;-10\end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 1{,}4792567 \qquad \text{Summa} = 8{,}1583_n-10$$

$$\left\{\begin{aligned}L_{1.2} &= 7^0\,6'\;\;0{,}00000''\\ [1{,}4792567] &= +\quad 30{,}14788''\\ [8{,}1583_n-10] &= -\quad\;\; 0{,}01440''\end{aligned}\right.$$

$$\varDelta\lambda = 7^0\,6'\,30{,}13348''\,.$$

Von dem vorstehenden Wert weicht aber der in 2. Annäherung erhaltene nur in der 3. Decimale der Sekunden um 2 Einheiten ab. Man kann daher für die Rechnung mit 7ziffrigen Logarithmen bei den bisherigen Resultaten $\alpha_{1.2}$, $\alpha_{2.1}$ und $\varDelta\varphi$ stehen bleiben. Man hätte sogar die letzte Berechnung von $\varDelta\lambda$ ganz weglassen können, wenn zum voraus bekannt gewesen wäre, dafs $\varDelta\lambda$ in 2. Annäherung bis auf 0,002″ richtig sei. In dieser Beziehung wird der folgende Paragraph Aufschlufs geben.

Zur Berechnung von s erhält man jetzt nach den *Formeln* (7) S. 249 mit

$$\Delta\varphi = 17161{,}410'' \text{ und } 2\varphi = 37^0\,51'\,18{,}69''$$

der Reihe nach:

$$\left\{\begin{array}{l} \log \Delta\varphi = 4{,}2345529.7 \\ \log \frac{b_0}{\varrho''} = 1{,}4887641.5 \end{array}\right.$$
$$\text{Summa} = 5{,}7233171.2$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log b_0 &= 6{,}80319 \\ \log k_1 &= 7{,}08363-10 \\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}89739-10 \\ \log\sin\Delta\varphi &= 8{,}91963-10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} \log\left(-\frac{b_0}{8}\right) &= 5{,}90_n \\ 2\log k_1 &= 4{,}17\ -10 \\ \log\cos 4\varphi &= 9{,}39\ -10 \\ \log\sin 2\Delta\varphi &= 9{,}22\ -10 \end{array}\right.$$
$$\text{Summa} = 2{,}70384 \qquad\qquad \text{Summa} = 8{,}68_n-10$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \log\left(\frac{5}{4}M\right) &= 6{,}735 \\ 2\log k_1 &= 4{,}167-10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} 2\log\sec\frac{E}{2} &= 0{,}0005262.0 \\ [0{,}902] &= \quad +8.0 \end{array}\right.$$
$$\log\left(\frac{5}{4}Mk_1^2\right) = 0{,}902 \qquad \log\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 0{,}0005270.0\,.$$

Dies wird den vorhergefundenen 3 Logarithmensummen hinzugefügt und so erhalten:

$$s = 529473{,}32 + 506{,}26 - 0{,}04 = 529979{,}54^m\,.$$

Die

$$\text{Resultate}\left\{\begin{array}{rl} s &= 529979{,}54^m \\ \alpha_{1.2} &= \ \ 65^0\,16'\,9{,}34'' \\ \alpha_{2.1} &= 239^0\,33'\,0{,}67'' \end{array}\right\}$$

stimmen befriedigend mit der Rechnung S. 244 u. ff. überein.

Um eine noch gröfsere Genauigkeit zu erhalten, wenden wir nun im Folgenden 10ziffrige Logarithmen an.

Es ist mittelst des oben gefundenen Wertes für $\Delta\lambda$:

$$\frac{\Delta\lambda}{2} = 3^0\,33'\,15{,}06674'' \quad \left\{\begin{array}{l} \log\sin\frac{\Delta\lambda}{2} = 8{,}7923388.593-10 \\ \log\cos\frac{\Delta\lambda}{2} = 9{,}9991638.814-10 \end{array}\right.$$

und indem wir wie oben setzen:

$$\beta_1 = 54^0\,37'\,24{,}75639'' \qquad \beta_2 = 52^0\,24'\,43{,}01137'',$$

nach den *Gleichungen* (1) S. 248:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= [8{,}2846900.557\ -10]\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= [8{,}5665446.196_n-10]\\
\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= [9{,}9990829.928\ -10]\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= [8{,}6976170.810\ -10]
\end{aligned}\right\}$$

$$\alpha_{2.1} = 239^0\ 33'\ 0{,}68891'' \qquad \alpha_{1.2} = 65^0\ 16'\ 9{,}36499''$$

$$\left.\begin{aligned}
\log\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= 8{,}6189725.722-10\\
\log\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= 9{,}9996240.975-10
\end{aligned}\right\}\ \frac{\Delta\varphi}{2} = 2^0\ 23'\ 0{,}70512''$$

$$\Delta\varphi = 4^0\ 46'\ 1{,}41024'' = 17161{,}41024''\,.$$

Für E und k_1, sowie 2φ können die Werte der früheren Rechnung beibehalten werden.

Zur Berechnung von s ist:

$$\frac{3}{8}Mk_1^2 = 2 \text{ Einh. d. 7. Dec.} \qquad \left\{\begin{aligned}
\log\Delta\varphi &= 4{,}2345529.731\\
\log\frac{b_0}{\varrho''} &= 1{,}4887641.507
\end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 5{,}7233171.238$$

$$\left\{\begin{aligned}
\log b_0 &= 6{,}8031893\\
\log\left(k_1-\frac{3}{8}k_1^3\right) &= 7{,}0836340-10\\
\log\cos 2\varphi &= 9{,}8973875-10\\
\log\sin 2\Delta\varphi &= 8{,}9196266-10
\end{aligned}\right. \qquad
\left\{\begin{aligned}
\log\left(-\frac{b_0}{8}\right) &= 5{,}9001_n\\
2\log k_1 &= 4{,}1673\ -10\\
\log\cos 4\varphi &= 9{,}3924\ -10\\
\log\sin 2\Delta\varphi &= 9{,}2191\ -10
\end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 2{,}7038374 \qquad\qquad \text{Summa} = 8{,}6789_n-10$$

$$\left\{\begin{aligned}
\log\left(\frac{5}{4}M\right) &= 6{,}73469\\
2\log k_1 &= 4{,}16727-10
\end{aligned}\right. \qquad
\left\{\begin{aligned}
2\log\sec\frac{E}{2} &= \quad 0{,}0005262.058\\
[0{,}90196] &= + \qquad\quad 7.979
\end{aligned}\right.$$

$$\log\left(\frac{5}{4}Mk_1^2\right) = 0{,}90196 \qquad \log\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 0{,}0005270.037$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} [5{,}7238441.275] & = & 529473{,}3769 \\ [2{,}7043644] & =+ & 506{,}2493 \\ [8{,}6794_n-10] & =- & 0{,}0478 \\ \text{Glied mit } \sin 3\Delta\varphi & = & 0 \end{array}\right.$$

$$s = 529979{,}5784$$

$$\text{Resultat:}\left\{\begin{array}{l} s = 529979{,}5784 \\ \log s = 5{,}7242591.353 \\ \alpha_{1.2} = 65^0\, 16'\, 9{,}36499'' \\ \alpha_{2.1} = 239^0\, 33'\, 0{,}68891''. \end{array}\right.$$

Diese Zahlen sind nicht in völliger Übereinstimmung mit der Rechnung S. 244 u. ff., weil dort $\alpha_{1.2}$ um 0,0003″ zu grofs angenommen ist. Zunächst ist dort auch $\alpha_{2.1}$ entsprechend gröfser um 0,0003″. Dem gröfsern Azimut daselbst gehört ferner eine Verkleinerung von B_2 um 0,00002″ und eine Vergröfserung des absoluten Betrags der Längendifferenz um 0,00002″ zu, welche letztere wenigstens in der That nach S. 247 vorhanden ist.

§ 17. **Die Konvergenz der Annäherungsrechnungen bei Lösung der Aufgabe des § 13.** Wir betrachten zunächst die Methode der ausschliefslichen Anwendung der *Gaufs*ischen Gleichungen. Dieselbe setzt in 1. Annäherung $L_{1.2}$ für $\Delta\lambda$ und hierauf in 2. Annäherung $\Delta\lambda = L_{1.2} + \mathfrak{a}\cos\beta_0'\,\Delta\varphi'$, wobei $\cos\beta_0'\,\Delta\varphi'$ das Ergebnis der 1. Annäherungsrechnung für $\cos\beta_0\Delta\varphi$ bezeichnet. Subtrahiert man nun diesen 2. Näherungswert von dem strengen Wert

$$L_{1.2} + \mathfrak{a}\cos\beta_0\left\{\Delta\varphi\left(1-\frac{1}{2}k_1\right) - \frac{1}{2}k_1\cos 2\varphi\sin\Delta\varphi + \cdots\right\},$$

in welchem Ausdruck wir in der Parenthese k_1^2 vernachlässigt haben, so folgt als Fehler des 2. Näherungswertes im Sinne einer Verbesserung:

$$\mathfrak{a}\left\{(\cos\beta_0\Delta\varphi - \cos\beta_0'\Delta\varphi') - \frac{1}{2}k_1\cos\beta_0(\Delta\varphi + \sin\Delta\varphi\cos 2\varphi) + \cdots\right\}. \quad (1)$$

Indem wir uns jetzt auf kleine Distanzen beschränken, können wir im 1. Teil von (1) für $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi'$ die Sinus dieser Winkel, im 2. Teil aber für $\sin\Delta\varphi$ einfach $\Delta\varphi$ setzen. Da nun (vergl. S. 249 die Entwicklung zu (6)):

$$\cos\beta_0\sin\Delta\varphi - \cos\beta_0'\sin\Delta\varphi' = \cos\beta_1\cos\beta_2(\sin\Delta\lambda - \sin L_{1.2})$$

ist, da ferner wegen $L_{1.2} = \Delta\lambda - \mathfrak{a}\cos\beta_0\,\Delta\varphi + \cdots$ für kleine Distanzen in hinreichender Annäherung

$$\sin\Delta\lambda - \sin L_{1.2} = \mathfrak{a}\cos\beta_0\cos\Delta\lambda\,\Delta\varphi + \cdots$$

gesetzt werden kann, überdies aber mit Rücksicht auf die 1. Gleichungen (4) S. 248 und die Relation $1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi$, ebenfalls ausreichend genau

$$\frac{1}{2} k_1 \cos\beta_0 \,\varDelta\varphi\,(1 + \cos 2\varphi) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{k} \cos\beta_0 \sin\beta_1 \sin\beta_2 \,\varDelta\varphi + \cdots$$

wird, so läfst sich (1) für kleine Distanzen auf die Form bringen:

$$\mathfrak{k}^2 \cos\beta_0 \,\varDelta\varphi \left(\cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\varDelta\lambda - \frac{1}{2}\sin\beta_1 \sin\beta_2\right) + \cdots. \quad (2)$$

Beachtet man endlich noch, dafs $\cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\varDelta\lambda + \sin\beta_1 \sin\beta_2 = \cos\varDelta\varphi$ ist, so folgt einfacher:

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{k}^2 \cos\beta_0 \,\varDelta\varphi \left(\cos\varDelta\varphi - \frac{3}{2}\sin\beta_1 \sin\beta_2\right) + \cdots \\ \log\mathfrak{k}^2 = 5{,}048 - 10. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Bei der Ableitung dieser Formel sind aufser Gliedern mit $\mathfrak{k}^3$ insbesondere solche mit $\mathfrak{k}^2\varDelta\varphi^3$ vernachlässigt, und es wäre daher konsequent, auch noch für $\cos\varDelta\varphi$ einfach 1 zu setzen. Indessen gewinnt durch Beibehaltung von $\cos\varDelta\varphi$ die Schärfe des Ausdrucks, namentlich in höhern Breiten, weil hier die bisher vernachlässigten Glieder der Ordnung $\mathfrak{k}^2\varDelta\varphi^3$ sich erheblich verkleinern.*)

Man erkennt aus der Gestalt des Ausdrucks (3), dafs die Konvergenz der Annäherungsrechnung hauptsächlich von dem Betrage der reduzierten Breite bedingt ist. Setzt man, um dies weiter zu verfolgen, $\cos\beta_0 = \cos\beta \sin\alpha + \cdots$, worin β das arithmetische Mittel von β_1 und β_2, und α das arithmetische Mittel von $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$—180° bedeutet, setzt man aufserdem $\cos\varDelta\varphi = 1$, so geht (3) über in

$$\mathfrak{k}^2 \,\varDelta\varphi \sin\alpha \,.\, \cos\beta \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\beta\right) + \cdots. \quad (4)$$

Der Faktor $\cos\beta\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\beta\right)$ ist für $\beta = 0$ gleich 1, für $\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ d. i. für $\beta = \pm 55^0$ und ebenso für $\beta = \pm 90^0$ gleich null und hat für $\beta = 0$, sowie für $\sin\beta = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$ d. i. für $\beta = \pm 70^0$ Maxima.

Das letztere, kleinere Maximum beträgt $-\frac{1}{9}$. Für $\beta = 48^0$ ist der Faktor $+\frac{1}{9}$.

*) Diese Glieder lassen sich in nachstehenden Ausdruck zusammenziehen, $\varDelta\varphi$ als Arcus genommen:

$$\frac{1}{12}\,\varrho''\,\mathfrak{k}^2 \cos\beta_0 \,\varDelta\varphi^3 \left\{\cos^2\beta\,(1 - 6\sin\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1}) - 1\right\}$$

Es ist daher nur für die Zonen nördlich von $\beta = 48^0$ und südlich von $\beta = -48^0$ bis zu den Polen die Konvergenz der Annäherungsrechnung eine ungewöhnlich starke, indem hier der Fehler des 2. Näherungswertes von $\varDelta\lambda$ kleiner als $\varDelta\varphi : 800000$ bleibt.

Im allgemeinen geht aber der Fehler bis $\varDelta\varphi : 90000$, sodafs er selbst für sehr kleine Entfernungen nicht zu vernachlässigen sein wird.

Der Ausdruck (3) kann jedoch dann dazu dienen, den 2. Näherungswert für $\varDelta\lambda$ sofort in einen in der Regel als definitiv zu betrachtenden Wert überzuführen.

Zahlenbeispiel V S. 253 giebt zu dem Ausdruck (3):

$$\cos\varDelta\varphi = 0{,}750 \qquad \frac{3}{2}\sin\beta_1 \sin\beta_2 = 0{,}918$$

$$\log\varDelta\varphi = 5{,}173 \qquad \log\cos\beta_0 = 9{,}739 - 10$$

Verbesserung von ($\varDelta\lambda = 69^0\,7'\,33{,}00''$) gleich $-0{,}15''$.

Der genaue Wert ist $-0{,}13''$; die Formel (3) pafst hiernach trotz der Gröfse der Distanz noch ganz leidlich.

Zahlenbeispiel I S. 256 giebt zu dem Ausdruck (3):

$$\cos\varDelta\varphi = 0{,}997 \qquad \frac{3}{2}\sin\beta_1 \sin\beta_2 = 0{,}969$$

$$\log\varDelta\varphi = 4{,}234 \qquad \log\cos\beta_0 = 9{,}721 - 10$$

Verbesserung von ($\varDelta\lambda = 7^0\,6'\,30{,}131''$) gleich $+\,0{,}0029''$.

Rechnet man aber S. 256 u. 257 in 1. Annäherung 7ziffrig anstatt 5ziffrig, so folgt als 2. Näherungswert für $\varDelta\lambda$ $7^0\,6'\,30{,}1307''$; dazu $0{,}0029''$, giebt bis auf $0{,}0001''$ den strengen Wert von S. 258.

§ 18. **Fortsetzung: 2. Methode.** Wenden wir bei Beginn der Annäherungsrechnungen die Formeln (6) S. 249 an, so entspricht der 2. Näherungswert für $\varDelta\lambda$ bis auf einen unerheblichen Fehler der Gleichung

$$\varDelta\lambda = L_{1.2} + \mathfrak{a}\cos\beta_1\cos\beta_2\sin\varDelta\lambda.$$

Vergleicht man dies mit dem oben angegebenen strengen Wert, so ergiebt sich als Fehler dieses Näherungswertes im Sinne einer Verbesserung:

$$\mathfrak{a}\cos\beta_0\left\{\varDelta\varphi - \frac{1}{2}k_1(\varDelta\varphi + \sin\varDelta\varphi\cos 2\varphi)\right\} - \mathfrak{a}\cos\beta_1\cos\beta_2\sin\varDelta\lambda + \cdots (1)$$

Setzen wir hierin

$$\cos\beta_0\varDelta\varphi = \cos\beta_0\sin\varDelta\varphi + \frac{1}{6}\cos\beta_0\sin^3\varDelta\varphi + \cdots$$

$$= \cos\beta_1\cos\beta_2\sin\varDelta\lambda + \frac{1}{6}\cos\beta_0\,\varDelta\varphi\sin^2\varDelta\varphi + \cdots$$

und schreiben für $k_1 \Delta\varphi$ im 2. Teile der geschlungenen Parenthese $k_1 \sin \Delta\varphi$, so geht (1) nach weiterer Reduktion über in:

$$\mathfrak{a} \cos \beta_0 \Delta\varphi \left(\frac{1}{6} \sin^2 \Delta\varphi - \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \beta_1 \sin \beta_2\right) + \cdots . \qquad (2)$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (3) auf Seite 262 spricht für $\Delta\varphi < \frac{1}{7} \cos \beta$ zu Gunsten der 2. Methode. Überschreitet aber $\Delta\varphi$ diesen Betrag, so wächst der Ausdruck (2) weit rascher als jener Ausdruck (3).

Für nicht kleine Distanzen ist daher die 1. Methode (Anwendung der *Gaufs*ischen Gleichungen) der 2. Methode vorzuziehen.

In der That ist im Falle des *Beispiels* V S. 253 der nach der letzteren bestimmte 2. Näherungswert für $\Delta\lambda$ um 23″ fehlerhaft, nämlich gleich 69° 7′ 10″, 0 anstatt 32″, 9.

Für Seiten mefsbarer Dreiecke kann nach Formel (2), indem $\frac{1}{6} \sin^2 \Delta\varphi$ gegen $\frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \beta_1 \sin \beta_2$ zurücktritt, eine stärkere Annäherung als durch (6) S. 249 dadurch erzielt werden, dafs man $\Delta\lambda$ aus der Gleichung

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\lambda} = \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} + \varrho'' \mathfrak{a} \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \Delta\lambda \left(1 - \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin \beta_1 \sin \beta_2\right) \qquad (3)$$

bestimmt. Dieser Wert ist sodann in die Formeln (1) S. 248 einzuführen.

Albrecht hat in Nr. 2294 der *Astronom. Nachr.* Bd. 96 S. 211 (1880) seine Methode ausführlich behandelt und den Grad ihrer Annäherung bestimmt.

§ 19. **Die Aufgabe des § 13 im allgemeinen.** Im § 13 S. 248 wurde vorausgesetzt, dafs $\Delta\varphi < \pi$ sei und dafs die Annäherungsrechnung auch unbedingt zur Lösung führen müsse. Allein das erstere ist eine Beschränkung und das letztere tritt nicht immer ein.

Zunächst sieht man sofort, dafs die Gleichungen (1) S. 248 aufser von einem Wert $\Delta\varphi < \pi$, den wir mit $\Delta\varphi'$ bezeichnen wollen, noch von unendlich vielen anderen Werten, die zwischen π und 2π, 2π und 3π, u. s. f. liegen, befriedigt werden. Jedem derselben entspricht je eine besondere geodätische Linie. Die kürzeste Verbindung gehört aber zu $\Delta\varphi'$, was für mäfsig grofse Distanzen unmittelbar klar ist, aber sich auch als allgemein gültig im 7. Kapitel bei der Untersuchung des Laufes der geodätischen Linien erweisen wird.

An dieser Stelle findet auch derjenige Fall seine Erledigung, für welchen die Methoden des § 13 mehr oder weniger versagen. Es tritt dies nämlich ein bei nahezu diametraler Lage der Punkte. Wenn man hier in 1. Annäherung $L_{1.2}$ für $\Delta\lambda$ setzt, so begeht man nahezu den Fehler 180° $\mathfrak{a} \cos \beta_0$ d. i. 0,6° $\cos \beta_0$, indem $\Delta\varphi$ in Gradmafs nahezu 180° beträgt. Es läfst sich aber leicht und zwar am be-

quemsten geometrisch erkennen, dafs bei nahezu diametraler Lage der Hilfspunkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ auf der Kugel (wenn insbesondere $\beta_1 + \beta_2$ von der Ordnung $0{,}6^0 \cos \beta_0$ ist) eine geringe Verschiebung des einen derselben in geographischer Länge die Lage des sie verbindenden gröfsten Kreises d. h. den aus der Annäherungsrechnung hervorgehenden Wert $\cos \beta_0$ stark beeinflufst. In extremen Fällen, wie z. B. für $\beta_1 = \beta_2 =$ null, kann sogar von einer successiven Annäherung fortgesetzter Rechnungen nicht mehr die Rede sein.

Wie man nun hier im allgemeinen einen wirklichen 1. Näherungswert für $\Delta \lambda$ ableitet, wird a. a. O. gezeigt. Mit Benutzung dieses letztern kann dann nach § 13 weiter gerechnet werden.

Hansen hat im 2. Abschnitt seiner *Geodätischen Untersuchungen* die Aufgabe des § 13 S. 247 (wie zahlreiche andere) mit Hilfe des vertikalen Schnitts gelöst, der von einem der beiden Punkte nach dem andern geführt werden kann. Es erscheint uns diese Methode aber als keine besonders vorteilhafte.

Eine direkte ist sie insofern nicht, als bei grofsen Distanzen die Resultate, welche aus der Reduktion der Angaben für den vertikalen Schnitt auf solche für die geodätische Linie hervorgehen, immer noch durch Differentialformeln korrigiert werden müssen.

Aufserdem werden die Formeln unbrauchbar für nahezu diametrale Punkte, wie die Betrachtung der (52) S. 60 a. a. O. unter Voraussetzung von χ nahezu 180^0 zeigt. (Nur irrtümlich ist daselbst von *Hansen* die Allgemeingültigkeit der aus Reihenentwicklungen abgeleiteten Formeln behauptet.)

Endlich ist der Formelapparat bei *Hansen* weniger einfach, als der hier in § 13 gegebene, der noch den andern auch nicht zu unterschätzenden Vorteil hat, sich wenig von dem für die Aufgabe des § 9 S. 232 zu unterscheiden.

Zur Vergleichung können die Beispiele IV und V S. 250 u. 253 dienen, die *Hansen* S. 87 u. ff. a. a. O. behandelt.

---

6. Kapitel.

Differentialformeln und Reihenentwicklungen für die geodätische Linie.

§ 1. **Drehung einer geodätischen Linie $P_1 P_2$ um einen ihrer Endpunkte.** Wir denken uns die Linie $P_1 P_2$ von der konstanten Länge s um den Punkt P_1 gedreht. Nach S. 220 (6) hat man

$$s = a_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}\, d\varphi, \tag{1}$$

wobei β als Funktion von φ mit Rücksicht auf die feste Lage von P_1 durch die Formeln gegeben ist:

$$\sin \beta = \sin \beta_0 \cos \varphi \qquad \cos \beta_0 = \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}. \tag{2}$$

Ändert sich $\alpha_{1.2}$ um den differentialen Betrag $\delta\alpha_{1.2}$, so ändert sich, wie die (2) zeigen, β_0 und infolge dessen bei konstantem Werte von φ auch β, außerdem aber φ_1, weil β_1 konstant bleibt. Diese Änderungen haben endlich noch nach Maßgabe von (1) eine Änderung von φ_2 zur Folge.

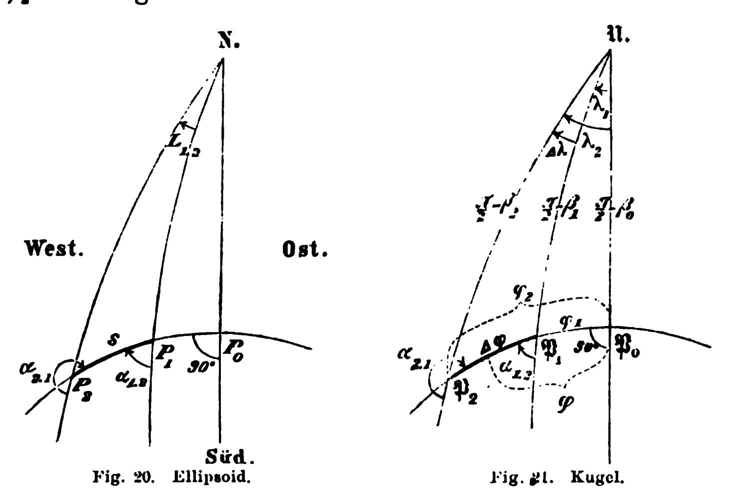


Fig. 20. Ellipsoid. Fig. 21. Kugel.

Bezeichnen wir die Änderungen durch Vorsetzen eines δ an die betreffende Variable und beachten, daſs $\delta s =$ null sein soll, so giebt (1):

$$0 = w_2 \delta \varphi_2 - w_1 \delta \varphi_1 + c^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos\beta \sin\beta \, \delta\beta}{w} \, d\varphi, \tag{3}$$

wobei wie früher w im allgemeinen zur Abkürzung für $\sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}$ dient. $\delta\beta$ ist in Bezug auf konstanten Wert von φ zu verstehen. Hierzu geben die (2):

$$\delta\beta = \sec\beta \cos\beta_0 \cos\varphi \, \delta\beta_0$$
$$\delta\beta_0 = -\csc\beta_0 \cos\beta_1 \cos\alpha_{1.2} \, \delta\alpha_{1.2}.$$

Betrachtet man nun die Relationen der sphärischen Fig. 21 [vergl. S. 248 (4)], so findet sich aus Vorstehendem:

$$\left.\begin{aligned} \delta\beta_0 &= -\sin\varphi_1 \, \delta\alpha_{1.2} \\ \delta\beta &= -\sec\beta \cos\beta_0 \cos\varphi \sin\varphi_1 \, \delta\alpha_{1.2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dies führen wir in (3) ein und erhalten, da auch $\sin\beta = \sin\beta_0 \cos\varphi$ ist:

$$\left.\begin{aligned} 0 = w_2 \delta \varDelta\varphi + (w_2 - w_1)\delta\varphi_1 - e^2 \sin\beta_0 \cos\beta_0 \sin\varphi_1 J \delta\alpha_{1.2} \\ \text{für} \qquad \delta\varDelta\varphi = \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und

$$J = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^2\varphi}{w}\, d\varphi. \tag{6}$$

Drückt man in (5) $\delta\varphi_1$ durch $\delta\alpha_{1.2}$ aus, so giebt diese Gleichung ein Mittel zur Bestimmung von $\delta\Delta\varphi$, und man kann weiterhin mittelst des sphärischen Dreiecks $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ Fig. 21 die zu $\delta\Delta\varphi$ und $\delta\alpha_{1.2}$ gehörigen Änderungen von β_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ finden. Zunächst folgt aus $\sin\beta_1 = \sin\beta_0 \cos\varphi_1$ durch Differentiation und mit Rücksicht auf die 1. Gleichung (4):

$$\sin\beta_0 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 = \cos\beta_0 \cos\varphi_1 \delta\beta_0,$$

oder

$$\delta\varphi_1 = -\cot\beta_0 \cos\varphi_1 \delta\alpha_{1.2}.$$

Hiermit giebt die 1. Gleichung (5):

$$\delta\Delta\varphi = \Big\{(w_2 - w_1)\cot\beta_0\cos\varphi_1 + c^2\sin\beta_0\cos\beta_0\sin\varphi_1 J\Big\}\frac{\delta\alpha_{1.2}}{w_2}. \tag{7}$$

Zur Bestimmung von $\delta\beta_2$ und $\delta\Delta\lambda$ hat man aus der sphärischen Fig. 22, in welcher $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_2' = \sin\Delta\varphi\alpha\,\delta\alpha_{1.2}$ und $\mathfrak{P}_2'\mathfrak{P}_3' = \delta\Delta\varphi$ ist, direkt durch Projektion von $\mathfrak{P}_3'$ auf $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_2$:

$$\delta\beta_2 = \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q} \tag{8}$$
$$= \cos\alpha_{2.1}\delta\Delta\varphi - \sin\Delta\varphi\sin\alpha_{2.1}\delta\alpha_{1.2}$$

und

$$\cos\beta_2\delta\Delta\lambda = \mathfrak{P}_3'\mathfrak{Q} \tag{9}$$
$$= -\sin\alpha_{2.1}\delta\Delta\varphi - \sin\Delta\varphi\cos\alpha_{2.1}\delta\alpha_{1.2}.$$

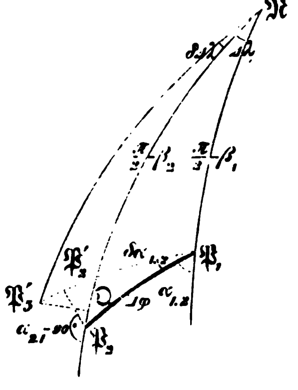


Fig. 22.

Führen wir (7) in (8) und (9) ein, so ergiebt sich:

$$\delta\beta_2 = \left\{\begin{array}{c} w_2(\cot\beta_0\cos\varphi_1\cos\alpha_{2.1} - \sin\Delta\varphi\sin\alpha_{2.1}) \\ -w_1\cot\beta_0\cos\varphi_1\cos\alpha_{2.1} + c^2\sin\beta_0\cos\beta_0\sin\varphi_1\cos\alpha_{2.1}J \end{array}\right\}\frac{\delta\alpha_{1.2}}{w_2}$$

und

$$\delta\Delta\lambda = \left\{\begin{array}{c} -w_2(\cot\beta_0\cos\varphi_1\sin\alpha_{2.1} + \sin\Delta\varphi\cos\alpha_{2.1}) \\ +w_1\cot\beta_0\cos\varphi_1\sin\alpha_{2.1} - c^2\sin\beta_0\cos\beta_0\sin\varphi_1\sin\alpha_{2.1}J \end{array}\right\}\frac{\delta\alpha_{1.2}}{w_2\cos\beta_2}. \tag{10}$$

Multipliziert man die Formel für $\delta\beta_2$ mit $\tan\beta_0\sin\varphi_2\tan\alpha_{2.1}$, d. i. wegen $\tan\beta_0\sin\varphi_2 = \cot\alpha_{2.1}$ soviel wie 1, so geht sie über in:

$$\delta\beta_2 = -\frac{\mathfrak{m}\sin\alpha_{2.1}}{a_0 w_2}\,\delta\alpha_{1.2}, \tag{11}$$

wobei gesetzt ist:

$$\mathfrak{m} = a_0(w_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - w_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - e^2\sin^2\beta_0\sin\varphi_1\sin\varphi_2 J). \tag{12}$$

Zur Bestimmung von $\delta L_{1.2}$ hat man zunächst die aus (2) und (3) S. 229 folgende Gleichung zu beachten:

$$L_{1.2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}\, d\lambda. \tag{13}$$

Hierzu ist β als Funktion von λ mit Rücksicht auf die feste Lage von P_1 durch die Relationen gegeben:

$$\tan\beta = \tan\beta_0\cos\lambda \qquad \cos\beta_0 = \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2}. \tag{14}$$

Die Differentiation von (13) führt zu:

$$\delta L_{1.2} = w_2\delta\lambda_2 - w_1\delta\lambda_1 + e^2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\cos\beta\sin\beta\,\delta\beta}{w}\,d\lambda, \tag{15}$$

wobei $\delta\beta$ in Bezug auf konstanten Wert von λ zu verstehen ist. Es wird hiermit nach (14) und mit Rücksicht auf die 1. Formel (4), welche auch hier gilt:

$$\delta\beta = \cos^2\beta\sec^2\beta_0\cos\lambda\,\delta\beta_0 = -\cos^2\beta\sec^2\beta_0\cos\lambda\sin\varphi_1\delta\alpha_{1.2}.$$

Dies setzen wir in (15) ein und transformieren zugleich das Integral mittelst der Relationen:

$$d\lambda = \cos\beta_0\sec^2\beta\,d\varphi \quad \cos\lambda = \tan\beta\cot\beta_0 \quad \sin\beta = \sin\beta_0\cos\varphi,$$

sodafs es wieder auf φ als Variable bezogen wird. Damit ergiebt sich:

$$\delta L_{1.2} = w_2\delta\varDelta\lambda + (w_2 - w_1)\,\delta\lambda_1 - e^2\sin\beta_0\sin\varphi_1 J\delta\alpha_{1.2}. \tag{16}$$

Für $\delta\lambda_1$ folgt aus $\tan\beta_1 = \tan\beta_0\cos\lambda_1$ ohne Schwierigkeit nach und nach:

$$\tan\beta_0\sin\lambda_1\delta\lambda_1 = \sec^2\beta_0\cos\lambda_1\delta\beta_0 = -\sec^2\beta_0\cos\lambda_1\sin\varphi_1\delta\alpha_{1.2},$$

$$\delta\lambda_1 = -\cos\varphi_1\csc\beta_0\delta\alpha_{1.2}.$$

Wir führen dies, sowie $\delta\varDelta\lambda$ aus (10) in (16) ein und erhalten nach einiger Reduktion, wobei die Formeln:

$$\cot\beta_0 = \tan\alpha_{2.1}\sin\varphi_2 \quad \text{und} \quad \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1} = -\sin\beta_0\sin\varphi_2$$

anzuwenden sind, schliefslich:

$$\delta L_{1.2} = -\frac{\mathfrak{m}}{a_0} \sec \beta_2 \cos \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2}. \tag{17}$$

§ 2. **Die reduzierte Länge und der geodätische Kreis.** Nennt man das von P_2 bei der Drehung der Linie $P_1 P_2$ beschriebene Bogendifferential für den Augenblick u und sein Azimut χ, so ist

$$u \cos \chi = -a_0 w_2 \delta \beta_2 \text{ und } u \sin \chi = a_0 \cos \beta_2 \, \delta L_{1.2}, \tag{1}$$

weil das Element des Meridianbogens allgemein nach (1) S. 55 gleich $a_0 w \delta \beta$ ist und der Radius des Parallelkreises für P_2 gleich $a_0 \cos \beta_2$ wird, S. 40.

Führt man (11) und (17) des vorigen Paragraphen ein, so geben die (1):

$$u \cos \chi = + \mathfrak{m} \sin \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2} = \mathfrak{m} \delta \alpha_{1.2} \cdot \cos (\alpha_{2.1} - 90^0)$$
$$u \sin \chi = - \mathfrak{m} \cos \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2} = \mathfrak{m} \delta \alpha_{1.2} \cdot \sin (\alpha_{2.1} - 90^0),$$

woraus man erkennt, dafs

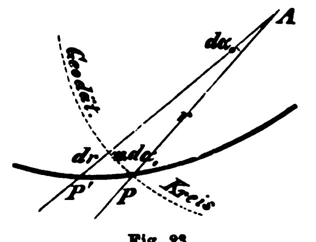
$$\left.\begin{aligned} u &= \mathfrak{m} \delta \alpha_{1.2} \\ \chi &= \alpha_{2.1} - 90^0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hiernach steht das von P_2 beschriebene Bogendifferential $\mathfrak{m} \delta \alpha_{1.2}$ *normal* zur geodätischen Linie $P_1 P_2$.

Man nennt die von P_2 beschriebene Kurve einen *geodätischen Kreis* und $\mathfrak{m}$ die *reduzierte Länge* der geodätischen Linie $P_1 P_2$.

Diese Bezeichnungen führt *Christoffel* S. 130 u. 131 seiner Schrift: *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke* ein (Abh. der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1868). Zu dem Satze selbst aber, welcher der Bezeichnung *geodätischer Kreis* zu grunde liegt, und zwar als für jede krumme Fläche gültig, wurde *Gaufs* in seinen *Disquisitiones generales circa superficies curvas* 1828 geführt.

Nach dem Vorstehenden lassen sich mittelst geodätischer Linien und geodätischer Kreise Systeme von *Polarkoordinaten* konstruieren. Ist A Zentrum eines solchen Systems, auf welches eine Kurve bezogen wird, und ist ds ein Bogenelement PP' derselben, so hat man ähnlich wie bei ebenen Polarkoordinaten



$$ds^2 = dr^2 + \mathfrak{m}_r^2 d\alpha_0^2, \tag{3}$$

Fig. 23.

wenn r den geodätischen Radiusvektor AP, $\mathfrak{m}_r$ dessen reduzierte Länge und $d\alpha_0$ den Winkel zwischen r und $r + dr$ bezeichnen.

§ 3. **Geometrische Veranschaulichung zu dem Satze vom geodätischen Kreis.** In Fig. 24 bedeutet P_1P_2 zunächst eine nach *beliebigem* Gesetz gebildete Kurve und P_1P_2' eine unendlich benachbarte, die aus jener durch Drehung um P_1 hervorgegangen ist. In zwei unendlich benachbarten Punkten P und Q ziehen wir Linienelemente normal zu P_1P_2 bis an die Kurve P_1P_2'. Dadurch entsteht ein unendlich kleines Viereck $PQP'Q'$, welches wir als eben behandeln dürfen, weil seine Projektion auf eine mittlere Tangentialebene der Fläche $PQP'Q'$ sich von dem Viereck selbst in Seiten und Winkeln nur um unendlich kleine Beträge von der 3. bezw. der 2. Ordnung unterscheidet, wie aus der Gröfsenordnung der Neigung der Teile des Vierecks gegen die Tangentialebene hervorgeht.

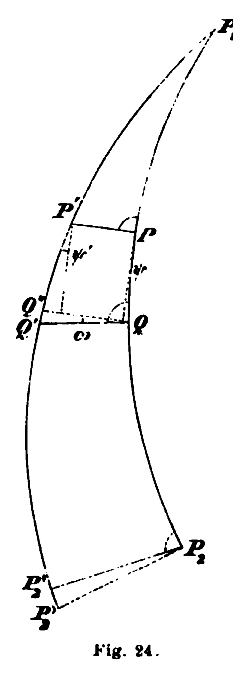


Fig. 24.

Es ist nun wichtig zu beachten, dafs PP' und QQ' im allgemeinen ebensowenig wie PQ und $P'Q'$ parallel sind, sondern wie diese eine unendlich kleine Neigung gegen einander haben. Die unendlich kleine Krümmung des Linienelements PQ hat zwar auf seine Länge keinen merklichen Einflufs, wohl aber äufsert sie sich darin, dafs in P und Q die Richtungen der Kurve P_1P_2 unendlich wenig verschieden sind; mithin werden auch PP' und QQ' im allgemeinen vom Parallelismus abweichen.

Ist nun QQ'' parallel zu PP' und denkt man sich von P und P' Normalen zu QQ'' gelegt, so wird mit Rücksicht auf die Figur:

$$P'Q' = P'Q'' + Q''Q' = PQ \cos\psi \sec\psi' + QQ'.\omega\,.$$

Wendet man diese Formel auf alle Linienelemente von P_1 bis P_2, die wir uns gleich grofs genommen denken, an, so folgt, wenn P_2' den Punkt auf P_1P_2' bedeutet, welcher in der von P_2 aus normal zu P_1P_2 gezogenen Linie liegt:

$$P_1P_2' = P_1P_2\,.\cos\psi_m \sec\psi_m' + \Sigma\,(QQ'.\omega).$$

Hierin ist ψ_m ein Durchschnittswert aller ψ und ψ_m' ein solcher aller ψ'. Da nun die ψ unendlich klein sind, weichen $\cos\psi_m$ und $\sec\psi_m'$ nur um unendlich kleine Gröfsen der 2. Ordnung von der Einheit ab, und es ist $P_1P_2\,.\cos\psi_m \sec\psi_m' = P_1P_2$ bis auf eine im Verhältnis zu P_1P_2 unendlich kleine Gröfse der 2. Ordnung.

Was nun $\Sigma(QQ'\,.\,\omega)$ anlangt, so kann es nicht zweifelhaft sein,

dafs dies im allgemeinen eine Summe unendlich kleiner Gröfsen 2. Ordnung und daher unendlich klein von der 1. Ordnung sein wird. Es steht nämlich die Schmiegungsebene einer Curve $P_1 P_2$ im allgemeinen schief zur Oberfläche; daher geht, wie man leicht erkennen kann, ein endlicher Teil der Krümmung des Linienelements PQ in Divergenz von PP' und QQ' über, sodafs ω unendlich klein von der 1. Ordnung ist und nur dann, wenn die Schmiegungsebene normal zur Oberfläche ist, wird ω null oder doch unendlich klein von höherer als der 1. Ordnung.

Hieraus geht hervor, dafs *nur* bei der geodätischen Linie in allen Fällen jene Summe weniger als eine unendlich kleine Gröfse 1. Ordnung beträgt und dafs daher nur allgemein bei der geodätischen Linie bis auf unendlich kleine Gröfsen von höherer als der 1. Ordnung $P_1 P_2 = P_1 P_2'$ gesetzt werden kann. Bei anderen Linien wird jene Summe nur in einzelnen Fällen null sein können, indem streckenweise die Produkte $QQ' . \omega$ sich aufheben.

Man darf nun hieraus weiter in der Regel den Schlufs ziehen, dafs bei der Drehung einer geodätischen Linie $P_1 P_2$ um den einen Endpunkt P_1 der andere Endpunkt P_2 eine zu $P_1 P_2$ normale Bahn beschreibt. Denn wenn bei der unendlich kleinen Drehung P_2 nach P_2' gelangt, so weicht P_2' von P_2' nur um eine unendlich kleine Gröfse höherer Ordnung ab, welche gegen die unendlich kleinen Gröfsen 1. Ordnung $P_2 P_2'$ und $P_2 P_2'$ nicht in betracht kommt — oder mit anderen Worten: In dem unendlich kleinen geradlinigen Dreieck $P_2 P_2' P_2'$ ist der Winkel bei P_2 unendlich klein.

Es kann allerdings der Fall eintreten, dafs $P_2 P_2'$ selbst nur von höherer als der 1. Ordnung ist, obgleich der Drehungswinkel bei P_1 und die Verschiebungen der Punkte P zwischen P_1 und P_2 im allgemeinen von der 1. Ordnung sind. Alsdann ist $\mathfrak{m} = 0$ und es steht der geodätische Kreis an der betreffenden Stelle nicht mehr notwendig normal zur geodätischen Linie. Jedoch ist die Ausdehnung einer solchen Stelle eben unendlich klein, sodafs sie im Endlichen keine Ausnahme bildet.

§ 4. **Die geodätische Linie ist die Kürzeste.** Wie früher auf der Kugel Fig. 3 S. 69 gebildet wurde, ebenso können wir jetzt auf dem Rotationsellipsoid eine Figur in der Weise bilden, dafs wir eine geodätische Linie $P_0 P_n$ um einen ihrer Endpunkte drehen und dabei von Zwischenpunkten unendlich benachbarte geodätische Kreise beschreiben lassen. Wie früher sieht man sofort, dafs eine beliebige Linie $P_0 P_1' P_2' \ldots P_n$ länger als die geodätische Linie $P_0 P_1 P_2 \ldots P_n$, sein mufs.

Die Beweisführung ist dieselbe wie S. 69 für die Kugel im Anschlufs an Fig. 3. Nur bedeuten die kleinen Kugelkreise hier geodätische Kreise.

Sie gilt aber nur unter der Voraussetzung, dafs der geodätische Kreis des Endpunktes P_n in seinem ganzen Verlaufe keine geodätischen Kreise schneidet, welche mit einem kleineren Abstand vom Zentrum P_0 beschrieben sind. Denn nur alsdann kann man sicher keine Linien ziehen, die kürzer als die betrachtete geodätische sind.

Solche Durchschnitte entstehen auf dem Rotationsellipsoid, sobald die Länge der geodätischen Linie so bedeutend wird, dafs sie um die Oberfläche mehr als halb herumreicht. Die hier stattfindenden Verhältnisse werden im 7. Kapitel untersucht werden.

Dafs die geodätische Linie nicht notwendig auch die kürzeste Verbindung der Endpunkte ist, folgt überdies schon aus den Angaben S. 264, wonach zwischen 2 Punkten unendlich viele geodätische Verbindungen existieren. Nicht alle aber können kürzeste Linien sein: In der Regel existiert nur eine Kürzeste; in manchen Fällen sind mehrere gleichlange Kürzeste vorhanden.

Dagegen ist jede Kürzeste eine geodätische Linie; denn man kann jede Kürzeste auf verschiedene Art in so kleine Teile teilen, dafs für jeden einzelnen derselben das Zusammenfallen mit der kürzesten geodätischen Linie zwischen den Endpunkten des betreffenden Teils zweifellos ist — bei gehöriger Beschränkung der Länge blieb ja in der Beweisführung mit Fig. 3 kein Zweifel, dafs die geodätische Linie zugleich kürzeste Linie ist, was denn auch notwendig umgekehrt gilt. Läfst man nun die Teile über einander greifen, so zeigt sich evident, dafs alle einzelnen geodätischen Teillinien derselben geodätischen Linie angehören müssen und die Kürzeste also eine geodätische Linie ist. (Vergl. auch *Zeitschr. f. Vermessungswesen* 1880 Augustheft.)

Um zu zeigen, dafs die Kürzeste und die kürzeste Geodätische zwischen 2 Punkten zusammenfallen, bedient man sich in der Regel der Rechnung, indem man mittelst des Variationskalküls die Gleichung der Kürzesten herstellt und sie mit der Gleichung der Geodätischen, die man mittelst der Bedingung *Schmiegungsebene normal zur Fläche* ableiten kann, vergleicht.

In Bezug auf die Kürzeste lehrt die Variationsrechnung zugleich die Existenz der geodätischen Kreise (*Christoffel* a. a. O.). Man kann aber auch rein geometrisch zeigen, dafs der Endpunkt einer sich drehenden Kürzesten eine Bahn normal zu ihr beschreibt. Diesen Weg betrat *Gaufs* (a. a. O. Art. 15).

Folgendes dürfte im letztern Falle ebenfalls genügen: Denkt man sich um einen Punkt herum unendlich dicht Linien gleichen kürzesten Abstandes gezogen, welche Linien die ganze geschlossene Oberfläche bedecken, ohne sich zu schneiden, so gelangt man auf kürzestem Wege vom Zentrum nach aufsen nur normal zu jenen Linien.

§ 5. **Die reduzierte Länge.** Nach S. 268 (12) und S. 267 (6) ist die reduzierte Länge $\mathfrak{m}$ gegeben durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{m} = a_0(w_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - w_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - e^2 \sin^2\beta_0 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 J),\\ J = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^2\varphi}{w}\, d\varphi, \quad w = \sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}\,.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Zufolge der Entwicklung gilt $\mathfrak{m}$ für Drehung um P_1; allein man sieht leicht, dafs es auch für Drehung um P_2 gültig ist. Vertauscht man nämlich die Punkte, so ergiebt die entsprechende Vertauschung der Indices in der 1. Gleichung (1) zunächst für $\mathfrak{m}$ einen Vorzeichenwechsel. Allein die Gleichungen (4) S. 248 zeigen, dafs bei der Vertauschung φ_1 und φ_2 bezw. nicht in φ_2 und φ_1, sondern in $-\varphi_2$ und $-\varphi_1$ übergehen. Mit Berücksichtigung dessen behält $\mathfrak{m}$ seinen Wert:

Die reduzierte Länge $\mathfrak{m}$ hat gleichen Betrag für Drehungen um jeden der beiden Endpunkte der geodätischen Linie.

Wir entwickeln nun den Ausdruck (1) für $\mathfrak{m}$ in ähnlicher Weise wie früher s, ohne jedoch k_1 anzuwenden, sondern der Einfachheit wegen unter Beibehaltung von k^2.

Nach § 4 S. 220 und 221 ist:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta} = \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},\\ e^2 \sin^2\beta_0 = k^2\,\frac{1-e^2}{1-k^2}\,.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Man hat daher:

$$e^2 \sin^2\beta_0\, J = k^2 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \int \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$= k^2 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \int \left(\cos^2\varphi + \frac{1}{2} k^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi + \cdots\right) d\varphi.$$

Setzt man $\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ und $\cos^2\varphi\sin^2\varphi = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\varphi$ und integriert, so folgt:

$$e^2 \sin^2\beta_0\, J = k^2 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \left\{\frac{1}{2}\varDelta\varphi\left(1 + \frac{1}{8}k^2 + \cdots\right) + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{64} k^2 (\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) + \cdots\right\}. \quad (3)$$

Andrerseits ist mit Rücksicht auf die 1. Formel (2) und mittelst Reihenentwicklung von $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$ nach leichter Reduktion:

$$w_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - w_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$$

$$= \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \left\{ \sin\varDelta\varphi + k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \left[\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{8} k^2 (\cos\varphi_2 \sin^3\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin^3\varphi_1) + \cdots \right]\right\} \cdot \quad (4)$$

Substituiert man (3) und (4) in (1) so erhält man die für jeden Wert der Länge s gültige Formel:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \frac{b_0}{\sqrt{1-k^2}} \left\{ \sin\varDelta\varphi - \frac{1}{2} k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 [F] \right\}, \\ [F] &= \left[\varDelta\varphi\left(1 + \frac{1}{8}k^2 + \cdots\right) - \frac{1}{8} k^2 \cos 2\varphi \sin\varDelta\varphi + \cdots\right]; \\ \varDelta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \qquad 2\varphi = \varphi_2 + \varphi_1 . \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese Formel zeigt, dafs $\mathfrak{m}$ bei wachsender Länge der Linie anfangs wächst, dann aber wieder abnimmt, bis $\varDelta\varphi$ nahezu gleich π geworden ist, wo ein Verschwinden eintritt, jedoch nicht für $\varDelta\varphi = \pi$, sondern für einen etwas gröfseren Betrag. Hiervon ist die Ursache, dafs $\mathfrak{m}$ ein Glied mit $\varDelta\varphi$ selbst enthält. Ist $\mathfrak{m}$ durch null gegangen, so wird es negativ, erreicht ein negatives Maximum, nimmt dann absolut genommen wieder ab u. s. f.

Für die Geodäsie hat es ein besonderes Interesse, $\mathfrak{m}$ nach Potenzen von s zu entwickeln. Zu dem Zwecke suchen wir die Differentialquotienten von $\mathfrak{m}$ nach s auf, um schliefslich *Taylors* Satz anzuwenden. Dieses Verfahren ist, wenn nicht einfacher, so doch in einiger Hinsicht interessanter als die Entwicklung mittelst Substitution von s als Funktion von φ in (5).

§ 6. **Die Differentialquotienten von $\mathfrak{m}$ nach s.** Wir betrachten im Folgenden stets P_1 als den festen Punkt. Dies hervorzuheben ist wichtig, weil die Differentialquotienten von $\mathfrak{m}$ andere Werte erlangen für P_2 als Drehungszentrum.

Die Differentiation von $\mathfrak{m}$ (vergl. Formel (1) auf voriger Seite) nach φ_2 giebt:

$$\frac{1}{a_0}\frac{d\mathfrak{m}}{d\varphi_2} = w_1 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + w_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - e^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\beta_2 \sin\beta_2 \frac{d\beta_2}{w_2\, d\varphi_2}$$

$$- e^2 \sin^2\beta_0 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 J - \frac{1}{w_2} e^2 \sin^2\beta_0 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos^2\varphi_2 .$$

Aus einer sphärischen Figur analog Fig. 22 S. 267 entnimmt man nun ohne Mühe, dafs

$$d\beta_2 = \cos\alpha_{2.1}\, d\varphi_2; \quad (1)$$

setzt man dies in Vorstehendes ein und eliminiert J zugleich mittelst der Formel für $\mathfrak{m}$, so folgt mit Beachtung der (4) S. 248:

$$\frac{d\mathfrak{m}}{d\varphi_2} = \mathfrak{m} \cot \varphi_2 + a_0 w_2 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}. \tag{2}$$

Nun ist, wenn man sich s über P_2 hinaus verlängert denkt:

$$\frac{d\mathfrak{m}}{ds} = \frac{d\mathfrak{m}}{d\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{ds},$$

nach (6) S. 220 aber ferner:

$$\frac{d\varphi_2}{ds} = \frac{1}{a_0 w_2}. \tag{3}$$

Man hat daher

$$\frac{d\mathfrak{m}}{ds} = \frac{\mathfrak{m} \cot \varphi_2}{a_0 w_2} + \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}, \tag{4}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) S. 248:

$$\frac{d\mathfrak{m}}{ds} = -\frac{\cos \beta_1 \cos \alpha_{1\,.\,2}}{\cos \beta_2 \cos \alpha_{2\,.\,1}} - \frac{\mathfrak{m} \tan \beta_2}{a_0 w_2 \cos \alpha_{2\,.\,1}}. \tag{5}$$

Aus (4) erhält man weiter durch erneute Differentiation:

$$\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} = \frac{\cot\varphi_2}{a_0 w_2} \frac{d\mathfrak{m}}{ds} - \frac{\mathfrak{m} \csc^2 \varphi_2}{a_0 w_2} \frac{d\varphi_2}{ds} - \frac{\sin \varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin^2 \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{ds}$$
$$- e^2 \frac{\mathfrak{m} \cot\varphi_2}{a_0 w_2^3} \cos\beta_2 \sin\beta_2 \frac{d\beta_2}{d\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{ds}.$$

Reduzieren wir dies mittelst der Formeln (1), (3) und (4) und beachten auch die (4) S. 248, so geht es über in:

$$\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} = -\frac{\mathfrak{m}}{a_0^2 w_2^2}\left(1 - \frac{e^2 \sin^2 \beta_2}{w_2^2}\right).$$

Hieraus folgt aber:

$$\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} = -\frac{\mathfrak{m}}{a_0^2} \frac{1 - e^2}{w_2^4} = -\mathfrak{m} \frac{K_2}{a_0^2}, \tag{6}$$

wobei $K_2 : a_0^2$ nach S. 59 (3) das Krümmungsmafs in P_2 (dem beweglichen Punkte) bedeutet.

Die Gleichung $\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} = -\mathfrak{m}.$ (Krümmungsmafs) gilt für geodätische Linien jeder krummen Fläche. Sie wurde zuerst von *Gaufs* 1828 in den *Disquisitiones generales circa superficies curvas* Art. 19 (G. Werke Bd. 4 S. 244), später von *Christoffel* auch auf andere Art aus den Integrabilitätsbedingungen für die Differentialformeln geodätischer Dreiecke (1868, *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke* S. 141) abgeleitet.

§ 7. Entwicklung von K_2 als Funktion von s. Es ist mit Benutzung der 1. Formel (2) S. 273:

$$K = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \cos^2 \beta)^2} = \frac{(1 - k^2)^2}{(1 - e^2)(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^2}. \tag{1}$$

Man hat daher:

$$K_2 = K_1 \left(\frac{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}{1 - k^2 \sin^2 \varphi_2}\right)^2. \tag{2}$$

Hieraus folgt unter Vernachlässigung von k^4 u. s. f. ohne Schwierigkeit:

$$K_2 = K_1 \left(1 + k^2 [\cos 2\varphi_1 - \cos (2\varphi_1 + 2\varDelta\varphi)] + \cdots\right). \tag{3}$$

Nach (9) S. 223 weicht aber $\varDelta\varphi$ von $s : a_0$ nur um Glieder der Ordnung $e^2 s : a_0$ ab. Aufserdem ist $k^2 = e^2 \sin^2\beta_0 + Gl_4$. Beachtet man nun noch, dafs nach (4) S. 248

und

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\beta_0 \cos 2\varphi_1 &= \sin^2\beta_1 - \cos^2\beta_1 \cos^2\alpha_{1.2} \\ \sin^2\beta_0 \sin 2\varphi_1 &= \sin 2\beta_1 \cos \alpha_{1.2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ist, so findet sich aus (3):

$$K_2 = K_1 \left\{1 + e^2\left[\sin\frac{2s}{a_0}\sin 2\beta_1 \cos\alpha_{1.2} + 2\sin^2\frac{s}{a_0}(\sin^2\beta_1 - \cos^2\beta_1\cos^2\alpha_{1.2})\right] + \cdots\right\}. \tag{5}$$

Diese Formel giebt K_2 bis auf Glieder der Ordnung e^4 genau, so lange sie nur auf Distanzen Anwendung findet, für welche

$$\sin 2\varDelta\varphi - \sin\frac{2s}{a_0} \text{ und } \sin \varDelta\varphi_1 - \sin\frac{s}{a_0}$$

Gröfsen der Ordnung e^2 sind, was für beliebige Distanzen statthat, insofern man sich auf kürzeste Linien beschränkt.

Nimmt man $s : a_0$ als Gröfse 1. Ordnung wie e, so folgt:

$$K_2 = K_1 \left(1 + 2e^2 \sin 2\beta_1 \cos \alpha_{1.2} \frac{s}{a_0} + Gl_4\right). \tag{6}$$

§ 8. **Die reduzierte Länge als Funktion von s.** Da sich der 2. Differentialquotient von $\mathfrak{m}$ nach s so sehr einfach gestaltet, so liegt der Gedanke nahe, anstatt mittelst *Taylors* Satz nach vorher erfolgter Bestimmung des 3. und höherer Differentialquotienten, direkt durch Integration der Gleichung (6) auf voriger Seite $\mathfrak{m}$ als Funktion von s herzustellen. Setzen wir:

$$K_2 = K_1 \left(1 + c_1 \sin\frac{2s}{a_0} + c_2 \sin^2\frac{s}{a_0} + \cdots\right), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= e^2 \sin 2\beta_1 \cos \alpha_{1.2}, \\ c_2 &= 2e^2 (\sin^2\beta_1 - \cos^2\beta_1 \cos^2\alpha_{1.2}), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei c_1 und c_2 auch mit der geographischen anstatt der reduzierten Breite berechnet werden dürfen, so folgt aus (6):

$$\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} + \mathfrak{m}\frac{K_1}{a_0^2}\left(1 + c_1 \sin\frac{2s}{a_0} + c_2 \sin^2\frac{s}{a_0} + \cdots\right) = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung vernachlässigt alle höheren Potenzen von e^2, enthält aber die Glieder mit e^2 vollständig. Sie läſst sich *streng* integrieren, insoweit es sich um Konservierung der Glieder mit e^2 allein handelt.

Setzen wir c_1 und c_2 null, so folgt $\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K_1}} \sin \frac{s\sqrt{K_1}}{a_0}$, wie man daraus erkennt, daſs in diesem Falle $\mathfrak{m}$ die reduzierte Länge auf der Kugel vom Radius $a_0 : \sqrt{K_1}$ wird.

Im allgemeinen setzen wir

$$\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K_1}} \sin \frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} + a_0 \mu . \tag{4}$$

Zweimalige Differentiation liefert hieraus:

$$\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} = -\frac{\sqrt{K_1}}{a_0} \sin \frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} + a_0 \frac{d^2\mu}{ds^2} .$$

Dies substituieren wir in (3) und vernachlässigen dabei die Produkte μc_1 und μc_2, indem wir annehmen, daſs sie den Faktor e^4 haben, weil voraussichtlich μ den Faktor e^2 enthält. Es folgt:

$$\frac{d^2\mu}{ds^2} + \frac{K_1}{a_0{}^2} \mu + \frac{\sqrt{K_1}}{a_0{}^2} \sin \frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} \left(c_1 \sin \frac{2s}{a_0} + c_2 \sin^2 \frac{s}{a_0} \right) + \cdots = 0 ,$$

oder mit konsequenter Vernachlässigung von e^4:

$$a_0{}^2 \frac{d^2\mu}{ds^2} + \mu + c_1 \sin \frac{s}{a_0} \sin \frac{2s}{a_0} + c_2 \sin^3 \frac{s}{a_0} + \cdots = 0. \tag{5}$$

Man hat für μ noch die Nebenbedingungen:

$$\mu = 0 \text{ und } \frac{d\mu}{ds} = 0 \quad \text{für} \quad s = 0 . \tag{6}$$

Diese ergeben sich aus der Bedingung, daſs für s gleich null $\mathfrak{m}$ die reduzierte Länge für die Ebene wird, daſs also, da hier $\mathfrak{m} = s$ ist:

$$\mathfrak{m} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{m}}{ds} = 1 \quad \text{für} \quad s = 0$$

sein muſs. Führt man den Ausdruck (4) ein, so erhält man die (6).

Zum Zweck der Integration schreiben wir (5) wie folgt:

$$a_0{}^2 \frac{d\mu^2}{ds^2} + \mu + \tfrac{1}{2} c_1 \left(\cos \frac{s}{a_0} - \cos \frac{3s}{a_0} \right) + \tfrac{1}{4} c_2 \left(3 \sin \frac{s}{a_0} - \sin \frac{3s}{a_0} \right) + \cdots = 0 \tag{7}$$

und setzen nun versuchsweise (wobei zum Teil Reihenentwicklungen einen Fingerzeig geben):

$$\mu = a_1 \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{s}{a_0} \cos \frac{s}{a_0} - \sin \frac{s}{a_0} \right) + b_1 \frac{s}{a_0} \sin \frac{s}{a_0} \\ + a_3 \left(\cos \frac{3s}{a_0} - \cos \frac{s}{a_0} \right) + b_3 \left(\sin \frac{3s}{a_0} - 3 \sin \frac{s}{a_0} \right) . \end{array} \right\} \tag{8}$$

Die zweimalige Differentiation von (8) ergiebt:

$$a_0^2 \frac{d^2\mu}{ds^2} = \begin{Bmatrix} -a_1\left(\sin\frac{s}{a_0} + \frac{s}{a_0}\cos\frac{s}{a_0}\right) + b_1\left(2\cos\frac{s}{a_0} - \frac{s}{a_0}\sin\frac{s}{a_0}\right) \\ -a_3\left(9\cos\frac{3s}{a_0} - \cos\frac{s}{a_0}\right) - b_3\left(9\sin\frac{3s}{a_0} - 3\sin\frac{s}{a_0}\right). \end{Bmatrix}$$

Substituieren wir dies sowie (8) in (7), so geht diese Gleichung über in:

$$\left.\begin{matrix} \left(2b_1 + \frac{1}{2}c_1\right)\cos\frac{s}{a_0} - \left(2a_1 - \frac{3}{4}c_2\right)\sin\frac{s}{a_0} \\ -\left(8a_3 + \frac{1}{2}c_1\right)\cos\frac{3s}{a_0} - \left(8b_3 + \frac{1}{4}c_2\right)\sin\frac{3s}{a_0} \end{matrix}\right\} = 0,$$

welche identisch verschwinden mufs. Es wird also anzunehmen sein:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = +\frac{3}{8}c_2 & b_1 = -\frac{1}{4}c_1 \\ a_3 = -\frac{1}{16}c_1 & b_3 = -\frac{1}{32}c_2. \end{matrix}\right\} \qquad (9)$$

Setzt man diese Koefficientenwerte in (8) ein und den für μ erhaltenen Wert in (4), so findet sich für $\mathfrak{m}$ der folgende, die Glieder mit e^2 vollständig enthaltende Ausdruck:

$$\mathfrak{m} = \begin{Bmatrix} \frac{a_0}{\sqrt{K_1}}\sin\frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} - \frac{1}{4}c_1 s\sin\frac{s}{a_0} - \frac{1}{16}c_1 a_0\left(\cos\frac{3s}{a_0} - \cos\frac{s}{a_0}\right) \\ + \frac{3}{8}c_2\left(s\cos\frac{s}{a_0} - a_0\sin\frac{s}{a_0}\right) \\ - \frac{1}{32}c_2 a_0\left(\sin\frac{3s}{a_0} - 3\sin\frac{s}{a_0}\right) + \cdots \end{Bmatrix}. \qquad (10)$$

Für c_1 und c_2 gelten die unter (2) angegebenen Werte. Der Ausdruck (10) giebt $\mathfrak{m}$ bis auf Gröfsen der Ordnung $a_0 e^4$ für beliebige kürzeste Distanzen s (vergl. Schlufs des § 7 S. 276).

Wendet man Reihenentwicklungen an, indem man $s : a_0$ als Gröfse 1. Ordnung betrachtet, so folgt:

$$\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K_1}}\sin\frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} - \frac{1}{6}c_1 a_0\left(\frac{s^4}{a_0^4} - \frac{11}{30}\frac{s^6}{a_0^6} + Gl_8\right) - \frac{1}{20}c_2 a_0\left(\frac{s^5}{a_0^5} + Gl_7\right) + a_0 Gl_8. \qquad (11)$$

Dafs der Rest ein Bruchteil der 8. Ordnung von a_0 ist, zeigt die Einführung vorstehenden Ausdrucks in die strenge Gleichung (6) S. 275, welche bis auf Glieder $e^4 s^2$ befriedigt wird.

Berücksichtigt man bei der Entwicklung von K_2 auch e^4, so wird für kleine Distanzen erhalten:

$$K_2 = K_1 \left\{ 1 + c_1' \frac{2s}{a_0} + c_2' \frac{s^2}{a_0^2} - \frac{4}{3} c_1' \frac{s^3}{a_0^3} + Gl_6 \right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1' &= e^2 \sin 2\beta_1 \cos\alpha_{1.2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \cos^2\beta_1\right) \\ c_2' &= 2e^2 \left(\sin^2\beta_1 - \cos^2\beta_1 \cos^2\alpha_{1.2}\right) \\ &+ e^4 \left(\sin^2 2\beta_1 \left[1 + \frac{9}{2}\cos^2\alpha_{1.2}\right] - 4\cos^2\beta_1 \cos^2\alpha_{1.2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K_1}} \sin\frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} - a_0 K_1 \left\{ \frac{1}{6} c_1' \frac{s^4}{a_0^4} + \frac{1}{20} c_2' \frac{s^5}{a_0^5} - \frac{11}{180} c_1' \frac{s^6}{a_0^6} + Gl_9 \right\}. \tag{14}$$

§ 9. **Differentialformeln für die geodätische Linie bei Verschiebungen eines Endpunktes.** Wir beziehen uns auf die Linie $P_1 P_2$, Fig. 20 S. 266 und betrachten nach einander eine Verschiebung von P_2 im Sinne wachsender Länge s um δs sowie eine Drehung um P_1 im Betrage von $\delta\alpha_{1.2}$.

1. *Verschiebung δs von P_2.* Nach (3) S. 219 und (1) S. 229 hat man zunächst, indem daselbst für α, β und dl bezw. $\alpha_{2.1} - 180^0$, β_2 und $dL_{1.2}$ zu setzen sind:

$$\left.\begin{aligned} \delta\beta_2 &= \frac{\delta s}{a_0 w_2} \cos\alpha_{2.1} \\ \delta L_{1.2} &= -\frac{\delta s}{a_0} \sec\beta_2 \sin\alpha_{2.1}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Um $\delta\alpha_{2.1}$ zu finden, beachten wir die Konstanz des Produkts $\cos\beta_2 \sin\alpha_{2.1}$ bei der Verschiebung von P_2, zufolge welcher

$$\cos\beta_2 \sin\alpha_{2.1} = \cos(\beta_2 + \delta\beta_2) \sin(\alpha_{2.1} + \delta\alpha_{2.1}).$$

Hiernach ist

$$\cos\beta_2 \cos\alpha_{2.1} \delta\alpha_{2.1} = \sin\beta_2 \sin\alpha_{2.1} \delta\beta_2$$

und mit Rücksicht auf die 1. Formel (1):

$$\delta\alpha_{2.1} = \frac{\delta s}{a_0 w_2} \tan\beta_2 \sin\alpha_{2.1}. \tag{2}$$

2. *Drehung von $P_1 P_2$ um P_1.* Nach (11) S. 268 und (17) S. 269 ist hierbei:

$$\left.\begin{aligned} \delta\beta_2 &= -\frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2} \sin\alpha_{2.1} \delta\alpha_{1.2} \\ \delta L_{1.2} &= -\frac{\mathfrak{m}}{a_0} \sec\beta_2 \cos\alpha_{2.1} \delta\alpha_{1.2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Fundamentalgleichung, angewandt auf P_1 und P_2 *nach* erfolgter Drehung, liefert nun weiter:

$$\cos\beta_1 \sin(\alpha_{1.2} + \delta\alpha_{1.2}) + \cos(\beta_2 + \delta\beta_2) \sin(\alpha_{2.1} + \delta\alpha_{2.1}) = 0.$$

Wegen
$$\cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} + \cos\beta_2 \sin\alpha_{2.1} = 0$$
geht dies über in:
$$\cos\beta_2 \cos\alpha_{2.1}\delta\alpha_{2.1} = \sin\beta_2 \sin\alpha_{2.1}\delta\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\alpha_{1.2}\delta\alpha_{1.2},$$
wobei $\delta\beta_2$ aus der 1. Formel (3) zu entnehmen ist. Damit folgt:
$$\delta\alpha_{2.1} = \left\{-\frac{\cos\beta_1\cos\alpha_{1.2}}{\cos\beta_2\cos\alpha_{2.1}} - \frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2}\tan\beta_2\sin\alpha_{2.1}\tan\alpha_{2.1}\right\}\delta\alpha_{1.2}.$$
Hieraus eliminieren wir mit Hilfe der Gleichung (5) S. 275 das erste Glied rechter Hand und erhalten:
$$\delta\alpha_{2.1} = \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2}\tan\beta_2\cos\alpha_{2.1}\right)\delta\alpha_{1.2}. \tag{4}$$
Für den Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{m}}{ds}$ ist zu erinnern, daſs er sich auf eine Verschiebung von P_2 im Sinne einer Längenänderung von s bei konstantem Azimut $\alpha_{1.2}$ bezieht.

3. *Verschiebung und Drehung.* Wenn die geodätische Linie P_1P_2 sich um P_1 im Betrage $\delta\alpha_{1.2}$ dreht und dabei zugleich um ds wächst, so sind die totalen Änderungen von β_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ die Summen der bezüglichen Ausdrücke (1) bis (4).

Indem wir die Summation ausführen, substituieren wir zugleich nach S. 40 und 41 (2), (3) und (6):
$$\left.\begin{array}{l} \frac{W_2}{\sqrt{1-e^2}} \text{ für } \frac{1}{w_2}, \quad W_2\sec B_2 \text{ für } \sec\beta_2, \\ \sqrt{1-e^2}\tan B_2 \text{ für } \tan\beta_2, \quad \delta B_2\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_2^2} \text{ für } \delta\beta_2 \end{array}\right\} \tag{5}$$
und gelangen damit zu den Formeln für die totalen Änderungen:
$$\left.\begin{array}{l} \delta B_2 = \frac{\delta s}{a_0}\frac{W_2^3}{1-e^2}\cos\alpha_{2.1} - \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\frac{W_2^3}{1-e^2}\sin\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2} \\ \delta L_{1.2} = -\frac{\delta s}{a_0}W_2\sec B_2\sin\alpha_{2.1} - \frac{\mathfrak{m}}{a_0}W_2\sec B_2\cos\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2} \\ \delta\alpha_{2.1} = \frac{\delta s}{a_0}W_2\tan B_2\sin\alpha_{2.1} + \left\{\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0}W_2\tan B_2\cos\alpha_{2.1}\right\}\delta\alpha_{1.2}. \end{array}\right\} \tag{6}$$
Hierin ist $W_2 = \sqrt{1-e^2\sin B_2}$ und der Index 1.2 an $\frac{d\mathfrak{m}}{ds}$ deutet die Richtung vom festen nach dem beweglichen Punkt an, im Sinne der obigen Bemerkung zu (4) am Schlusse des 2. Absatz.

4. *Änderung der geographischen Koordinaten von P_2.* Die Werte

δs und $\delta \alpha_{1.2}$, die zu δB_2 und $\delta L_{1.2}$ gehören, ergeben sich aus den ersten beiden Gleichungen (6) durch Elimination von $\delta \alpha_{1.2}$ bezw. δs. Führt man die erhaltenen Resultate in den Ausdruck für $\delta \alpha_{2.1}$ ein und reduziert ihn teilweise mittelst der Formel (5) S. 275, welche bei Einführung der Substitutionen (5) lautet:

$$\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} = -\frac{W_2 \cos B_1 \cos \alpha_{1.2}}{W_1 \cos B_2 \cos \alpha_{2.1}} - \frac{W_2 \mathfrak{m} \tan B_2}{a_0 \cos \alpha_{2.1}}, \tag{7}$$

so ist dann auch dieses $\delta \alpha_{2.1}$ Funktion von δB_2 und $\delta L_{1.2}$. Die Ergebnisse sind:

$$\left.\begin{aligned}
\delta s &= a_0 \frac{1-e^2}{W_2^3} \cos\alpha_{2.1} \delta B_2 - \frac{a_0}{W_2} \cos B_2 \sin\alpha_{2.1} \delta L_{1.2} \\
\delta \alpha_{1.2} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}} \frac{1-e^2}{W_2^3} \sin\alpha_{2.1} \delta B_2 - \frac{a_0}{\mathfrak{m} W_2} \cos B_2 \cos\alpha_{2.1} \delta L_{1.2} \\
\delta \alpha_{2.1} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}} \frac{1-e^2}{W_2^3} \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} \sin \alpha_{2.1}\, \delta B_2 + \frac{a_0}{\mathfrak{m} W_1} \cos B_1 \cos \alpha_{1.2}\, \delta L_{1.2}.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Es ist noch zu bemerken, daſs im vorstehenden Paragraphen die δB, δL und $\delta \alpha$ als Arcus zu verstehen sind.

§ 10. Verschiebung beider Endpunkte der geodätischen Linie. In allen Formeln des vorigen Paragraphen dürfen wir die Indices vertauschen, wenn wir zugleich P_2 als fest und P_1 als beweglich annehmen. Die (8) geben damit:

$$\left.\begin{aligned}
\delta s &= a_0 \frac{1-e^2}{W_1^3} \cos \alpha_{1.2}\, \delta B_1 + \frac{a_0}{W_1} \cos B_1 \sin \alpha_{1.2}\, \delta L_{1.2} \\
\delta \alpha_{2.1} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}} \frac{1-e^2}{W_1^3} \sin \alpha_{1.2}\, \delta B_1 + \frac{a_0}{\mathfrak{m} W_1} \cos B_1 \cos \alpha_{1.2}\, \delta L_{1.2} \\
\delta \alpha_{1.2} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}} \frac{1-e^2}{W_1^3} \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1} \sin \alpha_{1.2}\, \delta B_1 - \frac{a_0}{\mathfrak{m} W_2} \cos B_2 \cos \alpha_{2.1}\, \delta L_{1.2}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Diese Änderungen in s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ entsprechen also einer Verschiebung von P_1 bei festem P_2. Da man nun setzen kann

$$L_{1.2} = L_2 - L_1, \tag{2}$$

wenn L allgemein die westliche Länge in Bezug auf einen beliebigen ersten Meridian ist, so hat man auch:

$$\left.\begin{aligned}
\delta L_{1.2} &= + \delta L_2 \text{ bei festem } P_1, \text{ für (8) des vor. Paragraphen,} \\
\delta L_{1.2} &= - \delta L_1 \text{ bei festem } P_2, \text{ für (1) dieses Paragraphen.}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Durch Addition der bezüglichen Werte nach (8) des vorigen Paragraphen und nach (1) dieses Paragraphen erhalten wir die

Änderungen der Länge und der Azimute, welche beliebigen differentialen *Verschiebungen beider Endpunkte* entsprechen:

Gegeben: $\delta B_1, \delta B_2, \delta L_1, \delta L_2$;

$$\left.\begin{aligned}
\varrho''\delta s &= a_0\frac{1-e^2}{W_1^3}\cos\alpha_{1.2}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_1} + a_0\frac{1-e^2}{W_2^3}\cos\alpha_{2.1}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2}\\
&\qquad + \frac{a_0}{W_2}\cos B_2\sin\alpha_{2.1}(\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_1 - \delta L_2})\\
\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{1.2}} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_1^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\sin\alpha_{1.2}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_1} - \frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_2^3}\sin\alpha_{2.1}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2}\\
&\qquad + \frac{a_0}{\mathfrak{m}W_2}\cos B_2\cos\alpha_{2.1}(\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_1 - \delta L_2})\\
\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_1^3}\sin\alpha_{1.2}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_1} - \frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_2^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\sin\alpha_{2.1}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2}\\
&\qquad - \frac{a_0}{\mathfrak{m}W_1}\cos B_1\cos\alpha_{1.2}(\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_1 - \delta L_2})\,.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Für die Reduktion der 1. dieser Gleichungen wurde die Beziehung $\cos\beta_2\sin\alpha_{2.1} + \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2} = 0$, d. i.

$$\frac{1}{W_2}\cos B_2\sin\alpha_{2.1} + \frac{1}{W_1}\cos B_1\sin\alpha_{1.2} = 0 \tag{5}$$

benutzt. Mit Rücksicht auf diese letztere ist auch zu ersehen, dafs die (4) symmetrisch zu beiden Punkten P_1 und P_2 geformt sind.

Nehmen wir jetzt an, dafs nicht die Änderungen der geographischen Koordinaten beider Punkte gegeben sind, sondern nur diejenigen von P_1, aufserdem aber δs und $\delta\alpha_{1.2}$, so ist aus den ersten beiden (4) einmal δL_2, sodann δB_2 zu eliminieren und auf δB_2 bezw. δL_2 zu reduzieren. Setzt man zugleich

$$\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2} - 180^0 = \varDelta\alpha\,, \tag{6}$$

so findet sich:

Gegeben: $\delta B_1, \delta L_1, \delta s, \delta\alpha_{1.2}$;

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2} = \left\{\begin{aligned}
&\frac{W_2^3}{1-e^2}\left\{\varrho''\cos\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} - \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\sin\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}\right\}\\
&+\frac{W_2^3}{W_1^3}\left\{\cos\varDelta\alpha + \left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1}\right\}\delta B_1
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_2} = \left\{\begin{aligned}
&\delta L_1 - W_2\sec B_2\left\{\varrho''\sin\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\cos\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}\right\}\\
&-\frac{(1-e^2)W_2}{W_1^3}\sec B_2\left\{\sin\varDelta\alpha - \left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\right\}\delta B_1
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Diese Ausdrücke führen wir endlich noch in die 3. Gleichung (4) ein und erhalten nach gehöriger Reduktion mittelst (7) S. 281:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} = \left\{ \begin{array}{l} \varrho'' W_2 \tan B_2 \sin\alpha_{2.1} \frac{\delta s}{a_0} + \left\{ \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \tan B_2 \cos\alpha_{2.1} \right\} \delta\alpha_{1.2} \\ + \frac{a_0}{\mathfrak{m}} \frac{1-e^2}{W_1^3} \left\{ \begin{array}{l} \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + 1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \cos\varDelta\alpha \sin\alpha_{2.1} - \frac{\sin^2\varDelta\alpha}{\sin\alpha_{1.2}} \\ + \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right] \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \sin^2\alpha_{2.1} \sin\alpha_{1.2} \end{array} \right\} \delta B_1 . \end{array} \right\} \quad (9)$$

In den Formeln (7) bis (9) sind die δB, δL und $\delta\alpha$ als Sekundenwerte zu verstehen, wie auch zum Teil angedeutet ist.

§ 11. Berechnung der Koefficienten der Differentialformeln.

Bei beliebig grofsen kürzesten Distanzen s wird in vorstehenden Differentialformeln für $\mathfrak{m}$ der Ausdruck (10) S. 278 anzuwenden sein; er vernachlässigt zwar e^4, ist aber wohl meist ausreichend.

Für kleinere Distanzen ist der bequemere Ausdruck (11) S. 278 vorzuziehen; meistens aber dürfte es vollkommen genügen, zu setzen:

$$\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K}} \sin \frac{s\sqrt{K}}{a_0} + \cdots = s\left(1 - \frac{s^2}{6a_0^2} K + Gl_4\right), \quad (1)$$

worin K irgend ein mittlerer Wert der Gröfse K, vergl. (3) S. 59, in Bezug auf die Endpunkte der Linie s ist. Man hat noch:

$$\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} = \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1} + \cdots = 1 - \frac{s^2}{2a_0^2} K + Gl_4, \quad (2)$$

und in logarithmischer Form:

$$\left.\begin{array}{l} \log \mathfrak{m} = \log s - \frac{M}{6a_0^2} s^2 K + Gl_4 \\ \log \frac{d\mathfrak{m}}{ds} = -\frac{M}{2a_0^2} s^2 K + Gl_4; \end{array}\right\} \quad (3)$$

dazu ist aufserdem:

$$\left[1 - \frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right] = \frac{s^2}{2a_0^2} K + Gl_4 .$$

Die Einführung dieser Werte vereinfacht namentlich die etwas komplizierten Formeln (7) bis (9) des vorigen Paragraphen erheblich, während die (4) überhaupt einfach sind.

Für Seiten direkt mefsbarer Dreiecke wird es in der Regel zulässig sein, die eckigen Parenthesen in (7) und (8), in (9) aber wenigstens das 3. Glied des Koefficienten von δB_1 zu vernachlässigen.

Sphärische Berechnung der Koefficienten. Kommt es auf Bruchteile der Ordnung e^2 in den Koefficienten der Differentialformeln nicht

an, so kann man sie so berechnen, als wäre das Dreieck zwischen Nordpol P_1 und P_2 ein sphärisches.

Man hat zunächst für diese Voraussetzung:

$$\mathfrak{m} = a_0 \sin\frac{s}{a_0}, \quad \frac{d\mathfrak{m}}{ds} = \cos\frac{s}{a_0} \tag{4}$$

und nun durch leicht ersichtliche Reduktionen, insbesondere durch Auflösung von $\sin\Delta\alpha$ und $\cos\Delta\alpha$, für einige der kompliziertesten Koefficienten in (7) bis (9) des vorigen Paragraphen:

$$\left.\begin{aligned}&\cos\Delta\alpha + \left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1}\\ &= -\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1} - \cos\frac{s}{a_0}\sin\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin\Delta\alpha - \left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\\ &= -\cos\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1} + \cos\frac{s}{a_0}\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \tan B_2 \cos\alpha_{2.1} = \cos\frac{s}{a_0} + \sin\frac{s}{a_0}\tan B_2\cos\alpha_{2.1}, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + 1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\cos\Delta\alpha\sin\alpha_{2.1}\\ &\qquad - \frac{\sin^2\Delta\alpha}{\sin\alpha_{1.2}}\\ &+\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right]\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin^2\alpha_{2.1}\sin\alpha_{1.2}\end{aligned}\right\}\\ &= \left\{\begin{aligned}&2\cos\frac{s}{a_0}\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\sin\alpha_{2.1}\\ &-\sin\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{2.1} - \cos^2\alpha_{1.2}\frac{\sin^2\alpha_{2.1}}{\sin\alpha_{1.2}}\\ &-\sin^2\frac{s}{a_0}\sin^2\alpha_{2.1}\sin\alpha_{1.2}.\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie ist aber:

$$-\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1} - \cos\frac{s}{a_0}\sin\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1} = \cos L_{1.2} \tag{5*}$$

$$\cos\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1} - \cos\frac{s}{a_0}\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1} = \sin L_{1.2}\sin B_2, \tag{6*}$$

womit sich (5) und (6) unmittelbar vereinfachen. Ferner ist:

$$\cos\frac{s}{a_0} = \sin B_1\sin B_2 + \cos B_1\cos B_2\cos L_{1.2}$$

$$\sin\frac{s}{a_0}\cos\alpha_{2.1} = -\sin B_1\cos B_2 + \cos B_1\sin B_2\cos L_{1.2}$$

und daher für (7):

$$\cos\frac{s}{a_0} + \sin\frac{s}{a_0}\tan B_2\cos\alpha_{2.1} = \cos L_{1.2}\cos B_1\sec B_2. \tag{7*}$$

Zur Reduktion von (8) ist nach dem Cotangentensatz (oder nach Formel (5) S. 275):

$$\tan B_1\sin\frac{s}{a_0} = \cot\alpha_{2.1}\sin\alpha_{1.2} - \cos\frac{s}{a_0}\cos\alpha_{1.2}.$$

Quadriert man dies und multipliziert mit $\sin^2\alpha_{2.1} : \sin\alpha_{1.2}$, so gelangt man zu der Relation:

$$2\cos\frac{s}{a_0}\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\sin\alpha_{2.1} - \sin\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{2.1} - \cos^2\alpha_{1.2}\frac{\sin^2\alpha_{2.1}}{\sin\alpha_{1.2}}$$
$$= \sin^2\frac{s}{a_0}(\sin^2\alpha_{1.2} - \sec^2 B_1)\frac{\sin^2\alpha_{2.1}}{\sin\alpha_{1.2}},$$

mit Hilfe welcher sich die rechte Seite von (8) in den Ausdruck vereinfacht:

$$-\sin^2\frac{s}{a_0}\sec^2 B_1\frac{\sin^2\alpha_{2.1}}{\sin\alpha_{1.2}}\ \text{d. i.}\ -\sin\frac{s}{a_0}\sin L_{1.2}\sec B_2. \tag{8*}$$

Die Differentialformeln (4) und (7) bis (9) des § 10 lassen sich nunmehr ohne Schwierigkeiten in nachstehende Formeln überführen, in denen δB, δL und $\delta\alpha$ Sekundenwerte bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho''\frac{\delta s}{a_0} &= \cos\alpha_{1.2}\,\delta B_1 + \cos\alpha_{2.1}\,\delta B_2 + \begin{pmatrix}\cos B_2\sin\alpha_{2.1}\\ \text{oder auch}\\ -\cos B_1\sin\alpha_{1.2}\end{pmatrix}(\delta L_1 - \delta L_2)\\
\delta\alpha_{1.2} &= -\frac{\sin\alpha_{1.2}}{\tan\frac{s}{a_0}}\delta B_1 - \frac{\sin\alpha_{2.1}}{\sin\frac{s}{a_0}}\delta B_2 + \frac{\cos B_2\cos\alpha_{2.1}}{\sin\frac{s}{a_0}}(\delta L_1 - \delta L_2)\\
\delta\alpha_{2.1} &= -\frac{\sin\alpha_{1.2}}{\sin\frac{s}{a_0}}\delta B_1 - \frac{\sin\alpha_{2.1}}{\tan\frac{s}{a_0}}\delta B_2 - \frac{\cos B_1\cos\alpha_{1.2}}{\sin\frac{s}{a_0}}(\delta L_1 - \delta L_2)
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta B_2 &= \varrho''\cos\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} + \sin L_{1.2}\cos B_1\,\delta\alpha_{1.2}\\
&\qquad + \cos L_{1.2}\,\delta B_1\\
\delta L_2 &= \delta L_1 - \varrho''\sec B_2\sin\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} - \sin L_{1.2}\csc\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}\\
&\qquad + \sin L_{1.2}\tan B_2\,\delta B_1\\
\delta\alpha_{2.1} &= \varrho''\tan B_2\sin\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} + \cos L_{1.2}\cos B_1\sec B_2\,\delta\alpha_{1.2}\\
&\qquad - \sin L_{1.2}\sec B_2\,\delta B_1.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Es ist selbstverständlich, dafs man diese Formeln auch direkt und weit einfacher als oben durch Differentiation der Formeln der sphärischen Trigonometrie erhält. Der hier eingeschlagene Weg zeigt aber deutlich die Vernachlässigungen, die übrigens nicht, wie eingangs erwähnt, durchaus Bruchteile der Koefficienten von der Ordnung e^2 sind, sondern in der 1. und 3. Formel (10) im Koefficienten von δB_1 bezw. $\delta \alpha_{1.2}$ nur Bruchteile der Ordnung $e^2 s : a_0$. Da diese beiden Koefficienten nahezu gleich 1 sind, verdient der erwähnte Umstand Beachtung.

Der Koefficient von $\delta \alpha_{1.2}$ in der 2. Formel (10) kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$-\sin \frac{s}{a_0} \sec B_2 \cos \alpha_{2.1}, \tag{10*}$$

welcher Ausdruck jedoch weniger bequem als der oben benutzte ist.

Für die Formeln (9) kann man $\sin \frac{s}{a_0}$ event. mittelst einer der Relationen

$$\sin \frac{s}{a_0} = \frac{\sin L_{1.2} \cos B_2}{\sin \alpha_{1.2}} = -\frac{\sin L_{1.2} \cos B_1}{\sin \alpha_{2.1}} \tag{9*}$$

berechnen und zu $\log \sin \frac{s}{a_0}$ unmittelbar $\log \tan \frac{s}{a_0}$ aufschlagen.

§ 12. Differentialformeln für s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ bei gegebenen geographischen Positionen in Bezug auf Änderungen von a_0 und e^2.

Wir betrachten vorerst das sphärische Hilfsdreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$. Auf dieses können wir sofort die (9) des vorigen Paragraphen anwenden, wenn wir für $\frac{s}{a_0}$, B und $L_{1.2}$ schreiben bezw. $\Delta\varphi$, β und $\Delta\lambda$. Damit ergiebt sich, die $\delta\beta$ und $\delta\Delta\lambda$ als Arcus genommen und wegen $\cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} = \cos\beta_0$:

$$\delta\Delta\varphi = \cos\alpha_{1.2}\,\delta\beta_1 + \cos\alpha_{2.1}\,\delta\beta_2 + \cos\beta_0\,\delta\Delta\lambda \tag{1}$$

und

$$\sin\Delta\varphi\,\delta\alpha_{1.2} = -\cos\Delta\varphi\sin\alpha_{1.2}\delta\beta_1 - \sin\alpha_{2.1}\delta\beta_2 - \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1}\delta\Delta\lambda. \tag{2}$$

Die Formel für $\delta\alpha_{2.1}$ kann wegbleiben, da sie schliefslich am bequemsten aus derjenigen für $\delta\alpha_{1.2}$ durch Indicesvertauschung erhalten wird.

Für $\delta\beta_1$ und $\delta\beta_2$ hat man aus der Beziehung $\tan\beta = \sqrt{1-e^2}\tan B$ durch Differentiation:

$$\delta\beta = -\tan B\cos^2\beta\,\frac{\delta e^2}{2\sqrt{1-e^2}} = -\frac{1}{4}\sin 2\beta\,\frac{\delta e^2}{1-e^2} \tag{3}$$

und hiermit gehen (1) und (2) mit Rücksicht auf die (4) S. 248 über in:

$$\delta \varDelta \varphi = \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1 - e^2} \sin^2 \beta_0 (\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) + \cos \beta_0 \, \delta \varDelta \lambda \quad (4)$$

$$\delta \alpha_{1.2} = \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1 - e^2} \sin \beta_0 \cos \beta_0 \sin \varphi_1 + \frac{\sin \beta_0 \sin \varphi_2}{\sin \varDelta \varphi} \delta \varDelta \lambda \,. \quad (5)$$

Zur Bestimmung von $\delta \varDelta \lambda$ knüpfen wir an die Gleichung (13) S. 268 an:

$$L_{1.2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} \, d\lambda \,, \quad (6)$$

wobei

$$\tan \beta = \tan \beta_0 \cos \lambda \qquad \cos \beta_0 = \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2} \,. \quad (7)$$

Es ist durch Differentiation, da $\delta L_{1.2}$ gleich null ist, vergleiche S. 268 (15):

$$\left. \begin{aligned} 0 = (w_2 - w_1) \delta \lambda_1 + w_2 \delta \varDelta \lambda - \frac{1}{2} \delta e^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\cos^2 \beta}{w} d\lambda + e^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\cos \beta \sin \beta \, \delta \beta}{w} d\lambda, \\ \delta \beta = \cos^2 \beta \sec^2 \beta_0 \cos \lambda \, \delta \beta_0 \,, \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\sin \beta_0 \, \delta \beta_0 = \sin \beta_1 \sin \alpha_{1.2} \, \delta \beta_1 - \cos \beta_1 \cos \alpha_{1.2} \, \delta \alpha_{1.2} \,. \quad (9)$$

Setzt man $\delta \beta$ nach der 2. Formel (8) in das vorhergehende Integral und reduziert mittelst der Formeln:

$$d\lambda = \cos \beta_0 \sec^2 \beta \, d\varphi, \quad \cos \lambda = \tan \beta \cot \beta_0, \quad \sin \beta = \sin \beta_0 \cos \varphi,$$

wie S. 268, so geht die 1. Gleichung (8) über in:

$$0 = (w_2 - w_1) \delta \lambda_1 + w_2 \delta \varDelta \lambda - \frac{1}{2} \cos \beta_0 H \, \delta e^2 + e^2 \sin \beta_0 J \, \delta \beta_0, \quad (10)$$

worin J die durch (6) S. 267 definierte Bedeutung hat und H durch die Gleichung gegeben ist:

$$H = \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{w} \,. \quad (11)$$

Es ist nun noch $\delta \lambda_1$ zu ermitteln. Hierzu führt die Differentiation der Gleichung $\cot \lambda_1 = \sin \beta_1 \tan \alpha_{1.2}$, wodurch sich findet:

$$\delta \lambda_1 = - \sin^2 \lambda_1 \cos \beta_1 \tan \alpha_{1.2} \, \delta \beta_1 - \sin^2 \lambda_1 \sin \beta_1 \sec^2 \alpha_{1.2} \, \delta \alpha_{1.2} \,.$$

Setzen wir hier, sowie in (9) die Werte von $\delta \beta_1$ und $\delta \alpha_{1.2}$ nach (3) und (5) ein, so erhalten wir mit Beachtung der (2) und (3) S. 232 und 233:

$$\left.\begin{aligned}\delta\lambda_1 &= -\frac{\cos\varphi_1\sin\varphi_2}{\sin\Delta\varphi}\,\delta\Delta\lambda\\ \delta\beta_0 &= -\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin\beta_0\cos\beta_0-\sin\beta_0\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\sin\Delta\varphi}\,\delta\Delta\lambda\,.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Dies in (10) eingesetzt und nach $\delta\Delta\lambda$ aufgelöst, giebt unter Einführung von $\mathfrak{m}$, S. 273 (1):

$$\delta\Delta\lambda = \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\left\{(1-e^2)\,H+e^2\sin^2\beta_0\,J\right\}\frac{a_0\cos\beta_0\sin\Delta\varphi}{\mathfrak{m}}.\quad(13)$$

Nun ist aber

$$s = a_0\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}\,d\varphi$$

und identisch

$$\sqrt{1-e^2\cos^2\beta} = \frac{1-e^2+e^2\sin^2\beta}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}}.$$

Setzt man hier $\sin\beta = \sin\beta_0\cos\varphi$ und beachtet die Werte H und J nach (11) S. 287 und (6) S. 267, so folgt:

$$s = a_0\left((1-e^2)\,H+e^2\sin^2\beta_0 J\right),\quad(14)$$

womit (13) übergeht in:

$$\delta\Delta\lambda = \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\frac{s}{\mathfrak{m}}\cos\beta_0\sin\Delta\varphi.\quad(15)$$

Ehe wir diese Formel in (4) und (5) substituieren, differenzieren wir vorerst noch die Gleichung für s, wozu (1) und (2) S. 265 zu vergleichen ist. Es wird:

$$\frac{\delta s}{a_0} = \frac{s}{a_0}\frac{\delta a_0}{a_0}+w_2\delta\Delta\varphi+(w_2-w_1)\,\delta\varphi_1-\frac{1}{2}\,\delta e^2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\cos^2\beta}{w}\,d\varphi$$
$$+\,e^2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\cos\beta\,\sin\beta\,\delta\beta}{w}\,d\varphi,$$

$$\delta\beta = \sec\beta\cos\beta_0\cos\varphi\,\delta\beta_0,$$

mit $\delta\beta_0$ entsprechend der 2. Formel (12). Führt man es hiernach ein und setzt im 1. Integral $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi$, so ergiebt sich:

$$\frac{\delta s}{a_0} = \frac{s}{a_0}\frac{\delta a_0}{a_0}+w_2\delta\Delta\varphi+(w_2-w_1)\delta\varphi_1-\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\left(\frac{s}{a_0}-J\sin^2\beta_0(1-e^2\cos^2\beta_0)\right)$$
$$-\,e^2J\sin^2\beta_0\cos\beta_0\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\sin\Delta\varphi}\,\delta\Delta\lambda.\quad(16)$$

Um dies weiter zu vereinfachen, mufs noch $\delta\varphi_1$ bestimmt werden. Zu dem Zwecke giebt die Differentiation der Gleichung $\tan\varphi_1 = \cot\beta_1 \cos\alpha_{1.2}$:

$$\delta\varphi_1 = -\frac{\cos^2\varphi_1}{\sin^2\beta_1}\cos\alpha_{1.2}\,\delta\beta_1 - \cot\beta_1\cos^2\varphi_1\sin\alpha_{1.2}\,\delta\alpha_{1.2}.$$

Hierin ist $\delta\beta_1$ nach (3), $\delta\alpha_{1.2}$ nach (5) einzuführen, womit erhalten wird:

$$\delta\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin^2\beta_0\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \frac{\cos\varphi_1\sin\varphi_2}{\sin\varDelta\varphi}\cos\beta_0\,\delta\varDelta\lambda. \quad (17)$$

Die Einführung von (4) und (17) in (16) giebt ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf (1) S. 273:

$$\frac{\delta s}{a_0} = \frac{s}{a_0}\frac{\delta a_0}{a_0} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\frac{\cos\beta_0}{\sin\varDelta\varphi}\,\delta\varDelta\lambda$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\left\{-w_1\sin^2\beta_0\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + w_2\sin^2\beta_0\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - \frac{s}{a_0} + J\sin^2\beta_0(1-e^2\cos^2\beta_0)\right\}.$$

Die Substitution des Wertes $\delta\varDelta\lambda$ nach (15) und die Restitution des Wertes von s nach (14) führt endlich zu der Formel:

$$\delta s = \frac{\delta a_0}{a_0}s - \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\mathfrak{S}, \quad (18)$$

$$\mathfrak{S} = a_0\sin^2\beta_0\left(\frac{1}{2}w_1\sin 2\varphi_1 - \frac{1}{2}w_2\sin 2\varphi_2 + (1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin^2\varphi}{w}\,d\varphi\right). \quad (19)$$

Aufserdem ist nach (5) und (15):

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{1.2}} = \varrho''\,\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin\beta_0\cos\beta_0\left(\sin\varphi_1 + \frac{s}{\mathfrak{m}}\sin\varphi_2\right) \quad (20)$$

und hiernach durch Vertauschung der Indices mit Rücksicht auf die (4) S. 248:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} = \varrho''\,\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin\beta_0\cos\beta_0\left(\sin\varphi_2 + \frac{s}{\mathfrak{m}}\sin\varphi_1\right). \quad (21)$$

§ 13. **Berechnung von $\mathfrak{S}$.** Wenn es sich darum handelte, eine in allen Fällen brauchbare Formel abzuleiten, so würde man für obige Formel (19) das Integral entwickeln wie früher dasjenige für s. Wir begnügen uns indessen, eine einfachere Behandlung vorzunehmen, die alle Glieder von der Ordnung e^4 ab vernachlässigt.

Mit Rücksicht auf (2) S. 273 geht zunächst (19) über in:

$$\mathfrak{S} = a_0\sin^2\beta_0\sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) - \frac{1}{4}k^2(\sin^2\varphi_1\sin 2\varphi_1 - \sin^2\varphi_2\sin 2\varphi_2)\\ + (1-k^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(\sin^2\varphi + \frac{1}{2}k^2\sin^4\varphi)\,d\varphi + \cdots\end{array}\right\}.$$

Da nun $\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$, $\sin^4\varphi = \sin^2\varphi - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$ und

$$\sin^2\varphi \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi,$$

so gelangt man leicht zu der Formel:

$$\mathfrak{S} = a_0 \sin^2\beta_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{8}k^2\right)\varDelta\varphi - \frac{1}{4}(3-k^2)(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \\ - \frac{3}{64}k^2(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) + \cdots \end{array} \right\}$$

und hieraus zu der in der Regel völlig hinreichenden Entwicklung:

$$\mathfrak{S} = b_0 \sin^2\beta_0 \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{8}k^2\right)\varDelta\varphi - \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{6}k^2\right)\cos 2\varphi \sin \varDelta\varphi \\ - \frac{3}{32}k^2 \cos 4\varphi \sin 2\varDelta\varphi + \cdots . \end{array} \right\} \cdot (1)$$

Für kleine Distanzen ist es zweckmäfsiger, $\mathfrak{S}$ direkt als Funktion von s darzustellen. Wir betrachten hierbei s als Gröfse 1. Ordnung. Nach (9) S. 223 ist nun:

$$s = b_0\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + Gl_4\right)\left(\varDelta\varphi + \frac{1}{4}k^2\cos 2\varphi \sin \varDelta\varphi + Gl_5\right)$$

und hiermit, da man $\sin \varDelta\varphi$ mit $\varDelta\varphi$ im letzten Gliede rechter Hand vertauschen darf:

$$\varDelta\varphi = \frac{s}{b_0}\left(1 - \frac{1}{2}k^2\cos^2\varphi + Gl_4\right) \cdot \qquad (2)$$

Setzt man dies in (1) ein, zugleich aber $\varDelta\varphi\left(1 - \frac{1}{6}\varDelta\varphi^2\right)$ für $\sin \varDelta\varphi$ und $2\varDelta\varphi$ für $\sin 2\varDelta\varphi$, so ergiebt sich, indem die in k^2 multiplizierten Glieder verschwinden:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}s\sin^2\beta_0\left\{1 - 3\cos 2\varphi\left[1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{a_0^2}\right] + Gl_4\right\} \cdot \qquad (3)$$

Beachtet man, dafs $2\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ist und führt mittelst der (4) S. 248 die Breiten der Endpunkte ein, so folgt:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}s \left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos^2\beta_1 \sin^2\alpha_{1.2} - 3\sin\beta_1 \sin\beta_2\left[1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{a_0^2}\right] \\ -3\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\left[1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{a_0^2}\right] + Gl_4 \end{array} \right\} \cdot \qquad (4)$$

Man kann hierin für $\cos^2\beta_1 \sin^2\alpha_{1.2}$ auch $\cos^2\beta_2 \sin^2\alpha_{2.1}$ schreiben.

§ 14. Formeln für kleine Distanzen. Wir führen hier die geographische Breite ein und erhalten aus den Formeln (19), (20) und (21) des § 12 und aus (4) des § 13:

$$\delta s = \frac{\delta a_0}{a_0} s - \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \mathfrak{S}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} s \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(\frac{1}{W_1^2} \cos^2 B_1 \sin^2 \alpha_{1.2} \text{ oder } \frac{1}{W_2^2} \cos^2 B_2 \sin^2 \alpha_{2.1} \right) \\ - \frac{3}{W_1 W_2} \left\{ \begin{array}{l} \sin B_1 \sin B_2 [1-e^2] \\ + \cos B_1 \cos B_2 \cos \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1} \end{array} \right\} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{a_0^2} \right] + Gl_4 \end{array} \right\}; \tag{2}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{1.2}} = \varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{W_1^2} \cos^2 B_1 \sin \alpha_{1.2} \cos \alpha_{1.2} \\ + \frac{1}{W_2^2} \frac{s}{\mathfrak{m}} \cos^2 B_2 \sin \alpha_{2.1} \cos \alpha_{2.1} \end{array} \right\}; \tag{3}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{2.1}} = \varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{W_1^2} \frac{s}{\mathfrak{m}} \cos^2 B_1 \sin \alpha_{1.2} \cos \alpha_{1.2} \\ + \frac{1}{W_2^2} \cos^2 B_2 \sin \alpha_{2.1} \cos \alpha_{2.1} \end{array} \right\}; \tag{4}$$

$$\log \left[1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{a_0^2} \right] = - \frac{M}{6 a_0^2} s^2 + Gl_4; \quad \log \frac{s}{\mathfrak{m}} = \frac{M}{6 a_0^2} s^2 + Gl_4. \tag{5}$$

Man kann auch noch die mittlere Breite und das mittlere Azimut einführen; wir finden dies aber nicht vorteilhaft, sobald die Glieder mit s^2 berücksichtigt werden müssen. Darf man diese jedoch noch weglassen, was für Seiten meſsbarer Dreiecke in der Regel der Fall sein wird, so kann man einfacher schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} \delta s = \frac{\delta a_0}{a_0} s - \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \mathfrak{S}, \\ \mathfrak{S} = \frac{s}{W^2} (2 \cos^2 B \cos^2 \alpha - [1 - e^2] \sin^2 B + \cdots); \\ \underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{2.1}} = \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \frac{\varrho''}{W^2} (2 \cos^2 B \sin \alpha \cos \alpha + \cdots); \\ B = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad \alpha = \frac{\alpha_{1.2} + \alpha_{2.1} - 180^\circ}{2}, \\ \text{W mit Argument B.} \end{array} \right\} \tag{6}$$

In den Parenthesen sind hier also die Glieder mit $s^2 : a_0^2$ vernachlässigt, e^2 aber ist berücksichtigt.

§ 15. Differentialformeln für den Endpunkt P_2 einer geodätischen Linie in Bezug auf Änderungen von a_0 und e^2. Diese

kann man aus denen des § 12 herleiten, indem man nach erfolgter Änderung von a_0 und e^2 unter Annahme konstanter geographischer Positionen sich s und $\alpha_{1.2}$ um die negativen Werte der vorher erlittenen Änderungen wieder geändert denkt und nach S. 280 (5) und (6) die eintretenden Änderungen von β_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ ermittelt. Kehren wir also in den letztgenannten Formeln (6) die Vorzeichen um und behalten die reduzierte Breite bei, so ergiebt sich zunächst:

$$\delta\beta_2 = -\frac{\delta s}{a_0 w_2}\cos\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2}\sin\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}$$

$$\delta L_{1.2} = +\frac{\delta s}{a_0}\sec\beta_2\sin\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\sec\beta_2\cos\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}$$

$$\delta\alpha_{2.1} = -\frac{\delta s}{a_0 w_2}\tan\beta_2\sin\alpha_{2.1} - \left\{\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2}\tan\beta_2\cos\alpha_{2.1}\right\}\delta\alpha_{1.2}.$$

Hierin aber setzen wir für δs und $\delta\alpha_{1.2}$ die Werte (18) und (20) S. 289 und fügen zu $\delta\alpha_{2.1}$ noch den Ausdruck nach (21) S. 289 bei.

Dies Verfahren giebt:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\delta\beta_2} &= -\varrho''\frac{\delta a_0}{a_0}\frac{s}{a_0 w_2}\cos\alpha_{2.1} \\ &+ \varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\frac{1}{w_2}\left\{\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\cos\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\sin\alpha_{2.1}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\delta L_{1.2}} &= +\varrho''\frac{\delta a_0}{a_0}\frac{s}{a_0}\sec\beta_2\sin\alpha_{2.1} \\ &+ \varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\left\{-\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\sec\beta_2\sin\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\sec\beta_2\cos\alpha_{2.1}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} &= -\varrho''\frac{\delta a_0}{a_0}\frac{s}{a_0 w_2}\tan\beta_2\sin\alpha_{2.1} \\ &+ \varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\frac{1}{w_2}\left\{\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\tan\beta_2\sin\alpha_{2.1} - \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\tan\beta_2\cos\alpha_{2.1} + \mathfrak{U}w_2\right\}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T} &= (\mathfrak{m}\sin\varphi_1 + s\sin\varphi_2)\sin\beta_0\cos\beta_0 \\ \mathfrak{U} &= \left\{\begin{aligned} &\left(\sin\varphi_1 + \frac{s}{\mathfrak{m}}\sin\varphi_2\right)\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right] \\ &- (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\left[\frac{s}{\mathfrak{m}} - 1\right]\end{aligned}\right\}\sin\beta_0\cos\beta_0.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Hierzu sind für $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{S}$ die Ausdrücke (5) S. 274 und (1) S. 290 zu beachten, wenn es sich um beliebig grofse Distanzen handelt.

Ist $s : a_0$ eine Gröfse 1. Ordnung, so genügt die Formel (4) S. 290 für $\mathfrak{S}$ und der Ausdruck $s\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{a_0^2} + Gl_4\right)$ für $\mathfrak{m}$, vergl. § 11 S. 283.

Vorstehende Formeln lassen sich in eine wesentlich andere Gestalt bringen, indem man die vollständigen Ausdrücke für $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{m}$ und s nach (19) S. 289, (1) S. 273 und (14) S. 288 substituiert.

Zu derselben Modifikation gelangt man auch durch direkte Entwicklung der Differentialformeln, wie sich bei einer zur Kontrolle angestellten Rechnung ergab. Die Formeln lauten:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{\delta \beta_2} = -\varrho'' \dfrac{\delta a_0}{a_0} \dfrac{s}{a_0 w_2} \cos \alpha_{2.1} \\ + \varrho'' \dfrac{1}{2} \dfrac{\delta e^2}{1-e^2} \dfrac{1}{w_2} \left\{ \begin{array}{l} -\mathfrak{A}(\sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\alpha_{2.1} + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\alpha_{1.2}) \\ + (\mathfrak{B} - [1 - \delta \cos^2\beta_0 \cos^2\varphi_1]\mathfrak{C}) \cos\alpha_{2.1} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{\delta L_{1.2}} = +\varrho'' \dfrac{\delta a_0}{a_0} \dfrac{s}{a_0} \sec\beta_2 \sin\alpha_{2.1} \\ + \varrho'' \dfrac{1}{2} \dfrac{\delta e^2}{1-e^2} \sec\beta_2 \sin\alpha_{2.1} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \sin\beta_1 \sin\beta_2 - \mathfrak{B} \sin^2\beta_2 \\ + (1 + \delta \sin^2\beta_1 \sin^2\varphi_2)\, \mathfrak{C} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{2.1}} = -\varrho'' \dfrac{\delta a_0}{a_0} \dfrac{s}{a_0 w_2} \tan\beta_2 \sin\alpha_{2.1} \\ + \varrho'' \dfrac{1}{2} \dfrac{\delta e^2}{1-e^2} \sec\beta_2 \sin\alpha_{2.1} \dfrac{1}{w_2} \left\{ \begin{array}{l} -\mathfrak{A} \sin\beta_1 + \mathfrak{B} \sin\beta_2 \\ -[1 - \delta\cos^2\beta_0 \cos^2\varphi_1]\,\mathfrak{C} \sin\beta_2 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (7)$$

$$\mathfrak{A} = w_2 \sin \varDelta\varphi \quad (8)$$

$$\mathfrak{B} = (1 - e^2) H + (w_1 - w_2) \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \quad (9)$$

$$\mathfrak{C} = (1 - e^2) J \sin^2\beta_0 \,. \quad (10)$$

δ hat in den Parenthesen rechts die frühere Bedeutung als $e^2 : (1 - e^2)$, im übrigen aber bezeichnet es die Differentiation. J und H sind die früher eingeführten Integrale:

$$J = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^2\varphi}{w}\, d\varphi, \qquad H = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{w}\, d\varphi.$$

Ersteres ist bereits S. 273 (3) entwickelt; letzteres setzt sich aus J und dem für $\mathfrak{S}$ S. 290 entwickelten Integral zusammen. Behandelt man überhaupt $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ wie $\mathfrak{S}$, so wird erhalten:

$$\mathfrak{B} = \sqrt{1-e^2} \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{1}{4}k^2\right) \varDelta\varphi - \frac{1}{4} k^2 \cos 2\varphi \sin\varDelta\varphi \\ + \frac{1}{4} k^2 \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi \sin\varDelta\varphi + \cdots \end{array} \right\} \quad (9^*)$$

$$\mathfrak{C} = \sqrt{1 \ldots} \left\{ \begin{array}{l} \ldots - \frac{1}{2} k^2\Big) \cos 2\varphi \sin\varDelta\varphi \\ + \cdots \end{array} \right\} \quad (10^*)$$

§ 16. Vorstehende Formeln für kleine Distanzen. Wir führen hier die geographische Breite ein und erhalten aus den Formeln (1) bis (3) des vorigen Paragraphen mit Beachtung der Relationen (5) S. 280:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2} &= -\varrho'' \frac{\delta a_0}{a_0} \frac{s}{a_0} \frac{W_2^3}{1-e^2} \cos\alpha_{2.1} \\
&+\varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \frac{W_2^3}{1-e^2} \left\{ \frac{\mathfrak{S}}{a_0} \cos\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0} \sin\alpha_{2.1} \right\}, \\
\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_{1.2}} &= +\varrho'' \frac{\delta a_0}{a_0} \frac{s}{a_0} W_2 \sec B_2 \sin\alpha_{2.1} \\
&+\varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} W_2 \left\{ -\frac{\mathfrak{S}}{a_0} \sec B_2 \sin\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0} \sec B_2 \cos\alpha_{2.1} \right\}, \\
\underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{2.1}} &= -\varrho'' \frac{\delta a_0}{a_0} \frac{s}{a_0} W_2 \tan B_2 \sin\alpha_{2.1} \\
&+\varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} W_2 \left\{ \frac{\mathfrak{S}}{a_0} \tan B_2 \sin\alpha_{2.1} - \frac{\mathfrak{T}}{a_0} \tan B_2 \cos\alpha_{2.1} + \frac{1}{W_2} \mathfrak{U} \right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nach (2) S. 291 ist für den Fall, dafs $s : a_0$ eine Gröfse 1. Ordnung ist:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} s \left\{ \begin{array}{c} 1 - \left(\frac{1}{W_1^2} \cos^2 B_1 \sin^2 \alpha_{1.2} \text{ oder } \frac{1}{W_2^2} \cos^2 B_2 \sin^2 \alpha_{2.1} \right) \\ -\frac{s}{W_1 W_2} \left\{ \begin{array}{c} \sin B_1 \sin B_2 [1 - e^2] \\ + \cos B_1 \cos B_2 \cos\alpha_{1.2} \cos\alpha_{2.1} \end{array} \right\} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{a_0^2} \right] + Gl_4. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Es wird ferner mit $\mathfrak{m} = s\left(1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{a_0^2} + Gl_4\right)$ erhalten:

$$\mathfrak{T} = s \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{W_1^2} \cos^2 B_1 \cos\alpha_{1.2} \sin\alpha_{1.2} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{a_0^2} \right] \\ + \frac{1}{W_2^2} \cos^2 B_2 \cos\alpha_{2.1} \sin\alpha_{2.1} + Gl_4 \end{array} \right\}, \quad (3)$$

$$\mathfrak{U} = \frac{s}{2a_0^2} \mathfrak{T} - \frac{s^3}{6a_0^3} \sin B_1 \cos B_1 \sin\alpha_{1.2} + Gl_4. \quad (4)$$

Handelt es sich um Seiten mefsbarer Dreiecke, so wird man in den geschlungenen Parenthesen der beiden ersten Formeln (1) die Glieder mit $s^3 : a_0^3$ und in der 3. Formel (1) bereits solche mit $s^2 : a_0^2$ vernachlässigen können. Dann wird einfacher:

$$\left.\begin{array}{l}
\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2} = -\varrho'' \dfrac{\delta a_0}{a_0} \dfrac{s}{a_0} \dfrac{W_2^{\,3}}{1-e^2} \cos \alpha_{2.1} \\[2ex]
-\varrho'' \dfrac{1}{2} \dfrac{\delta e^2}{1-e^2} \dfrac{s}{a_0} \dfrac{W_2}{1-e^2} \dfrac{W_2^{\,2}}{W^2} \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 B \cos \alpha_{1.2} \\ -(1-[2-e^2]\sin^2 B)\cos \alpha_{2.1} + \cdots \end{array} \right\}, \\[2ex]
\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_{1.2}} = +\varrho'' \dfrac{\delta a_0}{a_0} \dfrac{s}{a_0} W_2 \sec B_2 \sin \alpha_{2.1} \\[2ex]
-\varrho'' \dfrac{1}{2} \dfrac{\delta e^2}{1-e^2} \dfrac{s}{a_0} \dfrac{\sec B_2}{W_2} \dfrac{W_2^{\,2}}{W^2} \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 B \sin \alpha_{1.2} \\ +(1-[2-e^2]\sin^2 B)\sin \alpha_{2.1} + \cdots \end{array} \right\}, \\[2ex]
\underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{2.1}} = -\varrho'' \dfrac{\delta a_0}{a_0} \dfrac{s}{a_0} W_2 \tan B_2 \sin \alpha_{2.1} \\[2ex]
+\varrho'' \dfrac{1}{2} \dfrac{\delta e^2}{1-e^2} \dfrac{s}{a_0} \dfrac{\tan B_2}{W_2} \dfrac{W_2^{\,2}}{W^2} \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 B \sin \alpha_{1.2} \\ +(1-[2-e^2]\sin^2 B)\sin \alpha_{2.1} + \cdots \end{array} \right\},
\end{array}\right\} \quad (5)$$

$$B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2), \quad W \text{ mit Argument } B.$$

In den geschlungenen Parenthesen der beiden ersten Formeln sind die Glieder mit $s^2 : a_0^2$ vernachlässigt, in der Formel für $\delta \alpha_{2.1}$ bereits solche mit $s : a_0$.

Differentialformeln, die den (5), (6) und (7) des vorigen Paragraphen entsprechen, entwickelte *Bessel* 1837 in den Astronom. Nachr. Bd. 14 S. 269 u. ff., [*Abhandlungen* Bd. 3 S. 34 (27)]. Er ging zum Teil anders vor, wie wir (abgesehen davon, dafs wir hier überhaupt die direkte Ableitung nicht mitgeteilt haben), insofern er nämlich in den Integralen nicht φ und λ, sondern $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ als Variable betrachtete. Doch ist das nicht vorteilhaft.

Unsere strengen Formeln für $\delta\beta_2$ und $\delta\alpha_{1.2}$ stimmen mit den seinigen nach gehöriger Umformung, $\delta L_{1.2}$ dagegen nicht. Es ist *Bessel* hier ein Mifsverständnis passiert. Differenziert man nämlich die Integrale für s und $L_{1.2}$, so entsteht in beiden ein $\delta\beta$ (vergl. z. B. S. 266 u. 268). Diese sind aber verschieden, denn während das eine konstantes φ (bei *Bessel* $\Delta\varphi$), das andere konstantes λ (bei *Bessel* $\Delta\lambda$) voraussetzt, nimmt *Bessel* in beiden Fällen den ersteren Wert. Zufolge dieses Umstandes wird bei ihm in $\delta L_{1.2}$ der Koefficient von δe^2 um ein in e^2 multipliziertes Glied fehlerhaft (der 2. Teil seines P' mufs nämlich, um richtig zu werden, unter dem Integralzeichen mit $\cos u \sec u' \cos \sigma \sec \omega$ multipliziert werden). Es nimmt auch dieser Koefficient bei der Reihenentwicklung nur infolge des Versehens eine sehr komplizierte Form an, doch werden die Resultate der numerischen Rechnung nicht erheblich beeinflufst.

Aufserdem ist im 1. Glied rechter Hand der 2. Formel (27) S. 34 bei *Bessel* das eine der beiden r des Nenners zu streichen.

[Es mag noch bemerkt werden, dafs a. a. O. S. 35 1. Spalte u. in der zu

einer andern Entwicklung dienenden Formel für $d\sigma$ das von $\delta\alpha'$ abhängige Glied fehlt, was indes nur die Glieder mit e^2 beeinflufst.]

Jordan giebt Bd. 2 S. 441 seines *Handbuchs der Vermessungskunde* abgekürzte Differentialformeln, welche aufser s nicht $\alpha_{1.2}$ und B_1, sondern das arithmische Mittel der Breiten und Azimute als gegeben voraussetzen.

§ 17. Reihenentwicklungen f. d. Übertragung geographischer Koordinaten nach Potenzen von s. Man hat im allgemeinen nach *Taylors* Satz:

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= B_1 \quad + \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 \cdot \frac{s}{1} + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 \cdot \frac{s^2}{1.2} + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_1 \cdot \frac{s^3}{1.2.3} + \cdots \\ L_2 &= L_1 \quad + \left(\frac{dL}{ds}\right)_1 \cdot \frac{s}{1} + \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_1 \cdot \frac{s^2}{1.2} + \left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_1 \cdot \frac{s^3}{1.2.3} + \cdots \\ \alpha_{2.1} &= \alpha_{1.2} + 180^0 + \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_1 \cdot \frac{s}{1} + \left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)_1 \cdot \frac{s^2}{1.2} + \left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{1.2.3} + \cdots, \end{aligned}\right\} (1)$$

wobei der Index 1 an den Differentialquotienten bedeutet, dafs nach erfolgter Differentiation die Werte von B, L und α für Punkt P_1 einzuführen sind. α ist so zu verstehen, dafs es das Azimut der von P_1 in Richtung nach P_2 wachsenden Linie anzeigt.

Setzt man in den Formeln (6) S. 280 $\delta\alpha_{1.2} =$ null, so erhält man ohne Schwierigkeit, wenn für δ als Zeichen der Differentiation jetzt d geschrieben und der Index 2 unterdrückt wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= -\frac{W^3 \cos\alpha}{a_0(1-e^2)} = -\frac{W^3(1+\delta)\cos\alpha}{a_0} \\ \frac{dL}{ds} &= +\frac{W}{a_0} \sec B \sin\alpha \\ \frac{d\alpha}{ds} &= -\frac{W}{a_0} \tan B \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Das hier noch auftretende δ ist die früher schon benutzte Gröfse $e^2 : (1 - e^2)$, deren Einführung hier vorteilhaft ist. Man hat nun weiter:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \qquad (3)$$

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dB}\frac{dB}{ds} = -\frac{e^2 \sin 2B}{2W}\frac{dB}{ds} = \delta\frac{W^2}{2a_0} \sin 2B \cos\alpha \qquad (4)$$

und

$$\frac{d^2B}{ds^2} = -\frac{W^2}{a_0}(1+\delta)\left\{3\cos\alpha\frac{dW}{ds} - W\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}\right\}$$

$$\frac{d^2L}{ds^2} = \frac{1}{a_0}\sec B\left\{\sin\alpha\frac{dW}{ds} + W\tan B\sin\alpha\frac{dB}{ds} + W\cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}\right\}$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = -\frac{1}{a_0}\left\{\begin{array}{c}\tan B \sin\alpha \dfrac{dW}{ds} + W\sec^2 B \sin\alpha \dfrac{dB}{ds} \\ + W\tan B\cos\alpha \dfrac{d\alpha}{ds}\end{array}\right\}.$$

Substituiert man hier die (2) und (4) und beachtet auch die Relation

$$W^2(1+\delta) = 1 + \delta\cos^2 B. \tag{5}$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2B}{ds^2} &= -\frac{W^4}{a_0^2}(1+\delta)\left\{\tan B\sin^2\alpha + \frac{3}{2}\delta\sin 2B\cos^2\alpha\right\}\\
\frac{d^2L}{ds^2} &= -\frac{W^2}{a_0^2}\tan B\sec B\sin 2\alpha\\
\frac{d^2\alpha}{ds^2} &= +\frac{W^2}{2a_0^2}\sin 2\alpha\left\{1 + 2\tan^2 B + \delta\cos^2 B\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die nochmalige Differentiation giebt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^3B}{ds^3} &= \frac{W^5}{a_0^3}(1+\delta)\cos\alpha\{[1+3\tan^2 B]\sin^2\alpha + \delta(3\cos 2B\cos^2\alpha\\
&\quad + [1-10\sin^2 B]\sin^2\alpha) - 3\delta^2[6\sin^2 B - 1]\cos^2 B\cos^2\alpha\}\\
\frac{d^3L}{ds^3} &= \frac{2W^3}{a_0^3}\sec B\sin\alpha\{[1+3\tan^2 B]\cos^2\alpha\\
&\quad - \tan^2 B\sin^2\alpha + \delta\cos^2 B\cos^2\alpha\}\\
\frac{d^3\alpha}{ds^3} &= \frac{W^3}{a_0^3}\tan B\sin\alpha\{-[5+6\tan^2 B]\cos^2\alpha\\
&\quad + [1+2\tan^2 B]\sin^2\alpha - \delta\cos^2 B\cos 2\alpha + 4\delta^2\cos^4 B\cos^2\alpha\}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bei der Bildung noch höherer Differentialquotienten vernachlässigen wir e^2 und δ und erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^4B}{ds^4} &= \frac{1}{a_0^4}\tan B\sin^2\alpha\{-4[2+3\tan^2 B]\cos^2\alpha\\
&\quad + [1+3\tan^2 B]\sin^2\alpha + \cdots\}\\
\frac{d^4L}{ds^4} &= \frac{8}{a_0^4}\tan B\sec B\cos\alpha\sin\alpha\{-[2+3\tan^2 B]\cos^2\alpha\\
&\quad + [1+3\tan^2 B]\sin^2\alpha + \cdots\}\\
\frac{d^4\alpha}{ds^4} &= \frac{1}{a_0^4}\cos\alpha\sin\alpha\{[5+28\tan^2 B + 24\tan^4 B]\cos^2\alpha\\
&\quad - [1+20\tan^2 B + 24\tan^4 B]\sin^2\alpha + \cdots\}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^5B}{ds^5} &= \frac{1}{a_0^5}\cos\alpha\sin^2\alpha\{[8+60\tan^2 B + 60\tan^4 B]\cos^2\alpha\\
&\quad - [1+30\tan^2 B + 45\tan^4 B]\sin^2\alpha + \cdots\}\\
\frac{d^5L}{ds^5} &= \frac{8}{a_0^5}\sec B\sin\alpha\{[2+15\tan^2 B + 15\tan^4 B]\cos^4\alpha\\
&\quad - [1+20\tan^2 B + 30\tan^4 B]\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\
&\quad + [1+3\tan^2 B]\tan^2 B\sin^4\alpha + \cdots\}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\frac{d^5\alpha}{ds^5} = \frac{1}{a_0^5} \tan B \sin\alpha \left\{ \begin{aligned} &- [61 + 180 \tan^2 B + 120 \tan^4 B] \cos^4\alpha \\ &+ [58 + 280 \tan^2 B + 240 \tan^4 B] \sin^2\cos^2\alpha \\ &- [1 + 20 \tan^2 B + 24 \tan^4 B] \sin^4\alpha + \cdots \}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Bezeichnen wir

$$\left. \begin{aligned} &\frac{W_1}{a_0} s \cos\alpha_{1.2} \quad \text{mit } u \\ &\frac{W_1}{a_0} s \sin\alpha_{1.2} \quad \text{mit } v \\ &\tan B_1 \qquad\quad \text{mit } t, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

so findet sich mittelst der entwickelten Differentialquotienten aus den Reihenentwicklungen (1):

$$\underset{\text{in Sek.}}{B_2} = \underset{\text{in Sek.}}{B_1} - \varrho'' W_1^2 (1+\delta) \left\{ \begin{aligned} &u + \frac{1}{2} t v^2 - \frac{1}{6} [1 + 3t^2) u v^2 + \frac{1}{6} [2 + 3t^2] t u^2 v^2 \\ &- \frac{1}{24} [1 + 3t^2] t v^4 - \frac{1}{30} [2 + 15t^2 + 15t^4] u^3 v^2 \\ &+ \frac{1}{120} [1 + 30t^2 + 45t^4] u v^4 + \frac{3}{4} \delta \sin 2B_1 u^2 \\ &- \delta \left(\frac{1}{2} \cos 2B_1 u^3 + \frac{1}{6} [5 \cos 2B_1 - 4] u v^2 \right) + Gl_6 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{L_2} = \underset{\text{in Sek.}}{L_1} + \varrho'' \sec B_1 \left\{ \begin{aligned} &v - t u v + \frac{1}{3} [1 + 3t^2] u^2 v - \frac{1}{3} t^2 v^3 \\ &- \frac{1}{3} [2 + 3t^2] t u^3 v + \frac{1}{3} [1 + 3t^2] t u v^3 \\ &+ \frac{1}{15} [1 + 3t^2] t^2 v^5 + \frac{1}{15} [2 + 15t^2 + 15t^4] u^4 v \\ &- \frac{1}{15} [1 + 20t^2 + 30t^4] u^2 v^3 + \frac{1}{3} \delta \cos^2 B_1 u^2 v + Gl_6 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{2.1}} = \underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{1.2}} + 180^0 - \varrho'' \left\{ \begin{aligned} &t v - \frac{1}{2} [1 + 2t^2] u v - \frac{1}{6} [1 + 2t^2] t v^3 \\ &+ \frac{1}{6} [5 + 6t^2] t u^2 v - \frac{1}{24} [5 + 28t^2 + 24t^4] u^3 v \\ &+ \frac{1}{24} [1 + 20t^2 + 24t^4] u v^3 \\ &+ \frac{1}{120} [61 + 180t^2 + 120t^4] t u^4 v \\ &- \frac{1}{120} [58 + 280t^2 + 240t^4] t u^2 v^3 \\ &+ \frac{1}{120} [1 + 20t^2 + 24t^4] t v^5 - \frac{1}{2} \delta \cos^2 B_1 u v \\ &+ \frac{1}{12} \delta \sin 2B_1 (u^2 - v^2) v + Gl_6. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Setzt man hierin e^2 und δ gleich null, so gelangt man zu Formeln, die sich aus den Entwicklungen S. 126 u. ff. ableiten lassen.

Für $\alpha_{1.2} = 0^0$ bezw. 90^0 erhält man aus (11), (12) und (13) Formeln, die zur Übertragung von Breite, Länge und Azimut dienen, sobald die *rechtwinkligen geodätischen Koordinaten* x und y von P_2 in Bezug auf P_1 und seinen Meridian gegeben sind. s geht nämlich in x über für $\alpha_{1.2} = 0^0$, in y für $\alpha_{1.2} = 90^0$. Der Fufspunkt der Ordinate y dient, wie leicht zu sehen, als Zwischenpunkt für die Übertragung der geographischen Breite.

Bei Angabe der Ordnung der vernachlässigten Glieder in (11) bis (13) ist vorausgesetzt, dafs die Gröfse $t = \tan B_1$, welche im allgemeinen in irgend einem Gliede in derselben Potenz auftritt, wie s, nicht die Einheit so sehr überschreitet, dafs dadurch der Charakter der Gröfsenordnung wesentlich verändert wird. Zur raschen Konvergenz gehört unbedingt ein geringer Betrag nicht allein von $\frac{s}{a_0}$, sondern auch von $\frac{s}{a_0} \tan B_1$.

Um in jedem Falle eine Vorstellung von der Genauigkeit zu gewinnen, hat man den Rest nach S. 25 (1) mittelst des ersten der vernachlässigten Differentialquotienten zu bilden, oder nach (2) mittelst des höchsten der berücksichtigten Differentialquotienten. Im letztern Falle wird man diejenige Änderung der höchsten angesetzten Glieder prüfen, welche durch Anwendung der Werte von B und α für einen Punkt zwischen P_1 und P_2 (anstatt derjenigen für P_1) im Maximum entstehen kann.

Es läfst sich leicht erkennen, dafs für $s = 0,1\,a_0$ die Formeln bei einigem Abstand vom Äquator B_2, L_2 und $\alpha_{2.1}$ um Zehntelsekunden fehlerhaft geben können, dafs aber andrerseits bei abnehmendem Werte von s die Genauigkeit sich rasch steigert. Bei $s = 0,05\,a_0$ werden in mäfsigen Breiten die Hundertstelsekunden sicher erhalten.

Die Anwendung der Formeln (11), (12) und (13) kann nur dann von Nutzen sein, wenn von einem Punkte nicht *eine*, sondern *mehrere* Linien ausgehen, für welche die Übertragung der geographischen Koordinaten auszuführen ist. Dies trifft zu für P_1 als Zentrum von Polarkoordinaten, auch einigermafsen für Stationen dichter Dreiecksnetze. In diesen Fällen tritt die mühsame Arbeit der Berechnung der vielen Funktionen von B_1 zurück, weil sie sich gewissermafsen auf mehrere Linien verteilt.

Ist s eine Linie von der Länge der Seiten mefsbarer Dreiecke, also etwa $\leq 0,01\,a_0$, so wird man in obigen Formeln in der Regel noch die höchsten angesetzten Glieder ohne Gefährdung der 4. Decimalstelle der Sekunden von B_2, L_2 und $\alpha_{2.1}$ weglassen können.

Die genauere Untersuchung läfst sich ohne Weitläufigkeit nicht

allgemein erledigen. Da man sie in einem bestimmten Falle aber leicht erledigen kann und auch nicht entbehren wollen wird, so haben wir um so mehr Ursache, auf eine solche nicht einzugehen.

Auf die Bedeutung der Formeln (11) bis (13) für den Fall, dafs P_1 Zentrum von Polarkoordinaten ist, wurde Verfasser durch das Werk: *Die bayerische Landesvermessung* u. s. w. 1873 S. 517 u. ff. aufmerksam. Darin ist zunächst eine Abhandlung *Soldners* von 1810 (vergl. a. a. O. S. 262) abgedruckt, welche mit einer Aufstellung allgemein gültiger Formeln zur Übertragung geographischer Koordinaten beginnt, wobei aber nur die 1. Potenz der Abplattung berücksichtigt ist. Hieran schliefst *Soldner* Reihenentwicklungen, geht jedoch nur bis s^3. Weiterhin folgt eine Abhandlung von *C. v. Orff*, die mit Umgehung der allgemeinen Formeln direkt an die Differentialformeln anknüpft und noch s^5 (ausgenommen in $\alpha_{2.1}$) berücksichtigt. Unsere Formeln stimmen bis auf eine Abweichung im 5. Differentialquotient von B_2 nach s mit den *Orff*schen Resultaten überein; in der Entwicklung haben wir indes anstatt e^2 zur Vereinfachung δ benutzt und anstatt der *drei* Gröfsen s, $\cos\alpha_{1.2}$ und $\sin\alpha_{1.2}$ die *zwei* Gröfsen u und v eingeführt. (*Orff* führt noch rechtwinklige Koordinaten ein, auf deren Verwendung zur Übertragung geographischer Koordinaten wir an späterer Stelle gelangen.)

Im 80. Bd. der *Comptes rendus* der franz. Akademie der Wiss. giebt 1875 auf S. 36 u. ff. *Trepied* Formeln, welche unseren Formeln (11) bis (13) entsprechen, ohne jedoch die Glieder mit s^5 zu enthalten und in die einfachste Form durch Einführung von δ und u, v gebracht zu sein. Diese Formeln sind hervorgegangen aus einer Ergänzung der 1806 in den Memoiren der Akademie von *Legendre* gegebenen Formeln, welche s^3 und e^2s^2 berücksichtigen. Sie sind aber nicht völlig korrekt. In der Formel für B_2 mufs im Gliede mit s^2 der Nenner ϱN anstatt ϱ^2 angebracht werden. Aufserdem sind die Glieder in e^4 irrig. Dies zeigt auch eine Entwicklung von *Levret* im 76. Bde. der *Comptes rendus* S. 410 u. ff., welche die Glieder bis s^3 incl. *vollständig* giebt und mit der wir (nach Berichtigung eines Druckfehlers im Gliede mit s^2 in der Azimutformel) übereinstimmen.

§ 18. Zahlenbeispiel I. Gegeben: $B_1 = 52^0\,30'\,16{,}7''$ (Berlin)

$$s = 529979{,}58^m \quad \alpha_{1.2} = 239^0\,33'\,0{,}689''.$$

Wir rechnen mit 7ziffrigen Logarithmen und setzen die 8. Decimalstelle nach den Proportionalteilen an. Man hat zunächst, abgesehen von den speziellen Werten für s und $\alpha_{1.2}$:

$$\begin{aligned}
\log W_1 &= 9{,}9990857.5 - 10\\
\log \frac{W_1}{a_0} &= 3{,}1944422.9 - 10\\
\log(1+\delta) &= 0{,}0029083.6\\
\log \varrho'' &= 5{,}3144251.3\\
\log \delta &= 7{,}82732 - 10
\end{aligned}$$

$$\log t = 0{,}1150923.1$$
$$t^2 = 1{,}69897$$
$$t^4 = 2{,}886$$
$$1 + 2t^2 = 4{,}39794 = [0{,}643249]$$
$$1 + 3t^2 = 6{,}09691 = [0{,}785110]$$
$$2 + 3t^2 = 7{,}0969 = [0{,}85107]$$
$$5 + 6t^2 = 15{,}1938 = [1{,}18167]$$
$$2 + 15t^2 + 15t^4 = 70{,}78 = [1{,}8499]$$
$$5 + 28t^2 + 24t^4 = 121{,}83 = [2{,}0858]$$
$$1 + 30t^2 + 45t^4 = 181{,}85 = [2{,}2597]$$
$$1 + 20t^2 + 30t^4 = 121{,}56 = [2{,}0848]$$
$$1 + 20t^2 + 24t^4 = 104{,}24 = [2{,}0180]$$
$$58 + 280t^2 + 240t^4 = 1226{,}4 = [3{,}0886]$$
$$61 + 180t^2 + 120t^4 = 713{,}1 = [2{,}8532]$$
$$\log \cos B_1 = 9{,}7844012.8 - 10$$
$$\log \cos^2 B_1 = 9{,}5688 - 10$$
$$\log \sin 2B_1 = 9{,}9849 - 10$$
$$\log \cos 2B_1 = 9{,}4133_n - 10$$
$$\log [5 \cos 2B_1 - 4] = 0{,}7239_n .$$

Hiermit findet sich aus den Formeln (11), (12) und (13) S. 298:

$$\underset{\text{in Sek.}}{B_2} = 52^0\, 30'\, 16{,}7'' + [5{,}3155049.9_n]\, u + [5{,}1295673_n]\, v^2$$
$$+ [5{,}322464]\, uv^2 + [5{,}50352_n]\, u^2v^2 + [4{,}8355]\, v^4$$
$$+ [5{,}6883]\, u^3v^2 + [5{,}4960_n]\, uv^4 + [3{,}0028_n]\, u^2$$
$$+ [2{,}2551_n]\, u^3 + [3{,}0885_n]\, uv^2 + \cdots$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{L_2} = \underset{\text{in Sek.}}{L_1} + [5{,}5300238.5]\, v + [5{,}6451162_n]\, uv$$
$$+ [5{,}838013]\, u^2v + [5{,}283088_n]\, v^3 + [6{,}01906_n]\, u^3v$$
$$+ [5{,}95310]\, uv^3 + [5{,}3692]\, v^5 + [6{,}2038]\, u^4v$$
$$+ [6{,}4387_n]\, u^2v^3 + [2{,}4490]\, u^2v + \cdots$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{2.1}} = \underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{1.2}} + 180^0 + [5{,}4295174.4_n]\, v + [5{,}656644]\, uv$$
$$+ [5{,}294615]\, v^3 + [5{,}83304_n]\, u^2v + [6{,}0200]\, u^3v$$
$$+ [5{,}9522_n]\, uv^3 + [6{,}2035_n]\, u^4v + [6{,}4389]\, u^2v^3$$
$$+ [5{,}3683_n]\, v^5 + [2{,}4095]\, uv + [2{,}4074_n]\, (u^2 - v^2)\, v + \cdots$$

Mit den speziellen Werten von s und $\alpha_{1.2}$ hat man jetzt:

$$\left.\begin{aligned} \log s &= 5{,}7242591.6 \\ \log\cos\alpha_{1.2} &= 9{,}7048223.3_n - 10 \\ \log\sin\alpha_{1.2} &= 9{,}9355442.5_n - 10 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \log u &= 8{,}6235237.8_n - 10 \\ \log v &= 8{,}8542457.0_n - 10. \end{aligned}$$

	$B_2 =$		$L_2 - L_1 =$		$\alpha_{2.1} =$
	52° 30′ 16,7″	—	6° 43′ 45,32″		59° 33′ 0,69″
+	2 24 50,18	—	22 7,05	+	5 20 20,43
—	11 28,74	—	1 26,96	+	22 42,74
—	45,13	+	1 10,12	—	1 12,00
—	2,88	—	5,54	+	1 25,97
+	1,79	+	13,78	+	5,56
—	0,19	—	0,44	—	13,75
+	0,34	—	0,36	+	0,36
—	1,78	+	1,77	—	1,77
+	0,01	—	0,04	+	0,44
+	0,26			+	0,77
				—	0,03
	54° 42′ 50,56″	—	7° 6′ 0,04″		65° 16′ 9,41″
	anstatt 50,60		anstatt 0,00		anstatt 9,37 .

Für die genauen Angaben ist S. 247 zu vergleichen. Was den 1. Horizontalstrich in obigen 3 Kolonnen betrifft, so ist zu erwähnen, dafs unterhalb desselben die von δ abhängigen Glieder sich befinden.

§ 19. Zahlenbeispiel II. Gegeben: $B_1 = 57^0$

$$s = 120000^m \quad \alpha_{1.2} = 315^0.$$

Wir rechnen hier mit Logarithmen bis zu 9 richtigen Decimalen. Es ist zunächst:

$$\begin{aligned} \log W_1 &= 9{,}9989781.93 - 10 \\ \log \frac{W_1}{a_0} &= 3{,}1943347.29 - 10 \\ \log(1+\delta) &= 0{,}0029083.60 \\ \log \rho'' &= 5{,}3144251.33 \\ \log \delta &= 7{,}82732 - 10 \\ \log t &= 0{,}1874826.38 \\ t^2 &= 2{,}371184 \\ t^4 &= 5{,}6225 \end{aligned}$$

$$1 + 2t^2 = 5{,}742368 = [0{,}7590910]$$
$$1 + 3t^2 = 8{,}113552 = [0{,}909211]$$
$$2 + 3t^2 = 9{,}11355 \quad = [0{,}9597]$$
$$5 + 6t^2 = 19{,}22710 = [1{,}283914]$$
$$2 + 15t^2 + 15t^4 = 121{,}91 = [2{,}086]$$
$$5 + 28t^2 + 24t^4 = 206{,}33 = [2{,}3146]$$
$$1 + 30t^2 + 45t^4 = 325{,}2 \quad = [2{,}512]$$
$$1 + 20t^2 + 30t^4 = 217{,}1 \quad = [2{,}337]$$
$$1 + 20t^2 + 24t^4 = 183{,}36 = [2{,}2633]$$
$$58 + 280t^2 + 240t^4 = 2071 \quad = [3{,}316]$$
$$61 + 180t^2 + 120t^4 = 1163 \quad = [3{,}065]$$
$$\log\cos B_1 \quad = 9{,}7361087.65 - 10$$
$$\log\cos^2 B_1 = 9{,}47222 - 10$$
$$\log\sin 2B_1 = 9{,}96073 - 10$$
$$\log\cos 2B_1 = 9{,}609_n \quad - 10$$
$$\log\,[5\cos 2B_1 - 4] = 0{,}7806_n\,.$$

Hiermit geben die Formeln (11) bis (13) S. 298:

$$\underset{\text{in Sek.}}{B_2} = 57^0\,0'\,0'' + [5{,}3152898.79_n]\,u + [5{,}2017425_n]\,v^2$$
$$+ [5{,}446350]\,uv^2 + [5{,}6843_n]\,u^2v^2 + [5{,}0318]\,v^4$$
$$+ [5{,}924]\,u^3v^2 + [5{,}748_n]\,uv^4 + [2{,}97840_n]\,u^2$$
$$+ [2{,}450_n]\,u^3 + [3{,}1450_n]\,uv^2 + \cdots$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{L_2} = \underset{\text{in Sek.}}{L_1} + [5{,}5783163.68]v + [5{,}7657990.1_n]uv$$
$$+ [6{,}010406]u^2v + [5{,}47616_n]v^3 + [6{,}2484_n]u^3v$$
$$+ [6{,}1979]uv^3 + [5{,}686]v^5 + [6{,}488]u^4v + [6{,}739_n]u^2v^3$$
$$+ [2{,}40074]u^2v + \cdots$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{2.1}} = \underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{1.2}} + 180^0 + [5{,}5019077.71_n]\,v + [5{,}7724861]uv$$
$$+ [5{,}482848]v^3 + [6{,}007670_n]u^2v + [6{,}2488]u^3v$$
$$+ [6{,}1975_n]uv^3 + [6{,}487_n]u^4v + [6{,}738]u^2v^3$$
$$+ [5{,}685_n]v^5 + [2{,}31294]uv + [2{,}023_n]\,(u^2 - v^2)\,v + \cdots.$$

Mit den speziellen Werten von s und $\alpha_{1.2}$ hat man jetzt:

$$\left.\begin{aligned} \log s &= 5{,}0791812.46 \\ \log\cos\alpha_{1.2} &= 9{,}8494850.02 \;-10 \\ \log\sin\alpha_{1.2} &= 9{,}8494850.02_n - 10 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} u &= 8{,}1230009.77 \;-10 \\ v &= 8{,}1230009.77_n - 10 \end{aligned}$$

$B_2 =$	$L_2 - L_1 =$	$\alpha_{2.1} =$
57° 0′ 0″	— 1° 23′ 47,09792″	135° 0′ 0″
— 45 43,41088	+ 1 42,75453	+ 1 10 16,07908
— 28,03783	— 2,39557	— 1 44,34892
+ 0,65366	+ 0,70010	— 0,71097
— 0,01501	+ 0,05500	+ 2,38053
+ 0,00334	— 0,04897	— 0,05506
+ 0,00035	— 0,00020	+ 0,04892
— 0,00023	— 0,00127	+ 0,00127
— 0,16765	+ 0,00226	— 0,00225
— 0,00066	— 0,00059	+ 0,00020
— 0,00327		— 0,03622
		— 0,00000
56° 13′ 49,02182″	— 1° 22′ 6,03263″	136° 8′ 33,35658″

Diese Werte müssen in der 4. Decimalstelle der Sekunden noch richtig sein, was in der That sich später durch Anwendung anderer Formeln bestätigen wird.

§ 20. **Formeln mit mittleren Werten der geographischen Breite und des Azimuts.** Die Formeln des § 17 enthalten B_1 und $\alpha_{1.2}$ als Ausgangswerte. Für manche Zwecke sind aber Formeln mit mittleren Werten von B und α für beide Endpunkte P_1 und P_2 erwünscht. Um solche zu gewinnen, knüpfen wir am besten an die allgemeinen Formeln des vorigen Kapitels an.

Nach S. 248 (1) ist zunächst:

$$\tan\frac{\Delta\beta}{2} = -\tan\frac{\Delta\varphi}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}}\,, \tag{1}$$

wobei zum Teil von den Abkürzungen:

$$\left.\begin{array}{c} \beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta \qquad \dfrac{\beta_2 + \beta_1}{2} = \beta \\ \dfrac{\alpha_{1.2} + \alpha_{2.1}}{2} = 90^0 + \alpha \\ \alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\alpha \end{array}\right\} \tag{2}$$

Gebrauch gemacht worden ist. In die Formel (1) führen wir nun anstatt $\Delta\varphi$ und $\Delta\beta$ die linearen Längen s und M ein, letzteres in der Bedeutung als Meridianbogen für die Breitendifferenz $B_2 - B_1$.

Nach S. 223 (9) ist aber für kleine Entfernungen, indem wir $\frac{s}{a_0}$ ebenso wie e als Gröfse 1. Ordnung ansehen:

$$s = b_0 \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\varDelta\varphi + k_1\cos 2\varphi\sin\varDelta\varphi - \frac{1}{8}k_1^2\cos 4\varphi\sin 2\varDelta\varphi + Gl_7\right\} \quad (3)$$

und hieraus durch Entwicklung von $\sin\varDelta\varphi$ und $\sin 2\varDelta\varphi$ in Reihen:

$$s = b_0 \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{1 + k_1\cos 2\varphi\left(1 - \frac{1}{6}\varDelta\varphi^2\right) - \frac{1}{4}k_1^2\cos 4\varphi + Gl_6\right\}\varDelta\varphi,$$

worin wir nun nach S. 220 u. 221 substituieren:

$$k_1 = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4 + \cdots = \frac{1}{4}e^2\sin^2\beta_0\left(1 + e^2 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\beta_0\right) + \cdots.$$

Gleichzeitig setzen wir $\cos 4\varphi = 2\cos^2 2\varphi - 1$ und reduzieren auf $\varDelta\varphi$; es ergiebt sich dann nach einfacher Rechnung:

$$\varDelta\varphi = \frac{s}{b_0}\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{4}e^2(1+e^2)\sin^2\beta_0(1+\cos 2\varphi) + \frac{1}{24}e^2\varDelta\varphi^2\sin^2\beta_0\cos 2\varphi \\ \qquad + \frac{3}{32}e^4\sin^4\beta_0(1+\cos 2\varphi)^2 + Gl_6. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Rechter Hand ist noch β_0 und φ zu eliminieren und durch β_1, β_2 und die Azimute $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ auszudrücken.

Man hat aber wegen $2\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ und mit Rücksicht auf die (4) S. 248:

$$\begin{aligned} \sin^2\beta_0(1+\cos 2\varphi) &= \sin^2\beta_0 + \sin^2\beta_0\cos(\varphi_1+\varphi_2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_{1.2} + \cos^2\beta_2\sin^2\alpha_{2.1}) \\ &\quad + \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}. \end{aligned}$$

Setzt man für $\sin^2\alpha$ den gleichen Wert $1 - \cos^2\alpha$, so hat man nach einiger Reduktion weiter:

$$\sin^2\beta_0(1+\cos 2\varphi) = \left\{\begin{array}{l} 1 - \cos(\beta_1+\beta_2) - \frac{1}{2}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)^2 \\ \quad + \frac{1}{2}(\cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} + \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1})^2. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Es ist nun nach bekannten Formeln und mit Rücksicht auf das sphärische Hilfsdreieck Fig. 21. S. 248:

$$\begin{aligned} \cos\beta_1 - \cos\beta_2 &= 2\sin\frac{\varDelta\beta}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2} \\ &= -2\sin\frac{\varDelta\varphi}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\sin\frac{\alpha_{1.2}+\alpha_{2.1}}{2}\sec\frac{\varDelta\lambda}{2} \end{aligned}$$

und wenn wir die Abkürzungen (2) einführen, sowie $\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$ und $\sec\frac{\Delta\lambda}{2}$ in Reihen auflösen:

$$\cos\beta_1 - \cos\beta_2 = -\Delta\varphi\sin\beta\cos\alpha + Gl_3. \tag{6}$$

Man hat ferner mit Rücksicht auf die (4) S. 248:

$$\cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} + \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1} = \sin\beta_0(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$$

$$= -2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\sin\beta_0\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}.$$

Hiernach ist aber:

$$\cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} + \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1} = -\Delta\varphi\sin\beta + Gl_3; \tag{7}$$

denn man hat durch Addition der beiden ersten Gleichungen (4) S. 248 die Relation:

$$\sin\beta_0\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \sin\beta\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\sec\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$$

$$= \sin\beta + Gl_3.$$

In gleicher Weise findet sich noch die Beziehung:

$$\sin^2\beta_0\cos 2\varphi = \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}$$

oder

$$\sin^2\beta_0\cos 2\varphi = \sin^2\beta - \cos^2\beta\cos^2\alpha + Gl_2. \tag{8}$$

Substituiert man jetzt (7) und (6) in (5), sodann (5) und (8) in (4), so findet sich ohne Schwierigkeit:

$$\Delta\varphi = \frac{s}{b_0}\left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2}e^2(1+e^2)\sin^2\beta + \frac{3}{8}e^4\sin^4\beta \\ + \frac{1}{24}e^2\Delta\varphi^2(\cos^2\alpha[4\sin^2\beta - 1] - 2\sin^2\beta) + Gl_6. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Setzt man hierin $\alpha = 180^0$, so bezieht sich diese Formel auf den Meridianbogen M von β_1 bis β_2, und es geht $\Delta\varphi$ in $\Delta\beta$ über. Man hat daher

$$\Delta\beta = \frac{M}{b_0}\left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2}e^2(1+e^2)\sin^2\beta + \frac{3}{8}e^4\sin^4\beta \\ + \frac{1}{24}e^2\Delta\beta^2(2\sin^2\beta - 1) + Gl_6. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Dividieren wir dies Seite für Seite in Gleichung (9) und beachten dabei, dafs aus (1) folgt:

$$\Delta\beta = -\Delta\varphi\cos\alpha + Gl_3,$$

um damit $\Delta\beta$ aus der Parenthese von (10) zu eliminieren, so findet sich:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\beta} = \frac{s}{M}\left(1 - \frac{1}{12}e^2\Delta\varphi^2 \sin^2\beta \sin^2\alpha + Gl_6\right). \tag{11}$$

Wir kehren nun zurück zu Formel (1), verwandeln rechter Hand $\tan\frac{\Delta\varphi}{2}$ in eine Reihe und gehen dann von $\tan\frac{\Delta\beta}{2}$ zu $\frac{\Delta\beta}{2}$ über mittelst der 2. Reihe (2) S. 29. Schreiben wir für den Augenblick zur Abkürzung:

$$\tan\frac{\Delta\beta}{2} = Q\tan\frac{\Delta\varphi}{2},$$

so wird

$$\tan\frac{\Delta\beta}{2} = \frac{1}{2}Q\Delta\varphi\left(1 + \frac{1}{12}\Delta\varphi^2 + \frac{1}{120}\Delta\varphi^4 + Gl_6\right)$$

und

$$\Delta\beta = Q\Delta\varphi\left\{1 + \frac{1}{12}\Delta\varphi^2(1-Q^2) + \frac{1}{240}\Delta\varphi^4(1-Q^2)(2-3Q^2) + Gl_6\right\}. \tag{12}$$

Hierin ist für Q^2 zu setzen $\cos^2\alpha : \cos^2\frac{\Delta\alpha}{2}$, womit sich aufserdem findet:

$$1 - Q^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\Delta\alpha}{2}} - \tan^2\frac{\Delta\alpha}{2}. \tag{13}$$

Führt man auch dies in (12) ein und verbindet dann diese Gleichung durch Multiplikation entsprechender Seiten mit (11), so entsteht die Formel:

$$M = -s\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}}\left\{\begin{array}{c}1 + \frac{1}{12}\Delta\varphi^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\Delta\alpha}{2}} - \tan^2\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - \frac{1}{12}e^2\Delta\varphi^2\sin^2\beta\sin^2\alpha \\ + \frac{1}{240}\Delta\varphi^4\sin^2\alpha(2 - 3\cos^2\alpha) + Gl_6.\end{array}\right\} \tag{14}$$

Bei diesen Entwicklungen für (12) und (14) ist Voraussetzung, dafs nicht nur $s : a_0$, sondern auch $\Delta\alpha$ eine kleine Gröfse 1. Ordnung ist; mit Rücksicht auf die 4. Gleichung (1) S. 248 ergiebt sich hieraus die gleiche Bedingung für $L_{1.2}$.

Die 2. und 4. Gleichung (1) S. 248 geben nun ohne Schwierigkeit:

$$\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = -\tan\frac{\Delta\varphi}{2}\tan\beta\sin\alpha,$$

und hieraus erhält man sofort:

$$\Delta\alpha = -\Delta\varphi\tan\beta\sin\alpha + Gl_3. \tag{15}$$

Dies führen wir in (14) ein, aufserdem für $\Delta\varphi$ nach (9) den Ausdruck:

$$\Delta\varphi = \frac{s}{a_0}\left(1 + \frac{1}{2}\, e^2 \cos^2\beta + Gl_4\right),$$

wir setzen ferner im 2. Gliede der geschlungenen Parenthese

$$1 : \cos^2\frac{\Delta\alpha}{2} = 1 + \sin^2\frac{\Delta\alpha}{2} + Gl_4$$

und vertauschen schliefslich in den kleinsten Gliedern β mit B. So findet sich:

$$M = -s\,\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}}\left\{\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{12}\frac{s^2}{a_0^2}\sin^2\alpha\,(1 + e^2\cos 2B) \\ -\frac{1}{240}\frac{s^4}{a_0^4}\sin^2\alpha\,(-2 + [5\tan^2 B + 3]\cos^2\alpha) + Gl_6 \end{array}\right\}; \qquad (16)$$

$$\left.\begin{array}{c} B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2), \\ \alpha = \frac{\alpha_{1.2} + \alpha_{2.1} - 180^0}{2}, \quad \Delta\alpha = \alpha_{2.1} - \alpha_{1.2} - 180^0. \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Diese Formel stimmt nach gehöriger Reduktion mit derjenigen überein, welche *Bessel* 1837 im 14. Bd. der *Astronom. Nachr.* No. 331 S. 310 gegeben hat (*Abhandlungen* Bd. 3, S. 40).

§ 21. Fortsetzung: Längendifferenz. Nach S. 231 ist

$$L_{1.2} = \Delta\lambda - \frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left\{\left(1 + n - \frac{1}{2}k_1\right)\Delta\varphi - \frac{1}{2}k_1\cos 2\varphi\,\sin\Delta\varphi + Gl_5\right\}. (1)$$

Hieraus folgt durch Entwicklung von $\sin\Delta\varphi$ in eine Reihe und unter Substitution der Werte

$$k_1 = \frac{1}{4}\, e^2 \sin^2\beta_0 + Gl_4, \qquad n = \frac{1}{4}\, e^2 + Gl_4$$

ohne Schwierigkeit:

$$L_{1.2} = \Delta\lambda - \frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left(1 + \frac{1}{4}e^2\,[1 - \sin^2\beta_0\cos^2\varphi] + Gl_4\right)\Delta\varphi. \quad (2)$$

Man hat nun nach den Gleichungen (4) S. 248:

$$\cos\beta_0 = \frac{1}{2}(\cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} - \cos\beta_2 \sin\alpha_{2.1}).$$

Hierin setzen wir

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1) - \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1) \text{ und } \beta_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1) + \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$$

sowie

$$\alpha_{1.2} = \frac{1}{2}(\alpha_{2.1} + \alpha_{1.2}) - \frac{1}{2}(\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2})$$

und

$$\alpha_{2.1} = \frac{1}{2}(\alpha_{2.1} + \alpha_{1.2}) + \frac{1}{2}(\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2}).$$

Es wird dann mit Rücksicht auf die Abkürzungen (2) S. 304 erhalten:

$$\cos\beta_0 = \cos\beta\sin\alpha\cos\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}$$
$$+\sin\beta\cos\alpha\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}. \quad (3)$$

Zur weitern Umformung dieses Ausdrucks geben die (1) S. 248 sofort:

$$\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2} = -\frac{1}{2}\Delta\varphi\cos\alpha + Gl_3$$
$$\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2} = \frac{1}{2}\Delta\varphi\tan\beta\sin\alpha + Gl_3,$$

womit sich auch findet:

$$\cos\frac{\beta_2-\beta_1}{2} = 1 - \frac{1}{8}\Delta\varphi^2\cos^2\alpha + Gl_4$$
$$\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2} = 1 - \frac{1}{8}\Delta\varphi^2\tan^2\beta\sin^2\alpha + Gl_4.$$

Mittelst dieser Formeln gestaltet sich Ausdruck (3) für $\cos\beta_0$ wie folgt:

$$\cos\beta_0 = \cos\beta\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{8}\Delta\varphi^2\sec^2\beta\,[\sin^2\beta + \cos^2\alpha] + Gl_4\right). \quad (4)$$

Dieser Wert ist in (2) einzuführen und zugleich mit Rücksicht auf die beiden ersten Gleichungen (4) S. 248 zu setzen:

$$\sin\beta_0\cos\varphi = \sin\beta + Gl_2.$$

Man erhält damit:

$$L_{1.2} = \Delta\lambda - \frac{1}{2}e^2\cos\beta\sin\alpha\left\{1 + \frac{1}{4}e^2\cos^2\beta\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8}\Delta\varphi^2\sec^2\beta\,[\sin^2\beta + \cos^2\alpha] + Gl_4\right\}\Delta\varphi. \quad (5)$$

Für $\Delta\lambda$ giebt die 2. Gleichung (1) S. 248 die Relation:

$$\sin\frac{1}{2}\Delta\lambda = \sin\frac{1}{2}\Delta\varphi\sec\beta\sin\alpha.$$

Wir verwandeln $\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi$ in eine Reihe und leiten sodann aus $\sin\frac{1}{2}\Delta\lambda$ mittelst der 1. Reihe (2) S. 29 $\frac{1}{2}\Delta\lambda$ ab. Es folgt:

$$\varDelta\lambda = \varDelta\varphi \sec\beta \sin\alpha \left\{1 - \frac{1}{24}\varDelta\varphi^2 (1 - \sec^2\beta \sin^2\alpha) + \frac{1}{1920}\varDelta\varphi^4 (1 - \sec^2\beta \sin^2\alpha)(1 - 9\sec^2\beta \sin^2\alpha) + Gl_6\right\} \quad (6)$$

und zwar unter der Voraussetzung, dafs nicht nur $s : a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ von der 1. Ordnung ist. (5) und (6) geben nun zusammen:

$$L_{1.2} = \varDelta\varphi \sec\beta \sin\alpha \left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2\beta \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \cos^2\beta\right) \\ + \frac{1}{16} e^2 \varDelta\varphi^2 (\sin^2\beta + \cos^2\alpha) \\ - \frac{1}{24}\varDelta\varphi^2 (1 - \sec^2\beta \sin^2\alpha) \\ + \frac{1}{1920}\varDelta\varphi^4 (1 - \sec^2\beta \sin^2\alpha)(1 - 9\sec^2\beta \sin^2\alpha) + Gl_6. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Für $\varDelta\varphi$ führen wir hier die Reihe (9) S. 306 ein, nachdem wir darin für b_0 den gleichen Wert $a_0\sqrt{1 - e^2}$ substituiert haben, womit $\varDelta\varphi$ in

$$\varDelta\varphi = \frac{s}{a_0}\left\{1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2\beta + \frac{3}{8} e^4 \cos^4\beta + \frac{1}{24} e^2 \varDelta\varphi^2 (\cos^2\alpha [4\sin^2\beta - 1] - 2\sin^2\beta) + Gl_6\right\} \quad (8)$$

übergeht. Für (7) findet sich nun:

$$L_{1.2} = \frac{s}{a_0} \sec\beta \sin\alpha \left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}(1 - \sec^2\beta \sin^2\alpha - e^2 [\sin^2\beta + (4\sin^2\beta - 1)\cos^2\alpha]) \\ + \frac{1}{1920}\frac{s^4}{a_0^4}(1 - \sec^2\beta \sin^2\alpha)(1 - 9\sec^2\beta \sin^2\alpha) + Gl_6. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Hierin führen wir noch die mittlere geographische Breite B ein. Nach S. 42 ist aber:

$$B_1 = \beta_1 + n \sin 2\beta_1 + \frac{1}{2} n^2 \sin 4\beta_1 + Gl_6$$

$$B_2 = \beta_2 + n \sin 2\beta_2 + \frac{1}{2} n^2 \sin 4\beta_2 + Gl_6,$$

daher

$$B = \beta + n \sin 2\beta \cos \varDelta\beta + \frac{1}{2} n^2 \sin 4\beta + Gl_6. \quad (10)$$

Hieraus ergiebt sich leicht nach und nach folgende Rechnung, bei welcher $n = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + Gl_6$ gesetzt ist:

$$\cos B = \cos\beta \cos(n \sin 2\beta \cos \varDelta\beta + Gl_4)$$

$$- \sin\beta \sin(n \sin 2\beta \cos \varDelta\beta + \frac{1}{2} n^2 \sin 4\beta + Gl_6)$$

oder

$$\cos B = \cos\beta \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2\beta \cos \varDelta\beta - \frac{1}{2} e^4 \sin^2\beta \\ + \frac{3}{8} e^4 \sin^4\beta + Gl_6 \end{array} \right\};$$

andrerseits ist:

$$1 : \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2\beta + \frac{1}{2} e^4 \sin^2\beta - \frac{1}{8} e^4 \sin^4\beta + Gl_6, \quad (11)$$

daher

$$\frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \cos\beta \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2\beta \sin^2\varDelta\beta + Gl_6\right).$$

Nach (9) und (12) S. 306 u. 307 ist nun $\varDelta\beta = -\frac{s}{a_0}\cos\alpha + Gl_3$, womit diese Formel endlich noch in nachstehende Gestalt gebracht werden kann:

$$\frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \cos\beta \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin^2\beta \cos^2\alpha + Gl_6\right). \quad (12)$$

Hiermit giebt (9):

$$\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = \varrho'' \frac{s}{a_0} W \sec B \sin\alpha \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{24} \frac{s^2}{a_0^2} \left(W^2 [1 - \sec^2 B \sin^2\alpha] - e^2 [10 \sin^2 B - 1] \cos^2\alpha \right) \\ + \frac{1}{1920} \frac{s^4}{a_0^4} (1 - \sec^2 B \sin^2\alpha)(1 - 9 \sec^2 B \sin^2\alpha) + Gl_6. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Die Bedeutung von B und α ist durch die (17) S. 308 definiert. Aufserdem ist wie früher $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$.

§ 22. **Fortsetzung: Azimutdifferenz.** Die 2. und 4. der Gleichungen (1) S. 248 geben:

$$\sin\frac{\varDelta\alpha}{2} = -\tan\frac{\varDelta\varphi}{2} \tan\beta \sin\alpha. \quad (1)$$

Wir verwandeln $\tan\frac{\varDelta\varphi}{2}$ in eine Reihe und gehen dann mittelst der 1. Reihe (2) S. 29 zu $\frac{\varDelta\alpha}{2}$ über. Es wird:

$$\varDelta\alpha = -\varDelta\varphi \tan\beta \sin\alpha \left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{24} \varDelta\varphi^2 (2 + \tan^2\beta \sin^2\alpha) \\ + \frac{1}{1920} \varDelta\varphi^4 \left(\begin{array}{c} 16 + 20 \tan^2\beta \sin^2\alpha \\ + 9 \tan^4\beta \sin^4\alpha \end{array} \right) + Gl_6. \end{array} \right\}$$

Für $\varDelta\varphi$ setzen wir jetzt den Ausdruck (8) S. 310 und erhalten:

$$\varDelta\alpha = -\frac{s}{a_0}\frac{\tan\beta\sin\alpha}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}}\left\{\begin{aligned}&1+\frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}\left(\begin{aligned}2+\tan^2\beta\sin^2\alpha\\+e^2[1-3\sin^2\beta\sin^2\alpha+\sin^2\alpha]\end{aligned}\right)\\&+\frac{1}{1920}\frac{s^4}{a_0^4}\left(\begin{aligned}16+20\tan^2\beta\sin^2\alpha\\+9\tan^4\beta\sin^4\alpha\end{aligned}\right)+Gl_6.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Aus (12) S. 311 leiten wir aber leicht ab:

$$\cos\beta = \frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\left(1-\frac{1}{4}e^2\frac{s^2}{a_0^2}\sin^2 B\cos^2\alpha + Gl_6\right)$$

und hieraus:

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\left(1+\frac{1}{4}e^2\frac{s^2}{a_0^2}\cos^2 B\cos^2\alpha + Gl_6\right),$$

womit sich ergiebt:

$$\sqrt{1-e^2}\tan B = \tan\beta\left(1-\frac{1}{4}e^2\frac{s^2}{a_0^2}\cos^2\alpha + Gl_6\right), \quad (3)$$

während aus (11) S. 311 noch folgt:

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} = \sqrt{1-e^2\cos^2\beta} + Gl_6. \quad (4)$$

Indem wir dies in (2) substituieren, erhalten wir die Formel:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\alpha} = -\rho''\frac{s}{a_0}W\tan B\sin\alpha\left\{\begin{aligned}&1+\frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}\left(\begin{aligned}2+\tan^2 B\sin^2\alpha\\+e^2[7-(5+\tan^2 B+3\sin^2 B)\sin^2\alpha]\end{aligned}\right)\\&+\frac{1}{1920}\frac{s^4}{a_0^4}\left(\begin{aligned}16+20\tan^2 B\sin^2\alpha\\+9\tan^4 B\sin^4\alpha\end{aligned}\right)+Gl_6.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese Formel setzt, wie (16) S. 308 u. (13) S. 311 voraus, dafs nicht nur $s:a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ eine kleine Gröfse 1. Ordnung sei.

Drückt man in (16) S. 308 den Meridianbogen M durch B und $\varDelta B$ aus und reduziert auf $\varDelta B$, so erhält man damit sowie in den zwei Formeln (13) S. 311 und (5) oben ein Mittel zur indirekten Berechnung von B_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ aus B_1, s und $\alpha_{1.2}$, welches zu rascher Rechnung sehr geeignet ist, falls die gesuchten Gröfsen schon näherungsweise bekannt sind.

Derartige Formeln gab 1847 *Gaufs* in seinen *Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie* 2. Teil S. 26 u. ff., wobei er aber nur die Glieder bis mit s^3, diese jedoch vollständig, entwickelte. Der von ihm eingeschlagene Weg ist ein anderer als der unsrige, indem er nämlich direkt an die Differentialformeln (11) bis (13) S. 298 anknüpft und sie auf einen in der halben Länge zwischen P_1 und P_2 liegenden Punkt als Ausgangspunkt, sowie P_1 *und* P_2 als Endpunkte anwendet. Aus den 6 so entstehenden Gleichungen eliminiert er dann die Werte von B, L und α des

erwähnten mittleren Punktes. — Für unsere Zwecke schien aber der hier eingeschlagene Weg, welcher allerdings die Anwendung der allgemeinen Formeln bedingt, einfacher, insofern er die Formel (16) S. 308 direkt in die für eine spätere Anwendung geeignetste Gestalt bringt.

§ 23. **Entfernung und Azimute aus geographischen Positionen.** Die Formeln (16) S. 308 und (13) S. 311 geben ohne Schwierigkeit:

$$s\cos\alpha = -M\cos\frac{\Delta\alpha}{2}\left\{\begin{array}{c} 1-\frac{1}{12}\frac{s^2}{a_0^2}\sin^2\alpha\,(1+e^2\cos 2B) \\ +\frac{1}{720}\frac{s^4}{a_0^4}\sin^2\alpha\left([15\tan^2 B+3]\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+Gl_6 \end{array}\right\}, \quad (1)$$

$$s\sin\alpha = P\left\{\begin{array}{c} 1+\frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}\left(W^2[\cos^2\alpha-\tan^2 B\sin^2\alpha]-e^2[10\sin^2 B-1]\cos^2\alpha\right) \\ +\frac{1}{5760}\frac{s^4}{a_0^4}(\cos^2\alpha-\tan^2 B\sin^2\alpha)(7+17\sec^2 B\sin^2\alpha)+Gl_6 \end{array}\right\}, \quad (2)$$

wobei P den Parallelbogen für den Längenunterschied $L_{1.2}$ in der geographischen Breite B bedeutet:

$$\left.\begin{array}{c} P = a_0\,\frac{L_{1.2\text{ in Sek.}}}{\varrho''}\,\frac{\cos B}{W} \\ W_{\text{mit Argument}}\ B = \frac{1}{2}(B_1+B_2) \end{array}\right\}, \quad (3)$$

und M nach S. 50 (3) und S. 44 (2) sich mittelst der Formel berechnet:

$$\log M = \log\left(a_0\,\frac{\Delta B_{\text{ in Sek.}}}{\varrho''}\,\frac{1-e^2}{W^3}\right)+\frac{1}{8}\,\text{Mod.}\,e^2\cos 2B\left(\frac{\Delta B_{\text{ in Sek.}}}{\varrho''}\right)^2+Gl_6\,. \quad (4)$$

Aufserdem ist durch Einführung von (2) und (3) in die Formel (5) des vorigen Paragraphen:

$$\Delta\alpha = -L_{1.2}\sin B\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}\left\{\begin{array}{c} 3\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha \\ -e^2[(11\sin^2 B-8)\cos^2\alpha+(4\sin^2 B-2)\sin^2\alpha] \end{array}\right\} \\ +\frac{1}{5760}\frac{s^4}{a_0^4}\left\{\begin{array}{c} 75\cos^4\alpha+140\cos^2\alpha\sin^2\alpha+48\sin^4\alpha \\ +[60\cos^2\alpha\sin^2\alpha+16\sin^4\alpha]\tan^2 B \end{array}\right\}+Gl_6\,. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die Berechnung wird nach diesen Formeln teilweise eine indirekte. Zuerst werden P und M definitiv aus (3) und (4) bestimmt. Dieses sind zugleich die Werte von $s\cos\alpha$ und $s\sin\alpha$ mit Vernachlässigung von Gliedern 3. Ordnung. Hiermit giebt (5) den Wert von $\Delta\alpha$ bis auf Glieder 5. Ordnung, jedoch kann man die von e^2s^2 ab-

hängigen Glieder der Parenthese bereits berücksichtigen. Nun lassen sich mittelst (1) und (2) $s \cos \alpha$ und $s \sin \alpha$ genauer berechnen und zwar ebenfalls bis auf Glieder 5. Ordnung, aber mit Berücksichtigung der Glieder $e^2 s^2$ der Parenthesen. Eine folgende Annäherung giebt die Glieder 5. Ordnung vollständig.

Zum praktischen Gebrauch empfiehlt sich nun die logarithmische Form für (1), (2) und (5), welche wir daher noch ableiten. Aufserdem setzen wir diejenigen Formeln her, welche sich durch die angegebenen Operationen mit den allgemeinen Symbolen und insbesondere für $s \cos \alpha$ durch Benutzung der Reihe

$$\log \cos \frac{\varDelta \alpha}{2} = - \text{Mod.} \left(\frac{1}{8} \varDelta \alpha^2 + \frac{1}{192} \varDelta \alpha^4 + Gl_6 \right)$$

nach S. 29 (3) ergeben.

Endlich schreiben wir auch die Formeln (2) und (4) etwas anders, so wie es im Hinblick auf die Gesamtheit aller am besten erscheint.

Auf diese Weise erhalten wir folgende Formeln zu direkter Rechnung:

$$\left.\begin{array}{ll} P' = \dfrac{L_{1.2\,\text{in Sek.}}}{\varrho''} \dfrac{\cos B}{W} & M' = \dfrac{\varDelta B_{\text{in Sek.}}}{\varrho''} \dfrac{1 - e^2}{W^3} \\[2ex] \varDelta B = B_2 - B_1 & B = \dfrac{1}{2} (B_2 + B_1) \\ & \quad W \text{ zum Argument } B \\[1ex] P = a_0 P' & \log M = \log (a_0 M') + \frac{1}{24} \text{Mod. } M'^2 e^2 [3 - 6 \sin^2 B] + Gl_6 \end{array}\right\} (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \log \varDelta \alpha = \log (- L_{1.2} \sin B) \\ + \dfrac{1}{24} \text{Mod.} \left\{ M'^2 (3 + e^2 [8 - 11 \sin^2 B]) + P'^2 (2 + e^2 [2 - 4 \sin^2 B]) \right\} + Gl_4 . \end{array}\right\} (7)$$

$$\log (s \cos \alpha) = \log (- M) - \frac{1}{24} \text{Mod} \left\{ \begin{array}{c} P'^2 (2 + e^2 [2 - 4 \sin^2 B]) \\ + 3 P'^2 W^2 \tan^2 B \end{array} \right\} + Gl_4 \quad (8)$$

$$\log (s \sin \alpha) = \log P + \frac{1}{24} \text{Mod} \left\{ \begin{array}{c} M'^2 (1 + e^2 [1 - 11 \sin^2 B]) \\ - P'^2 W^2 \tan^2 B \end{array} \right\} + Gl_4 . \quad (9)$$

Hierin sind die von e^2 unabhängigen Glieder 4. Ordnung vernachlässigt.

Ist eine noch gröfsere Genauigkeit wünschenswert, so läfst dieselbe sich erzielen, indem man vorstehenden Werten für die Logarithmen von $\varDelta \alpha$, $s \cos \alpha$ und $s \sin \alpha$ nachstehende Ausdrücke bezw. hinzufügt:

$$+ \frac{1}{2880} \text{Mod} \left\{ 15 M'^4 + 14 P'^4 - [60 M'^2 P'^2 + 12 P'^4] \tan^2 B \right\} \quad (7^*)$$

$$+\frac{1}{2880}\,\mathrm{Mod}\left\{-8M'^2P'^2-14P'^4-[30M'^2P'^2+40P'^4]\tan^2 B-15P'^4\tan^4 B\right\} \tag{8*}$$

$$+\frac{1}{2880}\,\mathrm{Mod}\left\{M'^4-8M'^2P'^2-[30M'^2P'^2+12P'^4]\tan^2 B-P'^4\tan^4 B\right\}, \tag{9*}$$

wodurch die Vernachlässigungen in den Logarithmen auf Gl_6 herabsinken. Zu diesen Formeln gelangt man leicht, indem man in (5), (1) und (2) rechter Hand $s\cos\alpha = -M(1-\frac{1}{8}P'^2\tan^2 B-\frac{1}{12}P'^2+Gl_4)$ und $s\sin\alpha = P(1+\frac{1}{24}M'^2-\frac{1}{24}P'^2\tan^2 B+Gl_4)$ setzt und dann logarithmiert.

Schliefslich hat man noch

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{1.2} &= \alpha-\frac{\Delta\alpha}{2}\\ \alpha_{2.1} &= \alpha+\frac{\Delta\alpha}{2}+180^0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Für vorstehende Formeln besteht ebenso wie für diejenigen der vorhergehenden Paragraphen, aus welchen sie hervorgegangen sind, die Voraussetzung, dafs nicht nur $s:a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ eine Gröfse 1. Ordnung ist.

Dieselben lassen sich auch noch in andere Gestalt bringen, wozu die rein sphärischen Formeln S. 132 u. ff. Fingerzeige geben. Es giebt u. a. die Differenz der Formeln (8) und (9) genau die Formel (1) a. a. O. bis auf die in c^2 multiplizierten Glieder; ebenso läfst sich (7) auf die Form von (2) ebenda hinführen. Wir bleiben indessen bei den obigen, für gleichzeitige Berechnung von s und α sehr bequemen und scharfen Formeln stehen; die kleinen Glieder derselben berechnen sich um so leichter, als in verschiedenen Formeln dieselben Terme auftreten.

Für Seiten mefsbarer Dreiecke wird es oftmals ausreichen, in den Logarithmen des Systems (6) bis (9) die Glieder 4. Ordnung wegzulassen. Dann aber hat man rein sphärische Formeln vor sich, mit der Modifikation, dafs für $L_{1.2}$ und ΔB verschiedene Krümmungsradien angewandt sind. Diese Verschiedenheit verschwindet durch Einführung der reduzierten Breitendifferenz $\Delta B\,\frac{1-e^2}{W^2}$, und man überzeugt sich nun leicht, dafs man innerhalb der angegebenen Genauigkeit durch sphärische Behandlung von $L_{1.2}$ und der reduzierten Breitendifferenz mittelst des Krümmungsradius $a_0:W$ (d. i. die Normale in mittlerer Breite) zu obigen Formeln zurückkommt. Man kann hiernach überhaupt alle auf eine hinreichend kleine geodätische Linie bezüglichen Rechnungen rein sphärisch ausführen. Das ist ja auch geometrisch unmittelbar klar, nur fehlt dabei die Angabe der Vernachlässigungen. [Vergl. auch *Jordan, Handbuch* Bd. 2, S. 236.]

§ 24. Zahlenbeispiel I. Gegeben:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 54^0\ 42'\ 50{,}6'' \\ B_2 &= 52\ \ 30\ \ 16{,}7 \end{aligned}\right\} L_{1.2} = 7^0\ 6'\ 0''.$$

Man hat zunächst:

$$B = 53^0\ 36'\ 33{,}65''$$
$$\varDelta B = -\ 7953{,}9''$$
$$L_{1.2} = 25560{,}0''$$
$$\left.\begin{aligned} \log \frac{\text{Mod}}{24} &= 5{,}2575731 \\ \log \frac{\text{Mod}}{2880} &= 3{,}17839 \end{aligned}\right\} \text{für Einh. der 7. Dec.}$$
$$\log e^2 = 7{,}82441 - 10$$

$$\log W = 9{,}9990587.89 - 10$$
$$\log \varDelta B = 3{,}9005801.27_n$$
$$\log L_{1.2} = 4{,}4075608.50$$
$$\log a_0 = 6{,}8046434.64$$
$$\log \tan^2 B = 0{,}2650511$$
$$\log \sin^2 B = 9{,}81158 - 10$$

$$\log \varrho'' = 5{,}3144251.33$$
$$\log \frac{\varDelta B}{\varrho''} = 8{,}5861549.94_n - 10$$
$$\log \frac{L_{1.2}}{\varrho''} = 9{,}0931357.17 - 10$$
$$\log \sin B = 9{,}9057908.07 - 10$$
$$\log \cos B = 9{,}7732652.48 - 10$$
$$\log (1 - e^2) = 9{,}9970916.40 - 10$$
$$\log M' = 8{,}5860702.67_n - 10$$
$$\log (a_0 M') = 5{,}3907137.31_n$$
$$\log P' = 8{,}8673421.76 - 10$$
$$\log P = 5{,}6719856.40$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,M'^2 &= 268.976 \\ ,,\quad P'^2 &= 982.330 \\ ,,\quad P'^2\,W^2 \tan^2 B &= 1800.637 \end{aligned}\right\} \text{Einh. der 7. Dec.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2 M'^2 &= 1.7952 \\ ,,\quad e^2 M'^2 \sin^2 B &= 1.1634 \\ ,,\quad e^2 P'^2 &= 6.5564 \\ ,,\quad e^2 P'^2 \sin^2 B &= 4.2486 \end{aligned}\right\} \quad ,,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2880}\,\text{Mod}\,.\,M'^4 &= 0.0033 \\ ,,\quad P'^4 &= 0.0444 \\ ,,\quad M'^2 P'^2 &= 0.0122 \end{aligned}\right\} \quad ,,$$

$$\left.\begin{array}{lrl}\frac{1}{2880}\,\mathrm{Mod}\,.\,M'^2P'^2\tan^2B & = & 0.02240\\ \quad ,, \qquad P'^4\tan^2B & = & 0.08183\\ \quad ,, \qquad P'^4\tan^4B & = & 0.15065\end{array}\right\}\text{ Einh. der 7. Dec.}$$

Hiermit ergiebt sich nun folgende Zusammenstellung:

$$\left\{\begin{array}{llrr} & \log(-L_{1.2}\sin B) & = & 4{,}3133516.57_n\\ + & \frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,3M'^2 & =+ & 806.928\\ + & \frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,e^2M'^2\,.\,8 & =+ & 14.362\\ - & \quad ,, \quad ,, \quad 11\sin^2B & =- & 12.797\\ + & \frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,2P'^2 & =+ & 1964.660\\ + & \frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,e^2P'^2\,.\,2 & =+ & 13.113\\ - & \quad ,, \quad ,, \quad 4\sin^2B & =- & 16.994\\ + & \frac{1}{2880}\,\mathrm{Mod}\,.\,15M'^4 & =+ & 0.050\\ + & \quad ,, \quad 14P'^4 & =+ & 0.622\\ - & \quad ,, \quad 60M'^2P'^2\tan^2B & =- & 1.344\\ - & \quad ,, \quad 12P'^4\tan^2B & =- & 0.982\end{array}\right.$$

(Die Posten 1964.660, 13.113, 16.994: wird unten gebraucht)

$$\log\Delta\alpha = 4{,}3136284.19_n$$

$$\Delta\alpha = -20588{,}6760'' = -5^0\,43'\,8{,}6760''$$

$$\left\{\begin{array}{llrr} & \log(-a_0M') & = & 5{,}3907137.31\\ + & \frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,e^2M'^2\,.\,3 & =+ & 5.386\\ - & \quad ,, \quad ,, \quad 6\sin^2B & =- & 6.980\\ - & \frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,P'^2(2+e^2[2-4\sin^2B]) & =- & 1960.779\\ - & \frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,3P'^2M'^2\tan^2B & =- & 5401.911\\ - & \frac{1}{2880}\,\mathrm{Mod}\,.\,8M'^2P'^2 & =- & 0.098\\ - & \quad ,, \quad 14P'^4 & =- & 0.622\\ - & \quad ,, \quad 30M'^2P'^2\tan^2B & =- & 0.672\\ - & \quad ,, \quad 40P'^4\tan^2B & =- & 3.273\\ - & \quad ,, \quad 15P'^4\tan^4B & =- & 2.260\end{array}\right.$$

(Die ersten drei Posten: ist log M; 1960.779: siehe oben; 0.622: siehe oben; 0.672: siehe oben)

$$\log(s\cos\alpha) = 5{,}3899766.10$$

$\log P$	$=$	5,6719856.40
$+ \frac{1}{24}$ Mod . M'^2	$= +$	268.976
$+ \frac{1}{24}$ Mod . $e^2 M'^2 . 1$	$= +$	1.795
$-$ „ „ $11 \sin^2 B$	$= -$	12.797 siehe oben
$- \frac{1}{24}$ Mod . $P'^2 W^2 \tan^2 B$	$= -$	1800.637
$+ \frac{1}{2880}$ Mod . M'^4	$= +$	0.003
$-$ „ $8 M'^2 P'^2$	$= -$	0.098 siehe oben
$-$ „ $30 M'^2 P'^2 \tan^2 B$	$= -$	0.672 siehe oben
$-$ „ $12 P'^4 \tan^2 B$	$= -$	0.982 siehe oben
$-$ „ $P'^4 \tan^4 B$	$= -$	0.151
$\log (s \sin \alpha)$	$=$	5,6718311.84

Aus $\log (s \cos \alpha)$ und $\log (s \sin \alpha)$ erhält man:

$$\alpha = 62^0\ 24'\ 35{,}029'',$$

und hiermit ergeben sich für s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ folgende

Resultate:		anstatt	
	$\log s = 5{,}7242591.34$	.35	nach S. 261.
	$\alpha_{1.2} = 65^0\ 16'\ 9{,}367''$	,365	
	$\alpha_{2.1} = 239\ \ 33\ \ 0{,}691$	,689	

Die Schärfe der Rechnung ist befriedigend, wie die Vergleichung mit der strengeren Rechnung S. 261 zeigt, $\Delta\alpha$ paſst sogar bis auf 0,0001″.

§ 25. **Zahlenbeispiel II.** Gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = 57^0 \\ B_2 = 56^0\ 13'\ 49{,}02186'' \end{array}\right\} L_{1.2} = 1^0\ 22'\ 6{,}03270''\ \text{östlich.}$$

Man hat zunächst:

$B = 56^0\ 36'\ 54{,}51093''$	$\log W = 9{,}9989871.55 - 10$
$\Delta B = -2770{,}97814''$	$\log \Delta B = 3{,}4426331.00_n$
$L_{1.2} = -4926{,}03270''$	$\log L_{1.2} = 3{,}6924972.90_n$
$\log \frac{\text{Mod}}{24} = 5{,}25757$ } f. Einh. der 7. Dec.	$\log a_0 = 6{,}8046434.64$
$\log \frac{\text{Mod}}{2880} = 3{,}17839$ }	$\log \tan^2 B = 0{,}36223$
$\log e^2 = 7{,}82441 - 10$	$\log \sin^2 B = 9{,}8434 - 10$

$$\log \varrho'' = 5{,}3144251.33$$

$$\log (1 - e^2) = 9{,}9970916.40 - 10$$

$$\log \frac{\varDelta B}{\varrho''} = 8{,}1282079.67_n - 10$$

$$\log \frac{L_{1.2}}{\varrho''} = 8{,}3780721.57_n - 10$$

$$\begin{aligned}
\log \sin B &= 9{,}9216829.98 - 10\\
\log \cos B &= 9{,}7405680.15 - 10\\
\log M' &= 8{,}1283381.42_n - 10\\
\log (a_0 M') &= 4{,}9329816.06_n\\
\log P' &= 8{,}1196530.17_n - 10\\
\log P &= 4{,}9242964.81_n
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,M'^2 &= 32.678\\
\text{„}\quad P'^2 &= 31.396\\
\text{„}\quad P'^2 W^2 \tan^2 B &= 71.958
\end{aligned}\right\}\ \text{Einh. der 7. Dec.}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2 M'^2 &= 0.2181\\
\text{„}\quad e^2 M'^2 \sin^2 B &= 0.1521\\
\text{„}\quad e^2 P'^2 &= 0.2096\\
\text{„}\quad e^2 P'^2 \sin^2 B &= 0.1461
\end{aligned}\right\}\ \text{„}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2880}\,\text{Mod}\,.\,M'^4 &= 0.0000\\
\text{„}\quad P'^4 &= 0.0000\\
\text{„}\quad M'^2 P'^2 &= 0.0000
\end{aligned}\right\}\ \text{„}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2880}\,\text{Mod}\,.\,M'^2 P'^2 \tan^2 B &= 0.00011\\
\text{„}\quad P'^4 \tan^2 B &= 0.00011\\
\text{„}\quad P'^4 \tan^4 B &= 0.00024
\end{aligned}\right\}\ \text{„}$$

Hiermit ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned}
&\log(-L_{1.2} \sin B) && = && 3{,}6141802.88\\
&+\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,3M'^2 && = + && 98.034\\
&+\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2 M'^2\,.\,8 && = + && 1.745\\
&-\quad\text{„}\quad\text{„}\quad 11 \sin^2 B && = - && 1.673\\
&+\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,2P'^2 && = + && 62.792\\
&+\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2 P'^2\,.\,2 && = + && 0.419\\
&-\quad\text{„}\quad\text{„}\quad 4 \sin^2 B && = - && 0.584\\
&\text{die Glieder (7*) S. 314} && = - && 0.008\\
\hline
&\log \varDelta\alpha && = && 3{,}6141963.61
\end{aligned}$$

(The last three positive/negative P' terms bracketed: wird später nochmals gebraucht)

$$\varDelta\alpha = 4113{,}35659'' = 1^0\ 8'\ 33{,}35659''.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}
\log(-a_0 M') & = & 4{,}9329816.06 \\
+\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2 M'^2 .\,3 & = + & 0.654 \\
- \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 6\sin^2 B & = - & 0.913 \\
-\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,P'^2\,(2 + e^2\,[2 - 4\sin^2 B]) & = - & 62.627 \text{ siehe oben} \\
-\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,3\,P'\,W^2 \tan^2 B & = - & 215.874 \\
\text{Die Glieder (8*) S. 315} & = - & 0.011
\end{array}\right.$$

$$\log(s\cos\alpha) = 4{,}9329537.29$$

$$\left\{\begin{array}{lll}
\log P & = & 4{,}9242964.81_n \\
+\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,M'^2 & = + & 32.678 \\
+\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2 M'^2 .\,1 & = + & 0.218 \\
- \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 11\sin^2 B & = - & 1.673 \text{ siehe oben} \\
-\frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,P'^2\,W^2 \tan^2 B & = - & 71.958 \\
\text{Die Glieder (9*) S. 315} & = - & 7
\end{array}\right.$$

$$\log(s\sin\alpha) = 4{,}9242924.07_n$$

Aus $\log(s\cos\alpha)$ und $\log(s\sin\alpha)$ erhält man:

$$\alpha = 315^0\ 34'\ 16{,}6775'',$$

und hiermit ergeben sich für s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ folgende

$$\text{Resultate:}\left\{\begin{array}{l}
\log s = 5{,}0791812.47 \\
\alpha_{1.2} = 314^0\ 59'\ 59{,}9992'' \\
\alpha_{2.1} = 136 \quad 8 \quad 33{,}3558'',
\end{array}\right.$$

welche ebenso wie auch $\Delta\alpha$ noch in den letzten angesetzten Ziffern so genau sein müssen, als die Unsicherheit der Zahlenrechnung zuläſst.

Vernachlässigt man die Glieder 4. Ordnung der Logarithmen gänzlich, so wird erhalten:

	woraus mit 7 ziffr. Log. folgt:
$\log\Delta\alpha = 3{,}6141963.7$	
$\log(s\cos\alpha) = 4{,}9329536.4$	$\Delta\alpha = 1^0\ 8'\ 33{,}3568''$
$\log(s\sin\alpha) = 4{,}9242925.2_n$,	$\alpha = 315^0\ 34'\ 16{,}63''$

$$\left\{\begin{array}{l}
\log s = 5{,}0791812.8 \\
\alpha_{1.2} = 314^0\ 59'\ 59{,}95'' \\
\alpha_{2.1} = 135 \quad 8 \quad 33{,}31.
\end{array}\right.$$

Man erkennt, daſs für Seiten meſsbarer Dreiecke bei Anwendung 7 ziffriger Logarithmen die Glieder 4. Ordnung in der Regel ohne Einfluſs bleiben.

7. Kapitel.

Der Lauf der geodätischen Linie.

§ 1. **Die Form der geodätischen Kreise in der Nähe des, dem Drehpunkt einer geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid gegenüberliegenden Punktes.** In Ergänzung des S. 217 über den Lauf der geodätischen Linie Gesagten interessiert zunächst das Verhalten der in der Überschrift dieses Paragraphen genannten geodätischen Kreise. Wir gehen bei Untersuchung derselben nur bis zu Gliedern mit e^2 und vernachlässigen e^4 und höhere Potenzen der Excentricität e der Meridianellipse. Nach S. 223 hat man alsdann für die Länge der geodätischen Linie zwischen den Punkten P_1 und P_2, e als Gröfse 1. Ordnung betrachtet:

$$s = b_0\left\{(1 + k_1)\,\Delta\varphi + \frac{1}{2}k_1(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + Gl_4\right\}, \quad (1)$$

worin mit Beibehaltung der angeführten Genauigkeit

$$k_1 = \frac{1}{4}k^2 + \cdots = \frac{e^2}{4}\sin^2\beta_0 + \cdots = \frac{1}{2}\mathfrak{a}\sin^2\beta_0 + \cdots \quad (2)$$

genommen werden darf. β_0 ist die gröfste reduzierte Breite, welche die durch P_1 und P_2 bestimmte geodätische Linie in ihrem ganzen Laufe erreichen kann.

Für geodätische Kreise ist s konstant. Nehmen wir ferner an, dafs $\Delta\varphi$ mit π bis auf einen Bruchteil der 2. Ordnung übereinstimmt, sodafs in der Gleichung

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi + \chi \quad (3)$$

χ die 2. Ordnung hat, so geht der Faktor von b_0 in Gleichung (1) über in:

$$\pi + \frac{1}{2}\mathfrak{a}\pi\sin^2\beta_0 + \chi + Gl_4.$$

Es ist daher, wenn χ_0 eine Konstante bezeichnet, s konstant, falls

$$\chi = \chi_0 - \frac{1}{2}\mathfrak{a}\pi\sin^2\beta_0 + Gl_4 \quad (4)$$

genommen wird.

Diese Bedingungsgleichung für die geodätischen Kreise ist nunmehr anzuwenden auf das sphärische Hilfsdreieck, Fig. 21 S. 232. Mit Rücksicht auf (3) erhält man:

$$\sin\beta_2 = -\sin\beta_1\cos\chi + \cos\beta_1\sin\chi\cos\alpha_{1.2}$$

und hieraus:

$$\beta_2 = -\beta_1 + \chi \cos \alpha_{1.2} + Gl_4.$$

Diese Relation vernachlässigt, wie angemerkt, nur Glieder 4. Ordnung, falls P_1 und P_2 nicht den Polen nahe liegen. Von diesem besondern Falle sehen wir ab und erhalten dann unter Substitution des Wertes von χ aus (4):

$$\beta_2 = -\beta_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{a}\pi \sin^2\beta_0 \cos \alpha_{1.2} + \chi_0 \cos \alpha_{1.2} + Gl_4. \tag{5}$$

Für den Längenunterschied $L_{1.2}$ der Punkte P_1 und P_2 erhält man nach S. 231 (14) unter Beibehaltung derselben Genauigkeit wie bisher die Gleichung:

$$L_{1.2} = \varDelta\lambda - \mathfrak{a} \cos \beta_0 \varDelta\varphi + Gl_4. \tag{6}$$

Hierzu giebt zunächst wieder das sphärische Hilfsdreieck, Fig. 21:

$$\sin \varDelta\lambda = \sin \varDelta\varphi \sin \alpha_{1.2} \sec \beta_2,$$

und es wird mit Rücksicht auf die Relation (3) für $\varDelta\varphi$, abgesehen von der Nähe der Pole:

$$\varDelta\lambda = \pi + \chi \sec \beta_2 \sin \alpha_{1.2} + Gl_4$$

Substituiert man dies in (6) und setzt für χ den Wert nach (4), für $\varDelta\varphi$ im letzten Gliede aber einfach π, so folgt:

$$L_{1.2} = \pi - \frac{1}{2}\mathfrak{a}\pi(2\cos\beta_0 + \sin^2\beta_0 \sec\beta_2 \sin\alpha_{1.2}) + \chi_0 \sec\beta_2 \sin\alpha_{1.2} + Gl_4. \tag{7}$$

Da wir von der Nähe des Poles absehen, dürfen wir hierin ferner für β_2 einfach $-\beta_1$ setzen. Substituieren wir außerdem für $\cos \beta_0$ nach S. 232 (2) den Wert $\cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}$ und für $\sin^2\beta_0$ entsprechend $1 - \cos^2\beta_1 \sin^2\alpha_{1.2}$, so erhalten wir aus (5) und (7) nach einfacher Reduktion:

$$\left.\begin{aligned} \beta_2 &= -\beta_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{a}\pi\cos\alpha_{1.2}(1 - \cos^2\beta_1 \sin^2\alpha_{1.2}) + \chi_0 \cos\alpha_{1.2} + Gl_4 \\ L_{1.2} &= \pi - \frac{1}{2}\mathfrak{a}\pi \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2} (1 + \sec^2\beta_1 + \cos^2\alpha_{1.2}) \\ &\qquad + \chi_0 \sec \beta_1 \sin \alpha_{1.2} + Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Der Variation von $\alpha_{1.2}$ entspricht eine Bewegung von P_2 in einem geodätischen Kreis, dessen Figur sich (abgesehen von Gliedern der 4. Ordnung) aus den (8) herleiten läfst.

Vergleicht man nun den Punkt C, welcher P_1 auf der Oberfläche gerade gegenüberliegt und die geographische Breite $-\beta_1$ hat, mit

P_2, so ist $\beta_2 + \beta_1$ die Breitendifferenz und $L_{1.2} - \pi$ die geographische Längendifferenz beider.

Beziehen wir also in einer Ebene einen Punkt B auf einen Anfang C rechtwinkliger Koordinaten ξ und η, wobei gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -(\beta_2 + \beta_1) \\ \eta &= (L_{1.2} - \pi)\cos\beta_1 \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

so giebt die, konstantem χ_0 und veränderlichem $\alpha_{1.2}$ entsprechende Kurve der B offenbar sehr nahe ein Bild des von P_2 beschriebenen geodätischen Kreises und zwar in der Verjüngung $\frac{1}{a_0}$.

Ändert man dagegen χ_0 bei konstantem $\alpha_{1.2}$, so beschreibt B eine Gerade im Azimut $180^0 - \alpha_{1.2}$ gegen die Axe der ξ. Dasselbe stimmt mit dem Azimut der wachsenden geodätischen Linie P_2 bis auf Gröfsen der 2. Ordnung überein, denn es ist nach (9)

$$d\xi : d\eta = -\, d\beta_2 : \cos\beta_1\, dL_{1.2},$$

und es ist ferner das letztere Verhältnis bis auf Gröfsen 2. Ordnung gleich der Cotangente jenes Azimuts, d. i. nach S. 279 (1)

$$-\, w_2 d\beta_2 : \cos\beta_2\, dL_{1.2}.$$

Die Formeln für ξ und η werden mit Rücksicht auf (8) und indem wir von jetzt ab die Anführung der Restglieder unterlassen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi\cos\alpha_{1.2}\,(1 - \cos^2\beta_1\sin^2\alpha_{1.2}) - \chi_0\cos\alpha_{1.2} \\ \eta &= -\frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi\cos^2\beta_1\sin\alpha_{1.2}\,(1 + \sec^2\beta_1 + \cos^2\alpha_{1.2}) + \chi_0\sin\alpha_{1.2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die positiven ξ und η sind von C aus bezw. nach Süden nnd Westen gerichtet.

Differenziert man nach $\alpha_{1.2}$, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\alpha_{1.2}} &= -\sin\alpha_{1.2}\left\{\frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi\,(\sin^2\beta_1 + 3\cos^2\beta_1\cos^2\alpha_{1.2}) - \chi_0\right\} \\ \frac{d\eta}{d\alpha_{1.2}} &= -\cos\alpha_{1.2}\left\{\frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi\,(\sin^2\beta_1 + 3\cos^2\beta_1\cos^2\alpha_{1.2}) - \chi_0\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Hieraus folgt zunächst $\frac{d\eta}{d\xi} = \cot\alpha_{1.2}$ bei konstantem χ_0; mithin ist in der Abbildung das Azimut des geodätischen Kreises gleich $90^0 - \alpha_{1.2}$, sodafs er also normal zur geodätischen Linie steht — eine Thatsache, die schon in aller Strenge fürs Ellipsoid selbst nachgewiesen ist.

Man sieht ferner, dafs die Differentialquotienten von ξ und η nach $\alpha_{1.2}$ gleichzeitig null werden für

$$\chi_0 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi\,(\sin^2\beta_1 + 3\cos^2\beta_1\cos^2\alpha_{1.2}). \tag{12}$$

Existiert nun bei konstantem χ_0 ein $\alpha_{1.2}$, welches dieser Gleichung entspricht, so hat der zugehörige geodätische Kreis in der Abbildung *Spitzen*, deren Koordinaten nach (10) sind:

$$\xi_0 = -\,\mathfrak{a}\pi\cos^2\beta_1\cdot\cos^3\alpha_{1.2} \qquad \eta_0 = -\,\mathfrak{a}\pi\cos^2\beta_1\cdot\sin^3\alpha_{1.2} \tag{13}$$

Hierzu giebt (12):

$$\cos^2\alpha_{1.2} = \frac{\chi_0 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi\sin^2\beta_1}{\frac{3}{2}\,\mathfrak{a}\pi\cos^2\beta_1}\,. \tag{14}$$

Zur Bedingungsgleichung für das Auftreten einer Spitze gelangt man auch, indem man

$$\mathfrak{m} = 0$$

setzt. Die Gleichung (5) S. 274 giebt hiermit:

$$\sin\varDelta\varphi = \mathfrak{a}\sin^2\beta_0\sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\varDelta\varphi + Gl_4, \tag{15}$$

woraus man sofort erkennt, dafs Spitzen nur für solche geodätische Kreise möglich sind, welche ihrem Drehungszentrum nahezu diametral gegenüberliegen. Aus (15) gelangt man mit Rücksicht auf (3) und (4) sowie (2) S. 232 wieder zu (12), womit sich diese Bedingungsgleichung bis auf Glieder 4. Ordnung richtig erweist; da $\cos^2\alpha_{1.2}$ an die Grenzen null und 1 gebunden ist, folgt aus (12), dafs (abgesehen von Gliedern 4. Ordnung) nur für solche Werte χ_0, welche sich der Bedingung

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi\sin^2\beta_1 \leqq \chi_0 \leqq \frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi\,(1 + 2\cos^2\beta_1) \tag{16}$$

fügen, Spitzen in den geodätischen Kreisen vorkommen.

§ 2. Fortsetzung: Die Form der geodätischen Kreise mit Spitzen. Um einen Überblick zu gewinnen, wurde für einen Äquatorpunkt als Zentrum der Drehung die durch Fig. 25 gegebene ebene Darstellung des Verlaufs der geodätischen Kreise mit Spitzen mit Hilfe der Formeln (10) entworfen, in welchen also $\cos\beta_1 = 1$ gesetzt ist.

Die Figur giebt geodätische Kreise für Werte von χ_0 im Intervall $\frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi$. Den geodätischen Kreisen I, II, III, IV insbesondere entsprechen die Werte χ_0 gleich null, $\frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\pi$, $\mathfrak{a}\pi$ und $\frac{3}{2}\,\mathfrak{a}\pi$, mithin wachsende Abstände vom Drehungszentrum.

Aufser den geodätischen Kreisen und den geodätischen Linien von 10 zu 10° Azimut giebt Fig. 25 auch die Verbindungskurve der Spitzen an, welche in der ebenen Darstellung im allgemeinen charakterisiert ist durch die Gleichung:

$$\xi_0^{\frac{2}{3}} + \eta_0^{\frac{2}{3}} = (\mathfrak{a}\pi \cos^2\beta_1)^{\frac{2}{3}}, \tag{1}$$

worin im speziellen Falle der Fig. 25 aber $\cos\beta_1 = 1$ einzuführen ist.

Ein Äquatorpunkt als Zentrum.

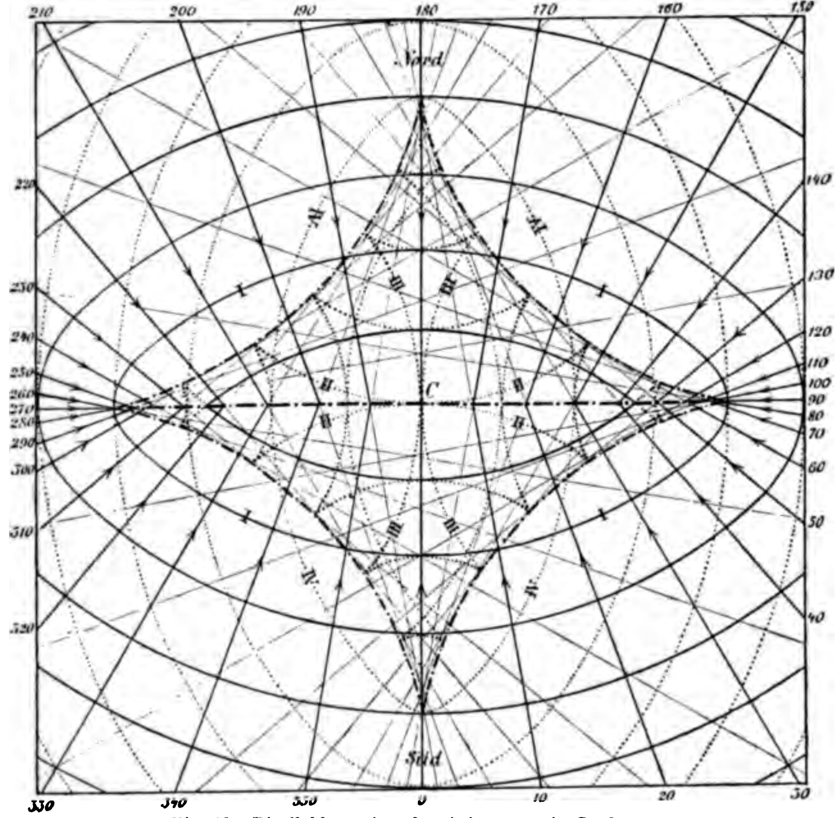


Fig. 25. Die Zahlen geben das Azimut $\alpha_{1.2}$ in Graden an.

Nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie ist dies die Gleichung der Einhüllenden aller Geraden von der konstanten Länge $\mathfrak{a}\pi \cos^2\beta_1$ zwischen den Axen der ξ und η.

Diese Geraden sind identisch mit denjenigen, welche in der ebenen Darstellung den geodätischen Linien entsprechen; denn bildet man $\frac{d\eta_0}{d\xi_0}$, so sieht man sogleich, dafs die Tangente der Einhüllenden im Punkte (ξ_0, η_0) gleiche Richtung hat mit der, der geodätischen Linie entsprechenden Geraden, die durch diesen Punkt führt.

Man erkennt übrigens unmittelbar geometrisch, dafs der Ort aller Spitzen eine Einhüllende der geodätischen Linien sein mufs, weil wegen $\mathfrak{m} = 0$ in jeder Spitze 2 unendlich benachbarte dieser Linien sich schneiden.

Die Fig. 25 behält im wesentlichen ihre Gültigkeit auch für beliebige Punkte als Drehungszentrum; nur zieht sich zufolge Gleichung (1) die Einhüllende mehr und mehr zusammen, je näher jenes einem der Pole rückt. Ihre halben Axenlängen sind bis auf Bruchteile 2. Ordnung gleich

$$a_0 \mathfrak{a} \pi \cos^2 B_1 , \qquad (2)$$

wenn B_1 die geographische Breite des Zentrums bezeichnet.

Infolge dieses Zusammenziehens wird das Gebiet, in welchem die geodätischen Kreise von der einfachen kreisartigen Form abweichen, immer kleiner, je mehr sich das Zentrum einem der Pole nähert, und es verschwindet ganz, sobald einer der Pole selbst Zentrum ist. Da unsere Entwicklungen z. T. unter Ausschlufs der Nähe der Pole angestellt sind, so bedarf die letztere Folgerung allerdings der Bestätigung, die indes ohne weiteres aus dem Faktum entnommen wird, dafs die geodätischen Linien für einen Pol als Zentrum die Parallelkreise sind.*)

Die geodätischen Kreise der Fig. 25 zeigen nun auch unmittelbar, wie die *kürzesten* Linien von dem Ausgangspunkte hergelaufen kommen. Man hat dabei nur zu beachten, dafs die Kreise I bis IV, wie schon angegeben, in wachsenden Abständen vom Drehungszentrum liegen, und man wird leicht verificieren, dafs die kräftigen Geraden kürzesten Linien angehören, die in Richtung der Pfeile von dem Drehungszentrum herkommen. Die geodätischen Kreise sind in Fig. 25, insoweit sie *Linien gleichen kürzesten Abstandes* sind, ebenfalls kräftig ausgezogen.

Um streng festzustellen, wie die Kürzesten laufen, ist eine *genaue* Kenntnis der Mittellinien (Axen) der von der Einhüllenden auf dem Ellipsoid begrenzten Fläche nötig; denn Fig. 25 zeigt auf einen Blick, dafs für den Lauf einer Kürzesten die Lage ihres Endpunktes P_2 in Bezug auf diese Mittellinien — kurz gesagt: dafs der Quadrant der eingehüllten Fläche, welcher P_2 enthält — mafsgebend ist.

---

*) Eine Untersuchung über die Einhüllende, welche ihr Zentrum im Aquator hat, giebt *Cayley* in dem *Philosophical Magazine* Vol. 40, 1870 2. Sem., S. 10 u. ff. Er nennt diese Linie *die geodätische Evolute*. *Cayleys* Untersuchung, welche für beliebige Abplattung gilt und elliptische Funktionen anwendet, wurde dem Verfasser erst während des Druckes bekannt.

Die eine Mittellinie fällt in den Meridian des Punktes C, welcher P_1 gegenüber liegt. Dieses bedarf keines Beweises.

Die andere hat die Eigentümlichkeit, dafs ihre Punkte durch je 2 gleichlange Kürzeste mit dem Ausgangspunkt P_1 verbunden sind, und sie fällt in den Parallelkreis des Punktes C. Dieses letztere ist noch zu beweisen.

§ 3. Kürzeste Linien zwischen nahezu diametralen Punkten. Verbinden wir auf der Hilfskugel (Fig. 21 S. 232) zwei diametral liegende Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ durch einen gröfsten Kreis, so ist $\Delta\lambda = \Delta\varphi = \pi$ und nach S. 231 (14)

$$L_{1.2} = \pi - \mathfrak{a}\pi \cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2}\left(1 - \frac{1}{2}k_1 + \cdots\right) \tag{1}$$

unter Verschwinden aller periodischen Glieder. Zugleich ergiebt sich als lineare Länge der geodätischen Linie P_1P_2 nach S. 223:

$$s = \pi b_0 \frac{1 + \frac{1}{4}k_1^2 + \cdots}{1 - k_1}, \tag{2}$$

ebenfalls unter Verschwinden aller periodischen Glieder. Dabei ist nach S. 221

$$k_1 = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4 + \cdots \qquad k^2 = \frac{e^2 \sin^2\beta_0}{1 - e^2 + e^2\sin^2\beta_0}, \tag{3}$$

mit nachstehendem Werte für $\sin^2\beta_0$ zufolge S. 232 (2):

$$\sin^2\beta_0 = 1 - \cos^2\beta_1 \sin^2\alpha_{1.2}. \tag{4}$$

Diese Formeln zeigen, dafs $L_{1.2}$ und s in Bezug auf $\alpha_{1.2}$ nur vom Sinus abhängen, dafs daher für zwei Punkte P_1 und P_2 mit den geographischen Breiten B_1 und $B_2 = -B_1$ *zwei* gleichlange geodätische Verbindungslinien existieren *können*, deren Azimute $\alpha_{1.2}$ alsdann sich zu 180° ergänzen werden. Es *müssen* selbstverständlich diese zwei Verbindungen nicht notwendig existieren; sie werden nur dann vorhanden sein, wenn $L_{1.2}$ die Gleichung (1) erfüllt. Da nun die Grenzwerte von $\sin\alpha_{1.2}$ gleich ± 1 sind, so mufs $L_{1.2}$ der Bedingung genügen:

$$\left.\begin{aligned} \pi - \mathfrak{a}\pi\cos\beta_1\left(1 - \frac{1}{8}e^2\sin^2\beta_1 + \cdots\right) &\leq L_{1.2} \\ L_{1.2} \leq \pi + \mathfrak{a}\pi\cos\beta_1\left(1 - \frac{1}{8}e^2\sin^2\beta_1 + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ist $L_{1.2} = \pi \mp \mathfrak{a}\pi\cos\beta_1\left(1 - \frac{1}{8}e^2\sin^2\beta_1 + \cdots\right)$, so fallen die

2 gleichlangen Verbindungen in eine, im Azimut $\alpha_{1.2} = 90^0$ bezw. 270^0 von P_1 ausgehende und im Azimut $\alpha_{2.1} = 270^0$ bezw. 90^0 in P_2 einmündende Linie zusammen.

In diesem Falle liegt P_2 in der östlichen oder westlichen Spitze der Einhüllenden. Der geometrische Ort aller P_2 mit 2 gleichlangen Verbindungen ist die ostwestliche Axe der Einhüllenden (Fig. 25), und dies ist nach der Voraussetzung $B_2 = -B_1$ (wie zu beweisen war) ein Stück des Parallelkreises, welcher durch den zu P_1 diametralen Punkt C führt.

Mit Rücksicht auf Fig. 25 erkennt man nunmehr auch, dafs die kürzeste Verbindung zweier nahezu diametralen Punkte P_1 und P_2 niemals die, durch den zu P_1 diametralen Punkt C führende, ostwestliche Axe der Einhüllenden der von P_1 ausgehenden geodätischen Linien schneiden kann, ebenso wenig wie überhaupt den Meridian von C. Hierdurch ist der Quadrant von $\alpha_{1.2}$ bestimmt.

Da bei gehöriger Verlängerung alle von P_1 ausgehenden geodätischen Linien die ostwestliche Axe der Einhüllenden schneiden, hier aber $\Delta\varphi = \pi$ ist, so erkennt man ferner, dafs für eine Kürzeste stets

$$\Delta\varphi \leqq \pi \tag{6}$$

sein mufs, was zur Ergänzung von S. 264 bemerkt wird.

Um eine Näherungsformel für das Azimut der Kürzesten zwischen zwei gegebenen, nahezu diametral liegenden Punkten zu gewinnen, eliminieren wir aus den Formeln (8) S. 322 die Unbekannte χ_0, indem wir die erste derselben mit $\sin\alpha_{1.2}$, die zweite mit $\cos\alpha_{1.2}\cos\beta_1$ multiplizieren und dann beide subtrahieren. Es folgt:

$$\begin{aligned}(\beta_1 + \beta_2)\sin\alpha_{1.2} &+ (\pi - L_{1.2})\cos\alpha_{1.2}\cos\beta_1 \\ &= \mathfrak{a}\pi\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2}\cos^2\beta_1 + Gl_4.\end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus kann man eine Gleichung 4. Grades für $\sin\alpha_{1.2}$ herleiten; indessen dürfte es bequemer sein, die einzige in betracht kommende Wurzel durch Versuche aus der Gleichung (7) oder aus der meist ausreichenden Gleichung

$$(\beta_1 + \beta_2)\tan\alpha_{1.2} + (\pi - L_{1.2})\cos\beta_1 = \mathfrak{a}\pi\cos^2\beta_1\sin\alpha_{1.2} + \cdots \tag{8}$$

zu bestimmen. Man hat dabei zu beachten, dafs nach dem oben Entwickelten die Beziehung besteht:

$$\left.\begin{array}{lll}\alpha_{1.2} < 180^0 & \text{für} & L_{1.2} < 180^0 \\ \alpha_{1.2} > 180^0 & ,, & L_{1.2} > 180^0\end{array}\right\}. \tag{9}$$

Wenn nun der Punkt P_2 innerhalb des Raumes der Einhüllenden liegt, d. h. nach S. 323 (9) und S. 325 (1), wenn

$$(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{2}{3}} + (\pi - L_{1.2})^{\frac{2}{3}} \cos \beta_1^{\frac{2}{3}} \leq (\mathfrak{a}\pi \cos^2\beta_1)^{\frac{2}{3}} + \cdots,$$

so haben obige Gleichungen (7) und (8) zwei Wurzeln kleiner oder gröfser als 180°, von denen der Kürzesten entspricht (vergl. Fig. 25):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{1.2} \text{ im 1. oder 4. Quadr. für } (\beta_2 + \beta_1) < 0 \\ \alpha_{1.2} \text{ „ 2. „ 3. „ „ } (\beta_2 + \beta_1) > 0 \end{array}\right\}. \tag{10}$$

Mit Hilfe dieser Formeln wird es gelingen, in allen Fällen, wo bei dem Verfahren S. 247 § 13 die 1. Annäherung $\varDelta\lambda = L_{1.2}$ ungenügend sein sollte, einen brauchbaren 1. Annäherungswert für $\alpha_{1.2}$ zu gewinnen, mittelst dessen weiter in 1. Annäherung folgt:

$$\varDelta\lambda = L_{1.2} + \mathfrak{a}\pi \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2} + \cdots. \tag{11}$$

Nur natürlich mufs es erscheinen, dafs auch diese 1. Annäherung eine verhältnismäfsig ungünstige ist für Lagen von P_2 nahe der östlichen oder westlichen Spitze der Einhüllenden der von P_1 ausgehenden geodätischen Linien (oder umgekehrt). Denn hier giebt eine endliche Drehung der Geodätischen eine mehr oder weniger als verschwindend zu betrachtende Ortsänderung von P_2.

§ 4. Der Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts.

Für die Geodäsie ist der Richtungsunterschied zwischen dem Vertikalschnitt und der geodätischen Linie, welche dieselben beiden Punkte verbinden, besonders dadurch wichtig, dafs sich die beobachteten Horizontalwinkel und Azimute auf Vertikalschnitte beziehen, während die Einführung der geodätischen Linie selbstverständlich verlangt, dafs mit den Azimuten dieser Linie gerechnet wird. Es mufs daher eine Reduktion der Vertikalschnittsazimute d. i. der astronomischen Azimute auf geodätische Azimute stattfinden.

Hierbei handelt es sich nun nur um geringe Abstände zweier Punkte und dafür ist mit Hilfe bereits entwickelter Formeln jene Richtungsdifferenz leicht zu erhalten. Für Punkte in ganz beliebiger gegenseitiger Lage jedoch kann man ebenso wenig eine direkte Formel aufstellen, wie für die Azimutaldifferenz der beiden verbindenden Vertikalschnitte (S. 183), weil die betreffenden Reihen im allgemeinen nicht konvergieren.

Der Unterschied von astronomischem und geodätischem Azimut ist eben auch nur für mäfsig grofse Abstände der Punkte eine kleine Gröfse; er kann aber den Charakter einer solchen ganz verlieren und Werte bis zu 180° erlangen, wie sich weiterhin zeigen wird.

Gehen wir jetzt zu den Formeln über, so ist zunächst einerseits für die von P_1 nach P_2 führende Geodätische mit Hilfe des sphärischen Dreiecks Fig. 21 S. 232:

$$\cot \alpha_{1.2} = (\cos \varDelta\lambda \sin \beta_1 - \tan \beta_2 \cos \beta_1) : \sin \varDelta\lambda\,, \tag{1}$$

wobei nach S. 231 und wegen $\cos \beta_0 = \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}$ für $\varDelta\lambda$ die Beziehung zu $L_{1.2}$ besteht:

$$L_{1.2} = \varDelta\lambda - \frac{1}{2} e^2 \varkappa \varDelta\varphi \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}\,. \tag{2}$$

Der hierin angebrachte Faktor $\varkappa$ unterscheidet sich von 1 nur um Glieder, die in e^2 und höhere Potenzen desselben multipliziert sind und die jederzeit nur einen kleinen Bruch von gleicher Ordnung mit e^2 geben.

Man hat andrerseits für den von P_1 nach P_2 gelegten Vertikalschnitt zufolge S. 138 (2):

$$\cot a_{1.2} = \frac{(\cos L_{1.2} \sin \beta_1 - \tan \beta_2 \cos \beta_1) + e^2 (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \cos \beta_1 \sec \beta_2}{\sin L_{1.2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}}\,, \tag{3}$$

worin wir nun $\varDelta\lambda$ einführen. Indem wir vorläufig $L_{1.2} = \varDelta\lambda - \zeta$ setzen, haben wir zunächst:

$$\left.\begin{aligned} \cos L_{1.2} &= \cos \varDelta\lambda \cos \zeta + \sin \varDelta\lambda \sin \zeta\,, \\ \sin L_{1.2} &= \sin \varDelta\lambda \cos \zeta - \cos \varDelta\lambda \sin \zeta\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Da $\sin L_{1.2}$ im Nenner von (3) steht, schreiben wir die 2. dieser Gleichungen besser:

$$\sin L_{1.2} = \sin \varDelta\lambda \cos \zeta \left(1 - \cos \varDelta\lambda \frac{\tan \zeta}{\sin \varDelta\lambda}\right).$$

Hieraus folgt, da $\zeta = \frac{1}{2} e^2 \varkappa \varDelta\varphi \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}$ selbst für Linien von einem halben Umlauf noch klein ist:

$$\sin L_{1.2} = \sin \varDelta\lambda \cos \zeta \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \varkappa' \varDelta\varphi \cot \varDelta\lambda \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}\right),$$

wobei $\varkappa'$ von 1 nur um kleine von e^2 abhängende Gröfsen abweicht, während $\cos \zeta$ mit 1 sogar bis auf ein Glied mit $e^4 \varDelta\varphi^2$ übereinstimmt.

Eliminieren wir in der Parenthese rechter Hand $\sin \varDelta\lambda$ mittelst der Relation des sphärischen Dreiecks:

$$\sin \varDelta\varphi : \sin \varDelta\lambda = \cos \beta_2 : \sin \alpha_{1.2}\,,$$

so ergiebt sich:

$$\sin L_{1.2} = \sin \varDelta\lambda \cos \zeta \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \varkappa' \frac{\varDelta\varphi}{\sin \varDelta\varphi} \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \varDelta\lambda\right). \quad (5)$$

Wir führen jetzt diesen Ausdruck für $\sin L_{1.2}$ in (3) ein und können sodann offenbar für mäfsig grofse Distanzen eine Reihenentwicklung der in den Nenner von (3) tretenden Parenthese vornehmen. Entwickelt man dabei auch noch die Wurzelgröfse im Nenner von (3), substituiert den Wert von $\cos L_{1.2}$ nach (4) und beachtet schliefslich noch (1), so folgt:

$$\cot a_{1.2} = \left\{\begin{array}{l} \cot \alpha_{1.2}\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2\beta_1 + \frac{1}{2} e^2 \frac{\varDelta\varphi}{\sin \varDelta\varphi} \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos \varDelta\lambda + \cdots\right) \\ + e^2 \cos\beta_1 \sec\beta_2 \frac{\sin\beta_2 - \sin\beta_1}{\sin \varDelta\lambda} + \frac{1}{4} e^2 \varDelta\varphi \sin 2\beta_1 \sin\alpha_{1.2} + \cdots. \end{array}\right\} (6)$$

Diese Gleichung vernachlässigt e^4 u. s. f., enthält aber die von e^2 abhängigen Glieder vollständig.

Wir eliminieren nunmehr auch noch β_2 und $\varDelta\lambda$, um alles durch $\alpha_{1.2}$, β_1 und $\varDelta\varphi$ dargestellt zu erhalten. Dazu dienen nachstehende Relationen. Zunächst hat man im sphärischen Dreieck die Gleichung: $\cos \varDelta\varphi = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \varDelta\lambda$. Setzt man hierin $\sin \beta_2 = \sin \beta_1 \cos \varDelta\varphi - \cos \beta_1 \sin \varDelta\varphi \cos \alpha_{1.2}$, so findet sich:

$$\cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos \varDelta\lambda = \cos\varDelta\varphi - \sin^2\beta_1 \cos\varDelta\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 \sin\varDelta\varphi \cos\alpha_{1.2}. \quad (7)$$

Es folgt ferner aus der eben angegebenen Gleichung für $\sin \beta_2$ die Differenz $\sin \beta_2 - \sin\beta_1 = -2 \sin\beta_1 \sin^2 \frac{\varDelta\varphi}{2} - \cos\beta_1 \sin\varDelta\varphi \cos\alpha_{1.2}$. Da nun $\sin \varDelta\lambda = \sin \varDelta\varphi \sec \beta_2 \sin \alpha_{1.2}$, so hat man weiter:

$$\frac{\sin\beta_2 - \sin\beta_1}{\sin \varDelta\lambda} = -\tan \frac{\varDelta\varphi}{2} \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_{1.2}} \cos \beta_2 - \cot \alpha_{1.2} \cos \beta_1 \cos \beta_2. \quad (8)$$

Setzt man (7) und (8) in (6) ein, so führt eine leichte Reduktion zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} \cot a_{1.2} = \cot \alpha_{1.2} &- \frac{1}{2} e^2 \left(1 - \frac{\varDelta\varphi}{\tan \varDelta\varphi}\right) \cos^2\beta_1 \cot \alpha_{1.2} \\ &- \frac{1}{2} e^2 \left(\tan \frac{\varDelta\varphi}{2} - \frac{\varDelta\varphi}{2}\right) \frac{\sin 2\beta_1}{\sin \alpha_{1.2}} + \cdots. \end{aligned} \quad (9)$$

Substituieren wir hierin für $\varDelta\varphi$ einfach $s : a_0$, so ändert sich der Genauigkeitsgrad dieser Formel nicht, denn sie giebt wie vorher die in e^2 multiplizierten Glieder vollständig.

Diese Einführung von s nehmen wir gleichzeitig mit dem Übergang auf die Azimutaldifferenz $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ vor. Nach § 8 S. 30

kann man, solange überhaupt die Entwicklung (9) gilt, jedenfalls auch setzen:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} c^2 \left(1 - \frac{\frac{s}{a_0}}{\tan \frac{s}{a_0}} \right) \cos^2\beta_1 \sin 2\alpha_{1.2} \\ + \frac{1}{2} c^2 \left(\tan \frac{s}{2a_0} - \frac{s}{2a_0} \right) \sin 2\beta_1 \sin \alpha_{1.2} + \cdots . \end{array} \right\} \quad (10)$$

Diese Entwicklung enthält die in c^2 multiplizierten Glieder vollständig — auch dann noch, wenn man für β_1 einfach B_1 schreibt, also die geographische Breite einführt.

Wendet man nun endlich noch die Reihenentwicklungen für $\tan \frac{s}{a_0}$ und $\tan \frac{s}{2a_0}$ an und vernachlässigt s^5, so ergiebt sich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{a_{1.2} - \alpha_{1.2}} = \frac{1}{12} \varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} + \frac{1}{4} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \right) + Gl_6 , \quad (11)$$

in welcher Formel, ebenso wie in (10), bei unveränderter Genauigkeit rechter Hand $\alpha_{1.2}$ auch durch $a_{1.2}$ ersetzt werden darf.

Wenn in Formel (11) angegeben ist, dafs Glieder 6. Ordnung vernachlässigt sind, e und $s : a_0$ wie früher als Gröfsen 1. Ordnung betrachtet, so setzt dies voraus, dafs die vernachlässigten in c^4 multiplizierten Glieder mindestens den Faktor s^2 haben. Dieser Faktor haftet aber jedenfalls allen Glieder der Entwicklung für $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ an. Denn wenn $\frac{s}{a_0}$ unendlich klein von der 1. Ordnung ist, so fällt nach der S. 212 u. ff. gegebenen Darstellung der Vertikalschnitt mit der geodätischen Linie zusammen, d. h. ihre Richtungsdifferenz ist dann im Unendlichkleinen von höherer Ordnung als $s : a_0$. In der Entwicklung. der ersteren nach Potenzen von s (deren Möglichkeit für hinreichend kleine s keinem Zweifel unterliegt) mufs somit mindestens allenthalben s^2 als Faktor auftreten.

§. 5. **Fortsetzung: Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts.** Vergleicht man obige Formel (11) mit Formel (21) S. 186, so zeigt sich in der Form der Hauptglieder für $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ und $a_{1.2} - a'_{1.2}$ volle Übereinstimmung, es ist aber das erstere nur ein Drittel des letzteren.

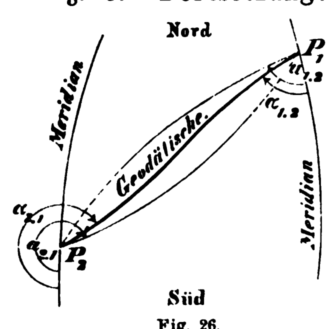


Fig. 26.

Für eine kurze geodätische Linie ist daher im allgemeinen der Verlauf bezüglich der Vertikalschnitte in der Nähe der Endpunkte P_1 und P_2 durch die Bemerkung gegeben, dafs sie den Winkelraum zwischen den Vertikalschnitten in zwei Teile im Verhältnis 1 : 2 teilt und dabei demjenigen

Vertikalschnitt am nächsten liegt, welcher von dem in betracht gezogenen Endpunkte ausgeht.

Die Differenz $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ ist für $s = 64^{km}$ höchstens rund 0,01″ und mithin so klein, daſs man die beobachteten Horizontalwinkel und Azimute direkt auf die geodätischen Linien beziehen kann, ohne im Vergleich zu den Beobachtungsfehlern merkliche Fehler zu begehen.

Anders ist es indes, wenn es sich um gröſsere Distanzen handelt, als die Seiten meſsbarer Dreiecke in der Regel sind. Für $s = a_0$ beträgt die Differenz $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ im Maximum bereits etwa 2′, wie Formel (10) auf voriger Seite zeigt. Bei weiter wachsenden s wächst diese Differenz immer rascher als mit dem Quadrat von s, was man zunächst noch aus der genannten Formel ersehen kann. Dieselbe verliert aber für nahezu diametrale Punkte P_1 und P_2 alle Brauchbarkeit, wie schon bei ihrer Entwicklung angegeben wurde.

Für solche Punkte zeigen die Formeln (1) bis (3) des vorigen Paragraphen das Verhalten von $a_{1.2}$ zu $\alpha_{1.2}$. Betrachten wir der Einfachheit halber nur den speziellen Fall, wo bei beliebigem $\alpha_{1.2}$ $\beta_2 = -\beta_1$ ist und $\varDelta\lambda$ sowie $\varDelta\varphi$ gleich π sind, wo also P_1 und P_2 auf gegenüberliegenden Parallelkreisen sich befinden und P_2 bei festgehaltenem P_1 alle Lagen innerhalb der östlichen und westlichen Spitze derjenigen Einhüllenden annehmen kann, welche den zu P_1 diametralen Punkt C umgiebt (Fig. 25 S. 325), so giebt Formel (2) für einen festgesetzten Wert von $\alpha_{1.2}$ sofort $L_{1.2}$ mittelst der Gleichung

$$L_{1.2} = \pi - \frac{1}{2} e^2 \pi \varkappa \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2} . \tag{1}$$

Die Einführung dieses Ausdrucks in die mit der Bedingung $\beta_2 = -\beta_1$ bereits umgeformte Gleichung (3):

$$\cot a_{1.2} = \frac{-\sin \beta_1 \cot \dfrac{L_{1.2}}{2} - 2e^2 \dfrac{\sin \beta_1}{\sin L_{1.2}}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}} ,$$

ergiebt hierauf:

$$\cot a_{1.2} = -\frac{\sin \beta_1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}} \left(\frac{4\varkappa'}{\pi \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}} + \frac{1}{4} e^2 \pi \varkappa'' \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2} \right), \tag{2}$$

worin $\varkappa'$ und $\varkappa''$ Koefficienten sind, die von 1 nur um kleine Gröſsen der Ordnung e^2 abweichen. β_1 sei nun der Kürze halber nur positiv.

Alsdann ist $a_{1.2}$ gleich 180° für $\alpha_{1.2}$ = null; es nimmt mit wachsendem $\alpha_{1.2}$ ab bis zu einem Minimalwerte, der zu einem $\alpha_{1.2}$ näherungsweise gleich 90° gehört; es nimmt aber sodann bei weiter wachsenden $\alpha_{1.2}$ wieder zu und ist für $\alpha_{1.2} = 180°$ ebenfalls 180°, u. s. f.

Einen guten Überblick über das gegenseitige Verhalten von Vertikalschnitt und kürzester Linie erhält man mittelst Fig. 25 durch Einzeichnen der von P_1 ausgehenden und in einem Punkte C' zusammenlaufenden Vertikalschnitte. C' ist der Punkt, wo die verlängerte Normale des Ausgangspunkt P_1 das Ellipsoid zum 2. Male trifft, Fig. 27.

Ein Punkt in 45° Breite als Zentrum.

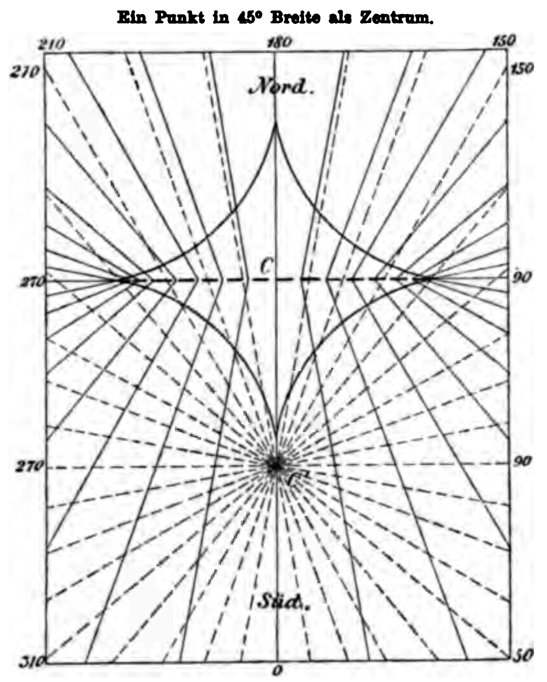


Fig. 27. Die Zahlen geben die Azimute $\alpha_{1\cdot 2}$ bezw. $a_{1\cdot 2}$ in Graden an.

Um die reduzierte Breite β' des Punktes C' zu finden, entnehmen wir aus Fig. 1 auf S. 40 als Gleichung der Normalen durch P_1:

$$z + MK_1' = x \tan B_1,$$

worin wir

$$x = -a_0 \cos \beta', \quad z = a_0\sqrt{1-e^2} \sin \beta', \quad \tan B_1 = \tan \beta_1 : \sqrt{1-e^2}$$

setzen, sowie für MK_1' den S. 41 (9) angegebenen Wert substituieren. Eine leichte Reduktion ergiebt:

$$\sin(\beta' + \beta_1) = e^2 \cos \beta_1 (\sin \beta' - \sin \beta_1).$$

Da β' ohne Zweifel nahezu gleich $-\beta_1$ ist, setzen wir $\beta' = -\beta_1 - \zeta$ und erhalten:

$$\sin \zeta = e^2 \cos \beta_1 (\sin (\beta_1 + \zeta) + \sin \beta_1).$$

Es ist daher genähert $\zeta = e^2 \sin 2\beta_1 + Gl_4$, so dass sich für die geographische Breite von C' die Formel findet:

$$B' = -B_1 - e^2 \sin 2B_1 + Gl_4. \tag{3}$$

Die Lage von C' gegen C bestimmt sich durch die Strecke CC', welche gleich ist $a_0(B' + B_1)$, abgesehen von Gliedern mit e^4. Schreibt man für e^2 einfach $2\mathfrak{a}$, so wird erhalten, wenn man CC' von C ab positiv nach Süden rechnet:

$$CC' = 2a_0\mathfrak{a} \sin 2B_1 + \cdots, \tag{4}$$

abgesehen von Bruchteilen 2. Ordnung seines Wertes.

Fig. 27 entwirft für einen Punkt P_1 in 45^0 geographischer Breite ein Bild der kürzesten Linien und der Vertikalschnitte auf dem zu P_1 diametralen Teile der Oberfläche in demselben Maſsstab wie Fig. 25.

§ 6. **Andere Bestimmungsweise des Unterschiedes von astronomischem und geodätischem Azimut für kleine Distanzen.** Zwischen den Punkten P_0 und P_n denken wir uns wie in Fig. 14 S. 213 eine geodätische Linie aus unendlich vielen, unendlich kleinen Vertikalschnitten P_0P_1, P_1P_2 u. s. f. zusammengesetzt. Zunächst bezeichnen wir die Anzahl dieser Teile mit n und die Länge jedes Teiles mit $s:n$.

Betrachten wir nun insbesondere die ersten beiden Vertikalschnitte und denken sie uns bis zu einem Werte ihrer Länge gleich s, also bis in die Nähe des Punktes P_n verlängert, so ist einleuchtend, daſs sie hier einen Abstand von einander haben, der erstens dem Flächenwinkel ν zwischen den zugehörigen Ebenen und zweitens dem Abstand der Sehne P_0P_1 von der Oberfläche bei P_n proportional ist. Dieser Abstand ist angenähert gleich $s^2 : 2\varrho_\alpha$, insofern man den Vertikalschnitt P_0P_1 und seine Verlängerung als Kreisbogen mit dem Radius ϱ_α auffassen darf, wenn ϱ_α der Krümmungsradius der Oberfläche bei P_0 im Azimut $\alpha_{0.1}$ ist. Man hat ferner nach S. 188 zu setzen, wenn ϱ_n den Querkrümmungshalbmesser in P_0 und B_0 die geographische Breite von P_0 bezeichnet:

$$\nu = \frac{1}{2}\,\delta\,\frac{s}{n\varrho_n}\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1}$$

unter Wegfall der höheren Glieder, welche wegen $n = \infty$ im Verhältnis zum angesetzten Gliede verschwinden. Der Abstand der verlängerten Vertikalschnitte P_0P_1 und P_1P_2 ist somit:

$$\frac{1}{4}\,\delta\,\frac{s^3}{\varrho_n\varrho_\alpha}\,\frac{n^2}{n^3}\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1}. \tag{1}$$

Betrachtet man in derselben Weise die gehörig verlängerten Vertikalschnitte P_1P_2 und P_2P_3, P_2P_3 und P_3P_4, u. s. f., so ergeben sich ganz gleichartige Ausdrücke für die Abstände bei P_n; es tritt aber an Stelle von n^2 im Zähler der Reihe nach $(n-1)^2$, $(n-2)^2$, u. s. f., und B_0, $\alpha_{0.1}$, ϱ_n und ϱ_α beziehen sich successive auf P_1, P_2 u. s. f.

Mit Hilfe der Differentialformeln (1) und (2) S. 279, in denen $\delta s = is : n$, $i = 0, 1, 2 \ldots n-1$, zu setzen ist, findet man leicht mit Vernachlässigung von in e^2 multiplizierten Gliedern:

$$\cos^2 B_i \sin 2\alpha_{i.i+1} = \cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1}$$

$$+ \frac{i}{n}\frac{s}{a_0} \sin 2B_0 \sin \alpha_{0.1} + \cdots. \qquad (2)$$

Nimmt man keine Rücksicht auf die Änderungen von $\varrho_n\varrho_\alpha$, die nur Bruchteile der Ordnung $e^2 s : a_0$ betragen, so erhält man als Summe der Abstände je zweier benachbarter, verlängerter Vertikalschnitte bei P_n d. h. als Abstand dieses Punktes vom verlängerten Vertikalschnitt P_0P_1:

$$\frac{1}{4}\,\delta\,\frac{s^2}{\varrho_n\varrho_\alpha}\left\{\begin{aligned} &\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1}\,\frac{\Sigma(n-i)^2}{n^3} \\ +\, &\frac{s}{a_0} \sin 2B_0 \sin \alpha_{0.1}\,\frac{\Sigma i(n-i)^2}{n^4} \end{aligned}\right\} + \cdots, \qquad (3)$$

wobei die Σ eine Summierung von $i = 0$ bis $n-1$ andeuten. Schreibt man die von n und i abhängigen Quotienten in der Form:

$$\Sigma\left(1-\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \Sigma\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

und beachtet, dafs $n = \infty$ zu nehmen ist, so kann man dieselben als Integrale berechnen mit der Variablen $\frac{i}{n} = x$ von 0 bis 1 und mit $\frac{1}{n} = dx$. Somit folgt endlich anstatt (3) für den Abstand:

$$\frac{1}{12}\,\delta\,\frac{s^2}{\varrho_n\varrho_\alpha}\left(\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1} + \frac{s}{4a_0} \sin 2B_0 \sin \alpha_{0.1}\right) + \cdots. \qquad (4)$$

Insofern wir $n = \infty$ gesetzt haben, ist dies ein Näherungswert für den Abstand einer geodätischen Linie und eines Vertikalschnitts, welche beide in demselben Azimut $\alpha_{0.1}$ von P_0 ausgehen, in der Entfernung s vom Ausgangspunkt.

Dreht man nunmehr die geodätische Linie um P_0, bis P_n in den unveränderten Vertikalschnitt zu liegen kommt, so ist offenbar der Drehungswinkel gleich der Gröfse, welche in den vorhergehenden

Paragraphen mit $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ bezeichnet worden ist. Da nun das Produkt des Winkels in die zu s gehörige reduzierte Länge $\mathfrak{m}$ jedenfalls mit sehr grofser Annäherung gleich dem oben ermittelten Abstand ist, $\mathfrak{m}$ aber bis auf Glieder 3. Ordnung mit s übereinstimmt, so folgt als Drehungswinkel:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = \frac{1}{12}\varrho'' \delta \frac{s^2}{\varrho_a \varrho_n}\left(\cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} + \frac{1}{4}\frac{s}{a_0}\sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2}\right) + Gl_6. \quad (5)$$

Hierin sind wie früher die Symbole P_1 und P_2 als Bezeichnung der Endpunkte P_0 und P_n gedacht.

Die Formel stimmt im wesentlichen mit (11) S. 332 überein. Sie ist jedoch im 1. Gliede genauer als jene, denn in Bezug auf die Potenzen von e^2 ist das 1. Glied jetzt vollständig.

Vorstehende näherungsweise Entwicklung zeigt überdies deutlich, auf welche Weise der Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts zustande kommt.

Der Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts wurde 1821 von *Bessel* ohne Entwicklung angegeben in den *Astronom. Nachr.* Bd. 1 Nr. 3, S. 33 (vergl. *Engelmann, Abhandl.* von *Bessel*, Bd. 3 S. 1). Eine Entwicklung gab *Bessel* später (1837) *Astronom. Nachr.* Bd. 14 Nr. 330, S. 289 Gleichung (19) (*Abhandl.* Bd. 3 S. 29); sie unterscheidet sich nicht wesentlich von dem hier S. 329 u. ff. eingeschlagenen Wege und führt zu Formel (10) S. 332.

In wesentlich anderer Weise aber und zwar nach einem für jede krumme Oberfläche brauchbaren Verfahren ging *Weingarten* vor (vergl. *Baeyer*, *Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche.* 1862, S. 88 oder eine kurze Notiz in *Astronom. Nachr.* Bd. 60 Nr. 1425, S. 135).

Diese Entwicklung hat *Jordan* im 2. Bande seines Handbuches der Vermessungskunde 1878 S. 334 reproduziert. Bei *Weingartens* Verfahren erhält man den betrachteten Richtungsunterschied direkt nach Potenzen von s entwickelt und zwar wird unmittelbar das 1. Glied der Formel (11) S. 332 erhalten; es setzt natürlich voraus, dafs man die Differentialgleichungen der geodätischen Linie für eine beliebige Oberfläche abgeleitet hat, und es läfst aufserdem imstich für nahezu diametrale Punkte des Rotationsellipsoids. Eine gleichartige, aber bis zu s^3 incl. fortgesetzte und höhere Potenzen von e^2 enthaltende Entwicklung gab *Andrae* 1867 in Bd. 1 der *Danske Gradmaaling* S. 181 (vergl. auch *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* Bd. 13, S. 19). Sein Ausdruck stimmt mit unserer Formel (5) bis auf den Nenner des in s^3 multiplizierten Gliedes, der bei ihm ϱ_a^3 lautet. Dieser Unterschied ist aber unwesentlich.

Die Methode unserer Entwicklung in diesem Paragraphen entspricht dem von *Sonderhof* 1869 im 51. Teile von *Grunerts Archiv* (2. Abhandlung) eingeschlagenen Wege. Sie gestattet auch eine Schätzung des Fehlers, den man begeht, wenn man eine *geodätische Linie* nach Art der Fig. 14 S. 213 *aus n endlichen Stücken* zusammensetzt:

Wir müssen zu dem Zwecke den Abstand der Sehnen P_0P_1, P_1P_2,

u. s. f. von der Oberfläche zum Teil genauer als oben ermitteln, berücksichtigen aber konsequent nur die in e^2 multiplizierten Glieder. Betrachten wir zunächst den Bogen des bis in die Nähe von P verlängerten vertikalen Schnittes $P_0 P_1$ in der Ausdehnung s als Kreisbogen vom Radius a_0, so gehört dazu ein Zentriwinkel $s : a_0$. Eine einfache Figur zeigt nun, dafs die zur Sehne $P_0 P_1$ parallele Tangente des Kreisbogens von dessen Endpunkt um

$$a_0 \left(1 - \cos \left\{ \frac{s}{a_0} \left[1 - \frac{1}{2n}\right]\right\}\right)$$

absteht, die Tangente von der Sehne aber um

$$a_0 \left(1 - \cos \frac{s}{2 a_0 n}\right),$$

mithin die Sehne vom betreffenden Endpunkt des Kreisbogens um

$$a_0 \left(\cos \frac{s}{2 a_0 n} - \cos \left\{ \frac{s}{a_0} \left[1 - \frac{1}{2n}\right]\right\}\right)$$

d. i. sehr nahe

$$\frac{s^2}{2 a_0 n^2} (n^2 - n).$$

Für $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ u. s. f. erhält man ebensolche Ausdrücke, nur tritt für n in der Parenthese der Reihe nach $n - 1$, $n - 2$ u. s. f. bis 1 auf. Jeder dieser Ausdrücke multipliziert sich mit $\frac{1}{2} e^2 \frac{s}{a_0 n} \cos B_0 \sin 2\alpha_{0.1}$ und ihre Addition giebt als Abstand des Punktes P_n von dem 1. Vertikalschnitt $P_0 P_1$:

$$\frac{1}{4} e^2 \frac{s^3}{a_0^2} \cos B_0 \cos 2\alpha_{0.1} \frac{\Sigma (n - i)^2 - \Sigma (n - i)}{n^3}.$$

Da i von 0 bis n geht, kann man statt des Zählers auch $\Sigma i^2 - \Sigma i$ schreiben.

Nun ist $\Sigma i^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$, $\Sigma i = \frac{1}{2} n(n + 1)$, also

$\Sigma (i^2 - i) = \frac{1}{3} n(n^2 - 1)$ und der Abstand daher angenähert gleich

$$\frac{1}{12} e^2 \frac{s^3}{a_0^2} \cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (6)$$

Dieser Ausdruck bezieht sich vorerst auf den Abstand des Vertikalschnitts $P_0 P_1$ von der gebrochenen, aus n Vertikalschnitten zusammengesetzten Linie in der Entfernung s von P_0. Zieht man von (6) aber den Ausdruck (4) ab, welcher den entsprechenden Abstand des Vertikalschnitts $P_0 P_1$ von der ihn in P_0 tangierenden geodätischen Linie giebt, so erhält man endlich als Abstand der geodätischen Linie von einer im gleichen Azimut beginnenden, aus n Vertikalschnitten von endlicher Länge zusammengesetzten Linie (Fig. 14 S. 213) in der Entfernung s:

$$\frac{1}{12}\, e^2 \frac{s^3}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots. \tag{7}$$

Hierbei sind Anfangs- und Endpunkt, anstatt mit P_0 und P_n, ebenso wie für Formel (5) mit P_1 und P_2 bezeichnet gedacht.

Hat man nun z. B. in äquatorialer Gegend eine Kette von Dreiecken in südwestlicher Richtung, und setzen sich 10 Dreiecksseiten mit 180°-Winkeln an einander, ist ferner die Länge einer Seite gleich $s:10$ mit $s:10 = 0{,}01\,a_0$ d. h. $s = 640000^m$, so giebt (7) als Abstand einer genauen Geodätischen, welche mit der 1. Dreiecksseite gleiches Anfangsazimut hat, vom Endpunkt der 10. Dreiecksseite $0{,}036^m$.

§ 7. Zahlenbeispiel I. Für die Linie Königsberg-Berlin hat man nach S. 158 u. 162 sowie nach S. 256 u. 261:

$$B_1 = 54^0\,42'\,50{,}6'' \qquad B_2 = 52^0\,30'\,16{,}7'' \qquad \log s = 5{,}72426$$

$$\left.\begin{aligned} a_{1.2} &= 65^0\,16'\,9{,}5806'' \\ \alpha_{1.2} &= 65\;\;16\;\;9{,}3650 \end{aligned}\right\} a_{1.2} - \alpha_{1.2} = +\,0{,}2156''$$

$$\left.\begin{aligned} a_{2.1} &= 239\;33\;0{,}9324 \\ \alpha_{2.1} &= 239\;33\;0{,}6889 \end{aligned}\right\} a_{2.1} - \alpha_{2.1} = +\,0{,}2435''.$$

Da nun

$$\log \frac{1}{12}\,\varrho''\delta = 2{,}0626 \qquad \text{und} \qquad \log \frac{1}{48}\,\varrho''\delta = 1{,}461$$

ist, so hat man nach Formel (5) S. 337:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = [13{,}5111]\,\frac{\cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2}}{\varrho_{\alpha_1}\varrho_{n_1}} + [18{,}634]\,\frac{\sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2}}{a_0\,\varrho_{\alpha_1}\varrho_{n_1}}$$

$$a_{2.1} - \alpha_{2.1} = [13{,}5111]\,\frac{\cos^2 B_2 \sin 2\alpha_{2.1}}{\varrho_{\alpha_2}\varrho_{n_2}} + [18{,}634]\,\frac{\sin 2B_2 \sin \alpha_{2.1}}{a_0\,\varrho_{\alpha_2}\varrho_{n_2}}$$

Nach *Albrecht* S. 200 und 201 findet sich für obige Werte von

$$B_1 \text{ und } \alpha_{1.2}: \quad \log \varrho_{n_1} = 6{,}8056 \qquad \log \varrho_{\alpha_1} = 6{,}8054$$

und für

$$B_2 \text{ und } \alpha_{2.1}: \quad \log \varrho_{n_2} = 6{,}8056 \qquad \log \varrho_{\alpha_2} = 6{,}8053.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \log \cos^2 B_1 &= 9{,}5233 - 10 & \log \sin 2B_1 &= 9{,}975 - 10 \\ \log \sin 2\alpha_{1.2} &= 9{,}8808 - 10 & \log \sin \alpha_{1.2} &= 9{,}958 - 10 \\ \log \cos^2 B_2 &= 9{,}5689 - 10 & \log \sin 2B_2 &= 9{,}985 - 10 \\ \log \sin 2\alpha_{2.1} &= 9{,}9414 - 10 & \log \sin \alpha_{2.1} &= 9{,}936_n - 10 \end{aligned}$$

und hiermit:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = +\ 0{,}2015 + 0{,}0141 = +\ 0{,}2156''$$

$$a_{2.1} - \alpha_{2.1} = +\ 0{,}2573 - 0{,}0138 = +\ 0{,}2435''.$$

Dies stimmt vollständig mit den nach strengen Formeln berechneten Werten überein.

Zahlenbeispiel II. Hier erhält man, wie es S. 166 und 320 verlangen, als Differenzen:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = -\ 0{,}012'' \quad \text{und} \quad a_{2.1} - \alpha_{2.1} = -\ 0{,}012''.$$

§ 8. **Der Unterschied der linearen Längen von geodätischer Linie und Vertikalschnitt zwischen denselben beiden Punkten.** Derselbe kann mit Benutzung des Vorhergehenden leicht angegeben werden. Nehmen wir P_1, von wo aus der Vertikalschnitt gelegt sein mag, als Zentrum A geodätischer Polarkoordinaten, Fig. 23 S. 269, so wird nach Gleichung (3) ebenda für das Linienelement ds des Vertikalschnitts, welches an den beliebigen Punkt P desselben angrenzt:

$$ds^2 = dr^2 + \mathfrak{m}_r^2 d\alpha_0^2, \tag{1}$$

wobei r der geodätische Radiusvektor AP, $\mathfrak{m}_r$ dessen reduzierte Länge und α_0 sein Azimut ist. Bezeichnen wir nun das Azimut des Vertikalschnitts in A mit $a_{1.2}$, so ist nach Formel (11) S. 332 in 1. Annäherung:

$$\alpha_0 = a_{1.2} - \frac{1}{12} e^2 \frac{r^2}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \cdots,$$

worin B_1 die geographische Breite von A bedeutet. Hieraus folgt:

$$d\alpha_0 = -\left(\frac{1}{6} e^2 \frac{r}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \cdots\right) dr. \tag{2}$$

Bedenken wir ferner, dafs es im 2. Gliede der Formel (1) rechter Hand in 1. Annäherung offenbar ausreicht, für mäfsig grofse Distanzen $\mathfrak{m}_r$ gleich r zu setzen, so erhalten wir aus (1) durch diese Substitution und wegen (2):

$$ds = \sqrt{1 + \frac{1}{36} e^4 \frac{r^4}{a_0^4} \cos^4 B_1 \sin^2 2a_{1.2} + \cdots}\, dr.$$

Hieraus folgt:

$$ds = \left(1 + \frac{1}{72} e^4 \frac{r^4}{a_0^4} \cos^4 B_1 \sin^2 2a_{1.2} + \cdots\right) dr.$$

Integriert man dies vom Anfangspunkt A d. i. P_1 bis zum Endpunkt P_2, so folgt:

$$s = r_{1.2} \left\{ 1 + \frac{1}{360} e^4 \cdot \frac{r_{1.2}^4}{a_0^4} \cos^4 B_1 \sin^2 2\alpha_{1.2} + \cdots \right\}, \tag{3}$$

worin s die lineare Länge des Vertikalschnitts $P_1 P_2$, $r_{1.2}$ aber diejenige der geodätischen Linie $P_1 P_2$ bedeutet.

Diese Formel ist noch ausreichend für Distanzen gleich $0{,}2a_0$. Wird die Distanz gleich a_0 und gröfser, so ist die Entwicklung zunächst zwar noch konvergent, aber das angesetzte Glied giebt doch nur eine rohe Annäherung.

Nimmt man $r_{1.2} = 0{,}2a_0$, so ist im Maximum

$$s = r_{1.2}\left(1 + \frac{1}{5000000000}\right),$$

sodafs bei zehnziffriger Rechnung die Logarithmen von s und $r_{1.2}$ sich noch nicht um eine Einheit der letzten Decimalstelle unterscheiden; es ist hiernach für die meisten praktischen Fälle in Bezug auf lineare Länge der *Vertikalschnitt* von der *geodätischen Linie* nicht merklich verschieden. [Für die Linie Berlin — Königsberg ist die Differenz $0{,}0002^{mm}$. Vergl. auch die Beispiele I u. II S. 182, 183, 261 und 320.]

Vertauscht man in (3) die Indices 1 und 2, so zeigt sich, e und $r_{1.2} : a_0$ wie immer als Gröfsen 1. Ordnung aufgefafst, für beide Vertikalschnitte eine Vergröfserung gegen die geodätische Linie um ein Glied 8. Ordnung in Bruchteilen der Länge. Der Unterschied der Längen der Vertikalschnitte gegen einander wegen der Ungleichheit dieser Glieder 8. Ordnung und wegen höherer Glieder ist daher, in Bruchteilen der Länge, höchstens von der 9. Ordnung, wie zur Ergänzung von S. 182 bemerkt werden mag.

Nach dem Vorhergehenden kann man nun die S. 181 u. 182 angegebenen Beziehungen der Länge des Vertikalschnitts zur Sehne und zu σ' unmittelbar, falls es erwünscht sein sollte, als solche der geodätischen Linie zur Sehne und bezw. zu σ' betrachten.

Die Formel (3) gab *Bessel* 1837 ohne Herleitung *Astronom. Nachr.* Bd. 14 No. 330, S. 285 (*Abhandlungen* Bd. 3, S. 26). *Weingarten* gelangte zu dieser Formel im Verfolg der oben (S. 337) erwähnten Entwicklung für eine beliebige krumme Oberfläche (vergl. *Baeyer*, a. a. O. S. 93; *Jordan* Bd. 2, S. 339). Eine Schätzung der Ordnung des Längenunterschieds von geodätischer Linie und vertikalem Schnitt in einfacher geometrischer Weise gab *Andrae* im 1. Bd. der *Dän. Gradmessung* S. 179 (vergl. auch *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* Bd. 13, S. 18).

§ 9. **Abstand der geodätischen Linie von den beiden Vertikalschnitten bei kleinen Distanzen.** In Fig. 26 S. 332 denken wir uns auf dem Vertikalschnitt $P_1 P_2$ einen Punkt P und die geodätische Linie r, welche P_1 und P verbindet. Ist α_0 deren Azimut in P_1, so hat man in 1. Annäherung wie oben:

$$\alpha_0 = \alpha_{1.2} - \frac{1}{12} e^2 \frac{r^2}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} + \cdots.$$

Dagegen ist für die geodätische Linie $P_1 P_2$, deren Länge wir nunmehr mit s bezeichnen, das Azimut in P_1 gleich

$$\alpha_{1.2} = \alpha_{1.2} - \frac{1}{12} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} + \cdots.$$

Der Azimutalunterschied der geodätischen Linien $P_1 P$ und $P_1 P_2$ ist nun $\alpha_0 - \alpha_{1.2}$; multipliziert man ihn mit der reduzierten Länge (in der mit grofser Annäherung zulässigen Voraussetzung, dafs $\alpha_0 - \alpha_{1.2}$ wie eine unendlich kleine Drehung behandelt werden darf) und setzt diese näherungsweise gleich r, so folgt als Abstand des Vertikalschnitts $P_1 P_2$ von der geodätischen Linie $P_1 P_2$ in der Entfernung r von P_1 in 1. Annäherung:

$$\frac{1}{12} e^2 r \frac{s^2 - r^2}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} + \cdots. \tag{1}$$

Vertauscht man hierin die Punkte P_1 und P_2, wobei an Stelle von r $s - r$ tritt, so folgt dagegen als Abstand des Vertikalschnitts $P_2 P_1$ von der geodätischen Linie an derselben Stelle wie vorher nach einfacher Reduktion:

$$\frac{1}{12} e^2 r \frac{(s - r)(2s - r)}{a_0^2} \cos^2 B_2 \sin 2\alpha_{2.1} + \cdots. \tag{2}$$

Da von höheren Gliedern abgesehen wird, so kann man hierin und in (1) für B_1 und B_2 einerseits, und $2\alpha_{1.2}$ und $2\alpha_{2.1}$ andrerseits, einen und denselben mittleren Wert oder auch B_1, bezw. $2\alpha_{1.2}$ einführen. Die Addition von (1) und (2) giebt dann den Abstand der Vertikalschnitte. Derselbe ist demnach im Abstande r von P_1 in 1. Annäherung gleich

$$\frac{1}{4} e^2 \frac{sr(s - r)}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} + \cdots. \tag{3}$$

Vergleicht man (1) und (3), so zeigt sich, dafs Ausdruck (3) immer gröfser ist, als (1); denn es gilt die Proportion:

$$(1) : (3) = s + r : 3s. \tag{4}$$

Daher liegt die geodätische Linie in 1. Annäherung für kleine Distanzen immer *zwischen* den beiden Vertikalschnitten, welche die Endpunkte derselben verbinden.

Es lehrt ferner die Differentiation von (3) bezw. (1) nach r, dafs in 1. Annäherung der Maximalabstand der Vertikalschnitte inmitten zwischen P_1 und P_2 sich befindet, dagegen der von geodätischer Linie

und Vertikalschnitt in der Entfernung $s:\sqrt{3}$ von demjenigen der beiden Punkte, von welchem aus der Vertikalschnitt geführt ist. Daselbst verhalten sich die Abstände (1) und (3) wie

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right):3 \quad \text{d. i. wie} \quad 1:1{,}902.$$

Vorstehende Beziehungen, wie diejenige über die Dreiteilung der Winkel zwischen den Vertikalschnitten durch die Geodätische, welche S. 332 erwähnt ist, dürfen selbstredend nicht als streng gültige und für beliebig lange Linien anwendbare aufgefafst werden. Will man die Beziehungen genauer feststellen, so ist ein genauerer Ausdruck der astronomisch-geodätischen Azimutaldifferenz anzuwenden, im übrigen aber so, wie oben geschehen ist, vorzugehen.

Wir betrachten jetzt in dieser Weise denjenigen Fall, wo Vertikalschnitt und geodätische Linie nahezu das Azimut 90° haben und insbesondere, wenn $B_1 = B_2$ ist. Nach den Formeln (1) und (3) würden für $a_{1.2} = 90°$ die beiden Vertikalschnitte untereinander und mit der geodätischen Linie zusammenfallen. Dies mufs jedoch für die beiden Vertikalschnitte genauer dahin modificiert werden, dafs sie nur zusammenfallen, wenn beide Punkte P_1 und P_2 auf demselben Parallelkreis liegen — in jedem andern Falle (ausgenommen für die Lage beider Punkte auf demselben Meridian) fallen sie nicht zusammen. Die geodätische Linie aber hat überhaupt für Werte von $\alpha_{1.2}$ um 90° herum eine etwas abweichende Lage von beiden Vertikalschnitten (sie kann mit diesen auch nur für zwei in demselben Meridian gelegene Punkte P_1 und P_2 genau koincidieren, weil nur dann die Schmiegungsebene jedes der beiden verbindenden Vertikalschnitte zugleich für alle Zwischenpunkte Vertikalebene ist).

Aus Formel (11) S. 332 ist zu ersehen, dafs für Werte von $a_{1.2}$ und $\alpha_{1.2}$ nahe an 90° sich die Azimutaldifferenz auf eine Gröfse 5. Ordnung reduziert; der lineare Abstand zwischen geodätischer Linie und vertikalem Schnitt ist daher für solche Lagen eine Ordnung höher als im allgemeinen. Man sieht aber sogleich, dafs er nicht null wird.

Wenn wegen $B_1 = B_2$ die Vertikalschnitte zusammenfallen, so ist nach S. 144 im sphärischen Hilfsdreieck (1)

$$\tan\frac{\sigma'}{2} = -\cot B_1 \cos a_{1.2}\,.$$

Hieraus folgt mit Vernachlässigung von Bruchteilen der 2. Ordnung (vergl. S. 182 (13))

$$\cos a_{1.2} = -\frac{1}{2}\frac{s}{a_0}\tan B_1\,(1+Gl_2). \tag{5}$$

Nach S. 332 (11) ist ferner:

$$\alpha_{1.2} = a_{1.2} - \frac{1}{12} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \frac{1}{4} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin a_{1.2}\right) + Gl_6. \quad (6)$$

Ersetzt man hierin im 1. Gliede $\cos a_{1.2}$ durch den Ausdruck (5), so ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dafs $\sin a_{1.2}$ von 1 nur um eine Gröfse der 2. Ordnung abweicht:

$$\alpha_{1.2} = a_{1.2} + \frac{1}{48} e^2 \frac{s^3}{a_0^3} \sin 2B_1 + \cdots. \quad (7)$$

Die mehrfach erwähnte Formel (11) S. 332 giebt ferner mit $s:2$ als Distanz in Bezug auf diejenige geodätische Linie, welche von P_1 nach dem zwischen P_1 und P_2 inmitten gelegenen Punkt der Vertikalschnitte gelegt werden kann, das Azimut:

$$\alpha_0 = a_{1.2} - \frac{1}{48} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \frac{1}{8} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin a_{1.2}\right) + Gl_6. \quad (8)$$

Setzt man hierin im 2. Gliede rechter Hand für $\cos a_{1.2}$ den in (5) angegebenen Wert, so wird erhalten:

$$\alpha_0 = a_{1.2} + \frac{1}{128} e^2 \frac{s^3}{a_0^3} \sin 2B_1 + \cdots. \quad (9)$$

Vergleicht man α_0 mit $\alpha_{1.2}$, so sieht man, dafs für positive B_1 die geodätische Linie nördlich von den zusammenfallenden Vertikalschnitten liegt. Der Abstand ist inmitten am gröfsten und gleich $\frac{1}{2}(\alpha_{1.2} - \alpha_0)\,s$ d. i. gleich:

$$\frac{5}{768} e^2 \frac{s^4}{a_0^3} \sin 2B_1 + \cdots.\text{*)} \quad (10)$$

Für $s = 0{,}1 a_0$ giebt dies im Maximum nur rund $\frac{1}{4}$ Meter wobei nach (7) $\alpha_{1.2} = a_{1.2} + 0{,}03''$.

Für $s < 0{,}02 a_0$ sind die bezüglichen Werte so klein, dafs praktisch genommen zwischen den zusammenfallenden Vertikalschnitten und der geodätischen Linie kein Unterschied mehr ist.

§ 10. Überblick über die Lage der geodätischen Linie zu den beiden Vertikalschnitten für kleine Distanzen. Untersucht man mit Hilfe der zweigliedrigen Ausdrücke für die Azimutaldifferenzen

*) Nach (10) ist unsere ganz gelegentlich bei einer Besprechung entstandene Angabe (ohne Entwicklung) in der *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* von *Schlömilch*, Litteraturzeitung 1873 S. 39 zu korrigieren. Der richtige Ausdruck (10) geht übrigens ohne weiteres aus einer schon 1870 angestellten Untersuchung von *A. R. Clarke* in dem *Philosophical Magazine* 1870 Vol. 39 p. 361 Art. 8 hervor.

Der Rest von (10) hat die Form $a_0 Gl_8$, da (10) eine gerade Funktion von s sein mufs; denn man kann (10) als Funktion jedes einzelnen der beiden Abstände $\pm s:2$ auffassen, welche P_1 und P_2 vom Scheitel der Geodätischen haben. Der Rest in (7) hat ebenso die 7. Ordnung.

die Lage einer geodätischen Linie $P_1 P_2$ zu den beiden Vertikalschnitten im allgemeinen, so findet man Folgendes.

Man denke sich P_2 in der Entfernung s von P_1, welches eine nördliche Breite haben soll, um diesen Punkt einen geodätischen Kreis beschreibend. Das südwestliche Azimut $\alpha_{1.2}$ sei anfangs null; dabei fallen die Geodätische und die zwei Vertikalschnitte zusammen. Wenn dann $\alpha_{1.2}$ wächst, so ist für Werte dieses Azimuts im 1. Quadranten die geodätische Linie stets zwischen den beiden vertikalen Schnitten, von denen $P_1 P_2$ der nördlichere ist, gelegen.

Ist in P_1 bei weiterem Wachsen aber

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{1}{4} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots \tag{1}$$

geworden, so tangiert die Geodätische den Vertikalschnitt $P_1 P_2$ in P_1; bei fortgesetzter Drehung rückt der an P_1 grenzende Teil der Geodätischen nördlich aus dem von den beiden Vertikalschnitten umschlossenen Raum heraus und für

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{3}{8} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots \tag{2}$$

liegt sie ganz aufserhalb, wobei sie den Vertikalschnitt $P_1 P_2$ bei P_2 tangiert. Bei weiterer Drehung werden für

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots \tag{3}$$

die Vertikalschnitte identisch; die Geodätische liegt von da an nördlich von denselben bis zu dem Zeitpunkt, wo der nördlichere der beiden Vertikalschnitte, nämlich $P_2 P_1$, die Geodätische in P_1 tangiert für

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{5}{8} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots; \tag{4}$$

von hier ab kommt die Geodätische wieder z. T. zwischen die Vertikalschnitte zu liegen, bis sie für

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{3}{4} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots \tag{5}$$

den Vertikalschnitt $P_2 P_1$ in P_2 tangiert und von nun an für weitere Werte von $\alpha_{1.2}$ im 2. Quadranten ganz zwischen beiden Vertikalschnitten enthalten ist. U. s. f.

Vorstehendes schliefst man aus den Formeln (21) und (25) S. 186 u. 187 und aus Formel (11) S. 332. Hiernach hat man für die Azimutaldifferenzen der beiden Vertikalschnitte:

$$\left.\begin{array}{l} a_{1.2} - a'_{1.2} = \\ a_{2.1} - a'_{2.1} = \end{array}\right\} \frac{1}{4} e'^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{s}{2a_0}\right) + Gl_6, \tag{6}$$

und für die Azimutaldifferenz der geodätischen Linie und des Vertikalschnittes $P_1 P_2$ in P_1:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = \frac{1}{12} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{s}{4a_0}\right) + Gl_6. \quad (7)$$

Es ist daher

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = \frac{1}{3}(a_{1.2} - a'_{1.2}) - \frac{1}{48} e^2 \frac{s^3}{a_0^3} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} + Gl_6.$$

Vertauscht man die Indices 1 und 2, so folgt, weil bei Vernachlässigung von Gliedern 6. Ordnung im 2. Teil rechts B_2 mit B_1 und $\alpha_{2.1}$ mit $180^0 + \alpha_{1.2}$ vertauscht werden kann:

$$a_{2.1} - \alpha_{2.1} = \frac{1}{3}(a_{2.1} - a'_{2.1}) + \frac{1}{48} e^2 \frac{s^3}{a_0^3} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} + Gl_6.$$

Die Substitution des Wertes von $a_{2.1} - a'_{2.1}$ aus (6) führt endlich zu:

$$a_{2.1} - \alpha_{2.1} = \frac{1}{12} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{3s}{4a_0}\right) + Gl_6. \quad (8)$$

Schliefslich hat man noch durch Kombination von (7) bezw. (8) mit (6):

$$\alpha_{1.2} - a'_{1.2} = \frac{1}{6} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{5s}{8a_0}\right) + Gl_6 \quad (9)$$

$$\alpha_{2.1} - a'_{2.1} = \frac{1}{6} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{3s}{8a_0}\right) + Gl_6. \quad (10)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man das oben entworfene Bild von der gegenseitigen Lage der 3 Linien noch vervollständigen, was wir aber dem Leser überlassen.

---

8. Kapitel.

Das geodätische Dreieck; Dreiecksnetze.

§ 1. **Fundamentalsatz für geodätische Polarkoordinaten.** Auf S. 269 sind bereits einige Beziehungen für geodätische Polarkoordinaten angegeben, zu denen jetzt, um in die Theorie des geodätischen Dreiecks eintreten zu können, eine weitere hinzugefügt werden mufs, welche zeigt, wie sich entlang einer Kurve der Neigungswinkel Θ derselben gegen den geodätischen Radiusvektor r, insbesondere wenn diese Kurve wieder eine geodätische Linie ist, ändert: Fig. 28. Θ bezieht sich auf die Richtungen des wachsenden Radiusvektors und der wachsenden Kurve, von ersterem im Sinne der wachsenden Azimute bis zu letzterer. Es ist also

$$\alpha' - \alpha = \Theta, \quad (1)$$

wenn α' das Azimut der Kurve und α dasjenige des Radiusvektors ist. Hieraus folgt:

$$\frac{d\alpha'}{ds} - \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\Theta}{ds}, \tag{2}$$

wobei ds das Bogenelement PP' der Kurve bedeutet. Selbstverständlich mufs, um $\frac{d\Theta}{ds}$ berechnen zu können, die Kurve bekannt sein, sodafs man $\frac{d\alpha'}{ds}$ angeben kann.

Was $\frac{d\alpha}{ds}$ anbetrifft, so können wir dies unmittelbar durch Addition der Ausdrücke (2) S. 279 und (4) S. 280 zusammensetzen. Dabei ist zu beachten, dafs $\alpha_{2.1}$ in $\alpha + 180^0$ und s in r übergeht.

Man erhält so zunächst:

$$d\alpha = \left(\frac{d\mathfrak{m}_r}{dr} - \frac{\mathfrak{m}_r}{a_0 w}\tan\beta\cos\alpha\right) d\alpha_0$$

$$- \frac{dr}{a_0 w}\tan\beta\sin\alpha\,,$$

Fig. 28.

worin β die reduzierte Breite von P und $w = \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}$ ist. Beachtet man nun, dafs $\mathfrak{m}_r d\alpha_0 = ds \,.\sin\Theta$ und $dr = ds\,.\cos\Theta$ ist, so folgt ohne Schwierigkeit wegen $\alpha + \Theta = \alpha'$:

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d\alpha'}{ds} - \frac{\sin\Theta}{\mathfrak{m}_r}\frac{d\mathfrak{m}_r}{dr} + \frac{\tan\beta\sin\alpha'}{a_0 w}. \tag{3}$$

Ist aber die Kurve PP' selbst eine Geodätische, so ist nach S. 279 (2)

$$\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\tan\beta\sin\alpha'}{a_0 w}$$

mit Rücksicht darauf, dafs das dort vorkommende $\alpha_{2.1}$ dem jetzigen $\alpha' + 180^0$ entspricht. Mithin wird für den Neigungswinkel einer *geodätischen* Linie PP' gegen den geodätischen Radiusvektor AP:

$$\frac{d\Theta}{ds} = -\frac{\sin\Theta}{\mathfrak{m}_r}\frac{\partial\mathfrak{m}_r}{\partial r}. \tag{4}$$

In Bezug auf $\frac{\partial\mathfrak{m}_r}{\partial r}$ ist zu erinnern (S. 280), dafs sich dieser Differentialquotient auf eine Verschiebung von P in Richtung des Radiusvektors $AP = r$ bezieht.

Um dies anzudeuten, wurde das Zeichen der partiellen Differentiation

gewählt, denn es könnte sonst eine Verwechslung mit demjenigen Differentialquotienten stattfinden, welcher sich auf die totale Änderung von r durch Verschiebung des Punktes P nach P' bezieht.

Vorstehende Gleichung kann man, wie sofort ersichtlich, noch in die nachstehende Form bringen:

$$\frac{d\Theta}{ds} = -\sin\Theta\,\frac{\partial \log \text{nat}\, \mathfrak{m}_r}{\partial r}. \tag{5}$$

Man kann aber auch für ds setzen $dr \,.\, \sec\Theta$ und erhält alsdann:

$$\frac{d \log \text{nat} \sin\Theta}{dr} = -\frac{\partial \log \text{nat}\, \mathfrak{m}_r}{\partial r}. \tag{6}$$

Vorstehende Formeln (3) bis (6) gelten wiederum wie (6) S. 275 allgemein für geodätische Linien auf jeder Fläche, wie *Gaufs* a. a. O. Art. 19 bewiesen hat (bei *Christoffel* a. a. O. S. 132).

§ 2. **Sinussatz für das geodätische Dreieck.** Mit Hilfe der zuletzt entwickelten Formeln ist es nunmehr möglich, die Differentialformeln für ein Dreieck mit *kürzesten Linien als Seiten*, d. h. nach dem üblichen Sprachgebrauch: für ein geodätisches Dreieck, aufzustellen und unter Anwendung des früher für $\mathfrak{m}$ gefundenen Ausdrucks zu integrieren.

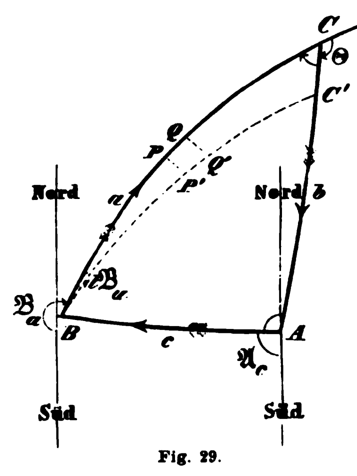


Fig. 29.

Als S. 72 u. ff. die Differentialformeln für das sphärische Dreieck aufgestellt wurden, konnte zur Ableitung endlicher Formeln der Umstand benutzt werden, dafs auf der Kugel jedes Dreieck ohne Formveränderung sich verschieben läfst. Da für das Rotationsellipsoid diese Eigenschaft nicht existiert, mufs hier die obige Gleichung (5) bezw. (6) als Ersatz dienen. Sie führt uns ebenso wie jene Eigenschaft der Kugel zum Sinussatz.

In dem Dreieck ABC Fig. 29 mit den in beliebigem Sinne auf einander folgenden Seiten abc bilden wir (wie früher S. 71) die Dreieckswinkel nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c \\ B &= \mathfrak{B}_c - \mathfrak{B}_a \\ C &= \mathfrak{C}_a - \mathfrak{C}_b \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

worin $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Azimute in den Ecken A, B, C für die als Indices vorkommenden Seiten bezeichnen. Die Azimute werden jetzt von

den Meridianen der betreffenden Ecken ab gezählt, wie z. T. in Fig. 29 angedeutet ist.

Die Definition der Winkel nach den Formeln (1) macht es wie früher möglich, die beiden Fälle, dafs die Winkel im Innern oder aufserhalb des Dreiecks gezählt werden, zusammenzufassen; vergl. hierzu S. 71.

Dreht man nun die Seite a um $d\mathfrak{A}_a$ im Sinne wachsender Azimute, so bewegt sich auf der ruhenden Seite b die Ecke C nach C', und man kann nach obiger Formel (5) angeben, um wie viel der Winkel Θ bei C, genommen vom wachsenden Radiusvektor a bis zur Richtung von C nach C', wächst. Θ ist gleich $\mathfrak{C}_b - (\mathfrak{C}_a + 180^0)$ d. i. $180^0 - C$.

Man hat daher:

$$d \log \text{nat} \sin (180^0 - C) = d \log \text{nat} \sin C = - \frac{\partial \log \text{nat} \sin \mathfrak{m}_a}{\partial a} da\,. \quad (2)$$

Nach Formel (11) S. 278 ist nun, die Dreiecksseiten als Gröfsen 1. Ordnung im Verhältnis zu a_0 betrachtet, für die Seite a mit B als Drehpunkt:

$$\mathfrak{m}_a = \frac{a_0}{\sqrt{K_2}} \sin \frac{a\sqrt{K_2}}{a_0} - \frac{1}{6} e^2 \sin 2\beta_2 \cos \mathfrak{A}_a \frac{a^4}{a_0{}^3} + a_0\, Gl_7\,, \quad (3)$$

wenn a_0 den Äquatorialradius, $K_2 : a_0{}^2$ das Krümmungsmafs in der Ecke B und β_2 die reduzierte Breite daselbst bezeichnet.

Zur Vereinfachung setzen wir vorderhand:

$$a_0 = 1\,,$$

sodafs vorläufig die linearen Dimensionen abc in Bruchteilen des Äquatorialradius ausgedrückt zu denken sind. Die Rückkehr zu beliebiger Einheit ist später leicht ausführbar. Wir erhalten jetzt, wenn wir zur Abkürzung die Konstante

$$\frac{1}{6} e^2 \sin 2\beta_2 = E_2 \quad (4)$$

setzen, zunächst aus (3):

$$\mathfrak{m}_a = \frac{\sin [a\sqrt{K_2}]}{\sqrt{K_2}} - E_2\, a^4 \cos \mathfrak{A}_a + Gl_7$$

oder

$$\mathfrak{m}_a = \frac{\sin [a\sqrt{K_2}]}{\sqrt{K_2}} (1 - E_2\, a^3 \cos \mathfrak{A}_a + Gl_6)\,. \quad (5)$$

Hieraus folgt sofort für den natürlichen Logarithmus von $\mathfrak{m}_a$ mit gleicher Genauigkeit wie bisher:

$$\log \text{nat}\, \mathfrak{m}_a = \log \text{nat} \sin [a\sqrt{K_2}] - \log \text{nat} \sqrt{K_2} - E_2\, a^3 \cos \mathfrak{A}_a + Gl_6\,.$$

Differenziert man dies partiell nach a und führt den Differentialquotienten in (2) ein, so findet sich:

$$d \log \text{nat} \sin C = \left(-\sqrt{K_2} \cot |a\sqrt{K_2}| + 3E_2\, a^2 \cos \mathfrak{B}_a + Gl_5\right) da\,. \quad (6)$$

Bei der nunmehr auszuführenden Integration ist auf die Veränderlichkeit von $\mathfrak{B}_a$ mit a Rücksicht zu nehmen. Wenn sich nämlich die Seite $a = BC$, Fig. 29, um B dreht, so bleibt zwar E_2 konstant, aber $\mathfrak{B}_a$ ändert sich. Dabei erscheint $\mathfrak{B}_a$ als eine von a abhängige Variable. Die Integration führt nun zu der Gleichung:

$$\log \text{nat} \sin C = -\log \text{nat} \sin [a\sqrt{K_2}| + 3E_2 \int a^2 \cos \mathfrak{B}_a da + \int Gl_5 da + \text{Konst.} \quad (7)$$

Behufs Auswertung des 1. Integrals betrachten wir die Seite $CA = b$ als unabhängige Variable. Es ist dann vor allem, unabhängig von der besondern Beschaffenheit der Fig. 29:

$$da = \cos C\, db\,. \quad (8)$$

Wendet man die Formel (11) S. 298 auf je 2 der 3 Ecken des Dreiecks an, so folgt ferner:

$$(B_2 - B_1) \cos \beta = - c \cos \mathfrak{A}_c \cos \beta + Gl_2$$
$$(B_3 - B_2) \cos \beta = - a \cos \mathfrak{B}_a \cos \beta + Gl_2$$
$$(B_1 - B_3) \cos \beta = - b \cos \mathfrak{C}_b \cos \beta + Gl_2,$$

wenn B_1, B_2, B_3 die geographischen Breiten von A, B, C bedeuten und für β irgend eine mittlere (geographische oder) reduzierte Breite des Dreiecks genommen wird. Die Addition der 3 Gleichungen giebt:

$$\cos \beta\, (a \cos \mathfrak{B}_a + b \cos \mathfrak{C}_b + c \cos \mathfrak{A}_c) + Gl_2' = 0\,. \quad (9)$$

Ebenso findet man mittelst der Formel (12) S. 298:

$$\cos \beta\, (a \sin \mathfrak{B}_a + b \sin \mathfrak{C}_b + c \sin \mathfrak{A}_c) + Gl_2 = 0\,. \quad (10)$$

Diese Formeln gelten auch noch in der Nähe der Pole. Denn reduziert man die genannten Formeln (11) und (12) auf ihr erstes Glied und multipliziert mit $\cos \beta$ bezw. $\cos^2 \beta$, so sind auch an den Polen die Restglieder kleine Glieder 2. Ordnung, wie die Betrachtung der ersten beiden Differentialquotienten (6) S. 297 im Hinblick auf den Rest der allgemeinen Entwicklung (1) S. 25 zeigt.

Man erkennt übrigens bei der Ableitung sofort, dafs man in diesen Formeln (9) und (10) für die Azimute der Seiten immer die um 180° vermehrten Azimute derselben Seiten am andern Endpunkt substituieren darf. In dieser Weise giebt (9):

$$\cos \beta \,.\, a \cos \mathfrak{B}_a = \cos \beta\, (b \cos \mathfrak{A}_b + c \cos \mathfrak{B}_c) + Gl_2\,. \quad (11)$$

Die Formeln (9) und (10) zeigen nun die Möglichkeit der Anwendung der Sätze der ebenen Polygonometrie auf geodätische Dreiecke bei einer 1. Annäherung.

Aus denselben kann man bekanntlich Sätze zwischen den Winkeln und Seiten des Dreiecks herleiten. Jedoch ist es besser, dieselben direkt aufzusuchen, um zu bemerken, dafs zur Erzielung der Gültigkeit dieser Formeln an den Polen der Faktor $\cos\beta$ wegbleiben darf. Betrachtet man die 1. und die 4. Gleichung (1) S. 76, so giebt die Reihenentwicklung für die Cosinus und Sinus der Seiten sofort für sphärische Dreiecke allgemein gültig:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A + Gl_4, \tag{12}$$

$$a\cos C = b - c\cos A + Gl_3. \tag{13}$$

Diese Relationen erhält man fürs Ellipsoid aus (9) und (10) noch mit dem Faktor $\cos\beta$ behaftet und anscheinend eine Ordnung weniger genau, welches letztere hier aber gleichgültig ist. Dafs man aber jenen Faktor weglassen kann, zeigt eine geometrische Betrachtung. Man denke sich durch die 3 Punkte ABC eine Kugel gelegt, ihren Radius dem mittleren Krümmungsmafs der Gegend möglichst entsprechend. Für die Stücke des Kugeldreiecks gelten (12) und (13) unmittelbar. Nun weichen von denselben diejenigen des geodätischen Dreiecks um Glieder ab, die in e^2 multipliziert sind, die jedoch die Gleichungen (12) und (13) bei gehöriger Entfernung vom Pole jedenfalls nicht beeinflussen. Jene Abweichungen sind aber offenbar für die Nähe der Pole eher geringfügiger, als im allgemeinen. Es müssen daher (12) und (13) allgemein gültig sein.

Wir erhalten nun durch Multiplikation von (11) und (13):

$$\cos\beta\,.\,a^2\cos\mathfrak{B}_a\cos C = \cos\beta\,(b - c\cos A)\,(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{B}_c) + Gl_3\,.$$

Führen wir dies in (7) ein und beachten, dafs das 1. Integral noch in E_2, eine Gröfse 2. Ordnung, die $\cos\beta$ als Faktor enthält, multipliziert ist, so ergiebt sich nach einfacher Reduktion:

$$\log\text{nat}\left(\sin C\sin\left[a\sqrt{K_2}\right]\right)$$

$$= 3E_2\!\int\!(b - c\cos A)\,(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{B}_c)\,db + \!\int\! Gl_5\,da + \text{Konst.} \tag{14}$$

Das 1. Integral rechter Hand enthält nur noch die Variable b; multipliziert man aus und integriert, so folgt dafür:

$$\frac{1}{2}\,(b^2 - 2bc\cos A)\,c\cos\mathfrak{B}_c + \left(\frac{1}{3}\,b^3 - \frac{1}{2}\,b^2 c\cos A\right)\cos\mathfrak{A}_b,$$

oder durch Elimination von $bc \cos A$ mittelst (12):

$$\frac{1}{4}(a^2 - c^2)(b \cos \mathfrak{A}_b + 2c \cos \mathfrak{B}_c) + \frac{1}{12} b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_5,$$

oder endlich unter Substitution des Wertes von $b \cos \mathfrak{A}_b$ nach (11) im 1. Gliede:

$$\frac{1}{4}(a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c) + \frac{1}{12} b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_4. \quad (15)$$

Multiplizieren wir dies mit E_2, so geben die Gl_4 Glieder 6. Ordnung. Ebensolche giebt das 2. Integral der Formel (14) und zwar braucht man nicht zu fürchten, dafs dieselben in der Nähe der Pole eine beträchtliche Gröfse erlangen. Denn die Entwicklung von K S. 275 u. ff. läfst nicht im Zweifel, dafs in den höheren Gliedern von K und damit von $\mathfrak{m}$, sowie von (14) überall das Azimut α nur in der Form $\cos \beta \cos \alpha$ auftritt, sodafs die starken Änderungen von α in der Nähe der Pole durch den Faktor $\cos \beta$ auf das gewöhnliche Mafs herabgedrückt werden.

Das Resultat aus (14) und (15) ist jetzt:

$$\log \text{nat}\left(\sin C \sin [a\sqrt{K_2}]\right) = \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c)$$
$$+ \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6 + \text{Konst.} \quad (16)$$

Die Konstante bestimmen wir durch Spezialisierung für $b = 0$. Hierfür wird a mit c identisch; ferner wird $\mathfrak{C}_a = \mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{C}_b = \mathfrak{A}_b - 180^0$, mithin

$$C \text{ d. i. } \mathfrak{C}_a - \mathfrak{C}_b = \mathfrak{A}_c - \mathfrak{A}_b + 180^0 \text{ d. i. } 180^0 - A.$$

Folglich ist $\log \text{nat}\left(\sin A \sin [c\sqrt{K_2}]\right) = \text{Konst.}$ und (16) geht über in:

$$\log \text{nat}\left(\frac{\sin C \sin [a\sqrt{K_2}]}{\sin A \sin [c\sqrt{K_2}]}\right) = \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c)$$
$$+ \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6.$$

Hieraus hat man endlich noch ohne merkliche Änderung der Genauigkeit:

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin [c\sqrt{K_2}]}{\sin [a\sqrt{K_2}]} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c) \\ \qquad + \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6. \end{array} \right\} \quad (17)$$

Diese Formel läfst sich noch sehr vereinfachen; indessen genügt sie in vorstehender Gestalt für das Folgende, sodafs wir bei ihr stehen bleiben.

§ 3. Der Cosinussatz im geodätischen Dreieck. Um a als Funktion von b, c und A zu erhalten, betrachten wir in Fig. 30 c als festliegend und b als konstant, aber um A beweglich. Geht nun AC in die Lage AC' über und zieht man zugleich CC'' rechtwinklig zu BC', so giebt das entstehende differentiale rechtwinklige Dreieck $CC'C''$:

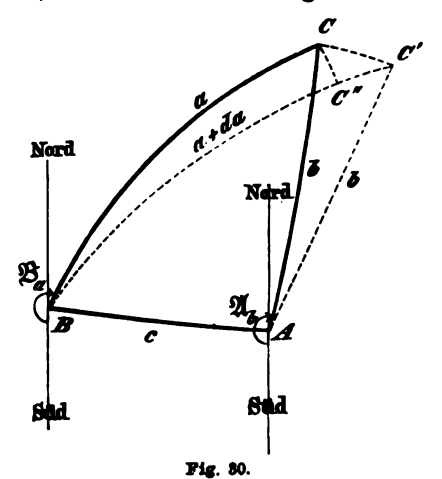


Fig. 30.

$$da = C'C'' = CC' \sin C$$
$$= \mathfrak{m}_b \sin C \, d\mathfrak{A}_b, \qquad (1)$$

allgemein gültig für $C = \mathfrak{C}_a - \mathfrak{C}_b$. Diese Differentialformel für a läſst sich leicht integrieren, denn wegen der Konstanz von b ist $\mathfrak{m}_b$ nur Funktion von $\mathfrak{A}_b$ und $\sin C$ läſst sich mittelst des Sinussatzes als Funktion von A und a darstellen.

Zunächst ist nach Formel (17) des vorigen Paragraphen:

$$\sin C = \sin A \frac{\sin [c\sqrt{K_2}]}{\sin [a\sqrt{K_2}]} \left(1 + \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6\right). \qquad (2)$$

Auſserdem ist nach (11) S. 278 mit Rücksicht auf die Einführung des Äquatorialhalbmessers als Einheit der Längen:

$$\mathfrak{m}_b = \frac{\sin [b\sqrt{K_1}]}{\sqrt{K_1}} (1 - E_1 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6). \qquad (3)$$

Ehe wir diese Ausdrücke in (1) substituieren, führen wir in (2) auch K_1 anstatt K_2 ein, um in den Sinus der Seiten dasselbe K zu haben.

Man hat aber allgemein für eine Seite u:

$$\sin [u\sqrt{K_2}] = u\sqrt{K_2}\left(1 - \frac{1}{6} u^2 K_2 + \frac{1}{120} u^4 K_2^2 + Gl_6\right),$$

sowie

$$\sin [u\sqrt{K_1}] = u\sqrt{K_1}\left(1 - \frac{1}{6} u^2 K_1 + \frac{1}{120} u^4 K_1^2 + Gl_6\right)$$

und hieraus, da $K_2 - K_1$ nach Formel (5) S. 276 von der 3. Ordnung ist, indem

$$K_1 = K_2 + 12 E_2 c \cos \mathfrak{B}_c + Gl_4$$

wird, durch Division beider Gleichungen:

$$\frac{\sin[u\sqrt{K_2}]}{\sin[u\sqrt{K_1}]} = \frac{\sqrt{K_2}}{\sqrt{K_1}}\left(1 - \frac{1}{6}[K_2 - K_1]u^2 + Gl_7\right).$$

Wendet man dies auf $u = c$ und $u = a$ an und dividiert, so ergiebt sich:

$$\frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{\sin[a\sqrt{K_2}]} = \frac{\sin[c\sqrt{K_1}]}{\sin[a\sqrt{K_1}]}\left(1 + 2E_2(c^2 - a^2)\,c\cos\mathfrak{B}_c + Gl_7\right),$$

womit (2) übergeht in:

$$\sin C = \sin A\,\frac{\sin[c\sqrt{K_1}]}{\sin[a\sqrt{K_1}]}\left(1 + E_2(a^2 - c^2)\left[\frac{3}{4}\,a\cos\mathfrak{B}_a - \frac{5}{4}\,c\cos\mathfrak{B}_c\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\,E_2 b^3 \cos\mathfrak{A}_b + Gl_6\right). \tag{4}$$

Wird dies nun nebst (3) in (1) eingesetzt und dabei für E_2 einfach E_1 geschrieben, was nur einen kleinen Fehler der 3. Ordnung in E und also der 6. Ordnung in der Parenthese von (4) ergiebt, so folgt:

$$\sqrt{K_1}\sin[a\sqrt{K_1}]\,da = \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left(1 + E_1(a^2 - c^2)\left[\frac{3}{4}a\cos\mathfrak{B}_a - \frac{5}{4}c\cos\mathfrak{B}_c\right]\right.$$
$$\left. - \frac{3}{4}E_1 b^3\cos\mathfrak{A}_b + Gl_6\right)\sin A\,d\mathfrak{A}_b. \tag{5}$$

Rechter Hand eliminieren wir $a\cos\mathfrak{B}_a$ und a^2 mittelst der Relationen (11) und (12) S. 350 u. 351 und erhalten:

$$\sin[a\sqrt{K_1}]\,d(a\sqrt{K_1}) = \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left(1 - bcE_1\left[\frac{1}{2}b\cos\mathfrak{B}_c + \frac{3}{2}b\cos A\cos\mathfrak{A}_b\right.\right.$$
$$\left.\left. - c\cos\mathfrak{B}_c\cos A\right] + Gl_6\right)\sin A\,d\mathfrak{A}_b. \tag{6}$$

Für A setzen wir nun $\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c$ und wenden zugleich, um integrieren zu können, die Formeln an:

$$\cos A\sin A = \frac{1}{2}\sin 2(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c)$$

$$\cos A\cos\mathfrak{A}_b\sin A = \frac{1}{4}\left(\sin(3\mathfrak{A}_b - 2\mathfrak{A}_c) + \sin(\mathfrak{A}_b - 2\mathfrak{A}_c)\right).$$

Denkt man sich dies in (6) eingeführt, so giebt alsdann die Integration ohne Schwierigkeit:

$$\cos[a\sqrt{K_1}] + \text{Konst.} = \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\{\cos(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c)$$
$$- bcE_1(g_1 + g_2 + g_3) + Gl_6\}, \tag{7}$$

worin für den Augenblick folgende Bezeichnungen zur Abkürzung dienen:

$$g_1 = \cdot \; \frac{1}{2} b \cos \mathfrak{B}_c \cos (\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c) = \frac{1}{2} b \cos \mathfrak{B}_c \cos A$$

$$g_2 = \quad \frac{3}{8} b \left(\frac{1}{3} \cos (3\mathfrak{A}_b - 2\mathfrak{A}_c) + \cos (\mathfrak{A}_b - 2\mathfrak{A}_c)\right)$$

$$= \quad \frac{1}{4} b \left(\cos 2A \cos \mathfrak{A}_b + \cos (A - \mathfrak{A}_c)\right)$$

$$g_3 = -\frac{1}{4} c \cos \mathfrak{B}_c \cos 2(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c) = -\frac{1}{4} c \cos \mathfrak{B}_c \cos 2A.$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich durch die Bemerkung, dafs für $\mathfrak{A}_b = \mathfrak{A}_c + 180^0$ die Seite $a = b + c$ werden mufs. Zugleich ist $A = 180^0$ und demnach $g_1 = -\frac{1}{2} b \cos \mathfrak{B}_c$; $g_2 = -\frac{1}{2} b \cos \mathfrak{A}_c$; $g_3 = -\frac{1}{4} c \cos \mathfrak{B}_c$. Die Summe $g_1 + g_2 = -\frac{1}{2} b (\cos \mathfrak{B}_c + \cos \mathfrak{A}_c)$ reduziert sich, abgesehen von Gliedern 1. Ordnung, aufserdem auf null, weil $\mathfrak{B}_c = \mathfrak{A}_c + 180^0 + Gl_1$ ist. Dies gilt zwar zunächst nicht auch für die Nähe der Pole; indes die Existenz des Faktors $\cos \beta$ in E_1 erweitert das Gültigkeitsgebiet auch bis dahin.

Man erhält demnach:

$$\cos[(b+c)\sqrt{K_1}] + \text{Konst.} = -\sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left(1 - \frac{1}{4} bc^2 E_1 \cos \mathfrak{B}_c + Gl_6\right).$$

Zieht man dies von (7) ab und beachtet bei der Vereinigung der g wiederum, dafs $\mathfrak{B}_c = \mathfrak{A}_c + 180^0 + Gl_1$, so folgt nach einiger Reduktion:

$$\cos[a\sqrt{K_1}] = \cos[b\sqrt{K_1}]\cos[c\sqrt{K_1}]$$

$$+ \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left(\cos A + \frac{1}{2} E_1 bc(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\sin^2 A + Gl_6\right). \quad (8)$$

Die in E_1 multiplizierten Glieder kann man aber sehr einfach mittelst der Differenzen der Krümmungsmafse darstellen. Man hat nach (5) S. 276:

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= K_1 + 12 E_1 c \cos \mathfrak{A}_c + Gl_4 \\ K_3 &= K_1 + 12 E_1 b \cos \mathfrak{A}_b + Gl_4; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

es ist daher:

$$E_1 (b \cos \mathfrak{A}_b + c \cos \mathfrak{A}_c) = \frac{1}{4} [K - K_1] + Gl_4, \quad (10)$$

wobei $K = \frac{1}{3} (K_1 + K_2 + K_3)$ das arithmetische Mittel der K der 3 Ecken ist. Die grofse Parenthese in (8) giebt hiermit:

$$\cos A + \frac{1}{8} [K - K_1] bc \sin^2 A + Gl_6, \quad (11)$$

wofür man mit derselben Genauigkeit setzen kann:

$$\cos\left(A - \frac{1}{4}[K - K_1]\, F_A\right) + Gl_6. \tag{12}$$

wenn $\frac{1}{2}\, bc \sin A$ vorläufig mit F_A bezeichnet wird. Somit findet sich:

$$\cos[a\sqrt{K_1}] = \cos[b\sqrt{K_1}]\cos[c\sqrt{K_1}]$$
$$+ \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left\{\cos\left(A - \frac{1}{4}[K - K_1]\, F_A\right) + Gl_6\right\}. \tag{13}$$

Diese Formel wird noch günstiger, wenn man in den Sinus und Cosinus $\sqrt{K}$ anstatt $\sqrt{K_1}$ einführt. Dazu dienen die Relationen:

$$\cos[u\sqrt{K_1}] = 1 - \frac{1}{2}u^2K_1 + \frac{1}{24}u^4K_1^2 - \frac{1}{720}u^6K_1^3 + Gl_8$$

$$\sin[u\sqrt{K_1}] = u\sqrt{K_1}\left(1 - \frac{1}{6}u^2K_1 + \frac{1}{120}u^4K_1^2 - Gl_6\right)$$

$$\cos[u\sqrt{K}] = 1 - \frac{1}{2}u^2K + \frac{1}{24}u^4K^2 - \frac{1}{720}u^6K^3 + Gl_8$$

$$\sin[u\sqrt{K}] = u\sqrt{K}\left(1 - \frac{1}{6}u^2K + \frac{1}{120}u^4K^2 - Gl_6\right).$$

Denkt man sich nun in (13) die ersten beiden dieser Reihen für $u = a, b, c$ eingeführt und beiderseits 1 abgezogen, so enthalten alle Glieder K_1 als Faktor. Diesen dividiert man weg und multipliziert mit K. K_1 tritt dann noch auf in Gliedern 4. Ordnung und 6. Ordnung. Ersetzt man es durch K, so giebt es in den letzteren nur einen Fehler 9. Ordnung. Dieser ist zu vernachlässigen. Dagegen mufs für die Glieder 4. Ordnung eine Korrektion zugefügt werden. Diese Glieder 4. Ordnung lauten aber:

linker Hand	rechter Hand
$+\frac{a^4}{24}KK_1$	$+\frac{b^4 + c^4 + 6b^2c^2 - 4(b^2 + c^2)\,bc\cos A}{24}KK_1.$

Schreiben wir an Stelle von K_1 auch hier K und setzen beiderseits in der (wie oben angegeben) umgeformten Gleichung (13) wieder 1 zu, so läfst sich alles so zusammenziehen, dafs eine Gleichung entsteht, die sich von (13) nur dadurch unterscheidet, dafs in den Sinus und Cosinus überall $\sqrt{K}$ anstatt $\sqrt{K_1}$ steht und dafs die Korrektion hinzutritt, welche der Vertauschung von K_1 mit K in den oben erwähnten Gliedern 4. Ordnung entspricht. Wird alles nach rechts geschafft, so lautet dieselbe:

$$\frac{1}{24}\left\{-a^4 + b^4 + c^4 + 6b_2c_2 - 4(b^2 + c^2)\,bc\cos A\right\}K[K_1 - K]. \quad 14)$$

Eliminiert man hieraus $2bc\cos A$ mittelst (12) S. 351 und wendet die für den Inhalt des ebenen Dreiecks mit den Seiten abc bestehende Relation an:

$$16F^{*2} = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4,$$

so giebt (14):

$$+\frac{2}{3}F^{*2}K[K_1 - K] + Gl_9. \tag{15}$$

Quadriert man aber die Gleichung (12) S. 351, so folgt nach einiger Reduktion leicht:

$$F^{*2} = F_A{}^2 + Gl_6. \tag{16}$$

Es läfst sich hiermit der Ausdruck (15) wie folgt schreiben:

$$\sin[b\sqrt{K}]\sin[c\sqrt{K}]\left(-\frac{1}{6}[K - K_1]\,bc\sin^2 A\right) + Gl_9. \tag{17}$$

Dies ist zu (13) hinzuzufügen, wenn daselbst $\sqrt{K}$ eingeführt wird. Ein Blick auf (11) und (12) zeigt aber, wie sich (17) mit (13) vereinigen läfst. Man erhält:

$$\cos[a\sqrt{K}] = \cos[b\sqrt{K}]\cos[c\sqrt{K}]$$
$$+ \sin[b\sqrt{K}]\sin[c\sqrt{K}]\cos\left(A + \frac{1}{12}[K - K_1]\,F_A\right) + Gl_8. \tag{18}$$

Die Gl_8 dieser Formel, welche als Funktionen von b, c und A nach Potenzen von b und c und den Sinus und Cosinus von A und seiner Vielfachen dargestellt gedacht werden können, müssen aber den Faktor $bc\sin^2 A$ enthalten. Denn sie verschwinden für b und c gleich null, sowie für $A = 0^0$ und 180^0; sie müssen endlich ihren Wert behalten, wenn man A mit $360^0 - A$ vertauscht.

(Das Auftreten des Faktors $\sin^2 A$ kann aufserdem leicht aus der Analysierung des Übergangs von Formel (4) zu (8) erkannt werden. Die weiteren Umformungen, welche nur Übergänge von einer Kugel zu einer andern bedeuten, können daran nichts ändern, weil man immer die Ebene als Zwischenglied nehmen kann. Für diese ist die Existenz des Faktors $\sin^2 A$ früher bewiesen.)

Die Gl_8 der Formel (18) lassen sich demnach in die Form $\sin b\sqrt{K}\sin c\sqrt{K}\sin^2 A\,.\,Gl_6$ bringen und die Formel (18) kann wie folgt geschrieben werden:

$$\cos[a\sqrt{K}] = \cos[b\sqrt{K}]\cos[c\sqrt{K}]$$
$$+ \sin[b\sqrt{K}]\sin[c\sqrt{K}]\cos\left(A + \frac{1}{12}[K - K_1]\,F_A + Gl_6\right). \tag{19}$$

Es ist hier zum Schlufs wiederholt daran zu erinnern, dafs der Äquatorialhalbmesser a_0 als Einheit der Längen gewählt ist.

Die Vergleichung von (13) und (19) zeigt wieder, dafs bei rein sphärischer Rechnung es vorteilhafter ist, das mittlere Krümmungsmafs anzuwenden, als dasjenige einer Ecke. Insoweit es sich aber nur um die Formel (16) handelt, ist es noch vorteilhafter anstatt K das Krümmungsmafs

$$K' = \frac{1}{4}(2K_1 + K_2 + K_3)$$

anzuwenden, womit sich nämlich findet:

$$\cos[a\sqrt{K'}] = \cos[b\sqrt{K'}]\cos[c\sqrt{K'}] + \sin[b\sqrt{K'}]\sin[c\sqrt{K'}]\cos(A + Gl_6).$$

§ 4. Reduktion des geodätischen Dreiecks auf ein sphärisches oder ebenes mit denselben Seiten. Die Vergleichung von Formel (19) des vorigen Paragraphen mit der 1. Formel (1) S. 76 zeigt, dafs der Gegenwinkel A' der Seite a in einem sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b und c bei $1 : \sqrt{K}$ als Kugelradius sich durch die Relation bestimmt:

$$A' = A + \frac{1}{12}[K - K_1] F_A + Gl_6. \tag{1}$$

Die Gröfse $F_A = \frac{1}{2} ab \sin A$ kann nun mit $\frac{1}{2} ab \sin A'$ vertauscht werden, was in F_A nur Fehler 7. Ordnung erzeugt. Nach S. 98 ist aber F^* bis auf Gl_4 gleich $\frac{1}{2} ab \sin A'$. Setzen wir also

$$A' = A + \frac{1}{12}[K - K_1] F^* + Gl_6, \tag{2}$$

so kann hierin F^* ohne wesentliche Änderung des Ergebnisses beliebig aus den 3 Seiten abc oder aus irgend 2 Seiten und dem zugehörigen Zwischenwinkel nach den Formeln der ebenen Geometrie berechnet werden.

Indem wir jetzt a_0 wieder von 1 verschieden nehmen, zugleich die Differenz $A' - A$ in Sekunden ausdrücken und endlich die Formel (2) auch auf B und C anwenden, erhalten wir zur *Reduktion des geodätischen Dreiecks auf ein sphärisches* die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{A' - A} &= \frac{1}{12}\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2}[K - K_1] + Gl_6 \\ \underset{\text{in Sek.}}{B' - B} &= \frac{1}{12}\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2}[K - K_2] + Gl_6 \\ \underset{\text{in Sek.}}{C' - C} &= \frac{1}{12}\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2}[K - K_3] + Gl_6. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hierin beziehen sich A', B' und C' auf das sphärische Dreieck, dessen Kugelradius dem arithmetischen Mittel der Krümmungsmafse der

3 Ecken, d. h. demjenigen des Dreiecksschwerpunktes entspricht; der Kugelradius ist also gleich

$$\frac{a_0}{\sqrt{K}}; \qquad K = \frac{K_1 + K_2 + K_3}{3}. \tag{4}$$

F^*, der Inhalt des ebenen Dreiecks mit denselben Seiten, ist positiv oder negativ, je nachdem die Winkel im Innern oder aufserhalb des Dreiecks gezählt sind. Er wird am bequemsten, unmittelbar mit richtigem Vorzeichen und genügend scharf durch einen der Ausdrücke $\frac{1}{2}\,ab \sin C$, $\frac{1}{2}\,ac \sin B$ oder $\frac{1}{2}\,bc \sin A$ dargestellt.

Addiert man die (3), so wird erhalten:

$$A + B + C = A' + B' + C' + Gl_6, \tag{5}$$

d. h. der *Excefs des geodätischen Dreiecks ist* bis auf Glieder 6. Ordnung *gleich demjenigen eines sphärischen Dreiecks mit denselben Seiten,* wenn der Kugelradius dem mittlern Krümmungsmafse des Dreiecks entspricht.

Reduziert man das sphärische Dreieck auf ein ebenes mit denselben Seiten (S. 93), so folgt durch Kombination mit (3) zur *Reduktion des geodätischen Dreiecks auf ein ebenes*:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho''\,\frac{F^*}{3a_0^2}\,K\left\{\frac{m^2 - a^2}{20a_0^2}\,K + \frac{K_1 - K}{4K} + Gl_4\right\}\\
\underset{\text{in Sek.}}{B - B^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho''\,\frac{F^*}{3a_0^2}\,K\left\{\frac{m^2 - b^2}{20a_0^2}\,K + \frac{K_2 - K}{4K} + Gl_4\right\}\\
\underset{\text{in Sek.}}{C - C^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho''\,\frac{F^*}{3a_0^2}\,K\left\{\frac{m^2 - c^2}{20a_0^2}\,K + \frac{K_3 - K}{4K} + Gl_4\right\}\\
\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho''\,\frac{F^*}{a_0^2}\,K\left(1 + \frac{m^2}{8a_0^2}\,K + Gl_4\right).
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

In diesen Formeln durften die Restglieder mit in die Parenthesen genommen werden, da sie gleichzeitig mit F^* verschwinden (vergl. S. 357).

§ 5. Die von e^2 abhängigen Glieder 5. Ordnung. Um den Einflufs derjenigen Glieder in vorstehenden Formeln zu untersuchen, welche den Fehler charakterisieren, der bei Behandlung des geodätischen Dreiecks als eines sphärischen ohne weitere Korrektion entsteht, betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{12}\,\varrho''\,\frac{F^*}{a_0^2}\,[K - K_1], \tag{1}$$

welcher sich auf Winkel A bezieht. Hierin setzen wir nach S. 349 (4) und S. 355 (10):

$$K - K_1 = \frac{2e^2K_1}{3a_0}\sin 2\beta_1\,(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c) + \cdots \tag{2}$$

und ferner nach S. 94 (2), wenn $3m^2 = a^2 + b^2 + c^2$ genommen wird:

$$F^{*2} = \frac{1}{16}\left(6a^2m^2 - 3a^4 - (b^2 - c^2)^2\right). \tag{3}$$

Dadurch ergiebt sich anstatt (1) der hier als gleichwertig zu betrachtende Ausdruck:

$$\varrho''\,\frac{e^2K_1}{72\,a_0{}^3}\sin 2\beta_1\,(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\sqrt{3a^2(2m^2 - a^2) - (b^2 - c^2)^2}. \tag{4}$$

Nehmen wir nun die Ecke A fest an, dagegen Richtung und Länge der Seiten veränderlich mit der Mafsgabe, dafs m^2 konstant bleibt, so wird (4) ein Maximum, sobald

$$(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\sqrt{3a^2(2m^2 - a^2) - (b^2 - c^2)^2} \tag{5}$$

ein Maximum ist mit Rücksicht auf die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} 3m^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c) + a_0{}^2\cdot Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Diese Ausdrücke sind symmetrisch zu $b\cos\mathfrak{A}_b$ und $c\cos\mathfrak{A}_c$, $b\sin\mathfrak{A}_b$ und $\pm c\sin\mathfrak{A}_c$. Es wird daher mit Ausschlufs des Falles $\mathfrak{A}_b = \mathfrak{A}_c$ fürs Maximum:

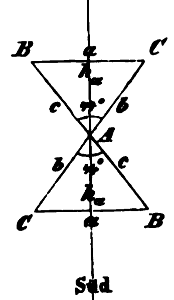


Fig. 31.

$$b = c \qquad \mathfrak{A}_b = 360^0 - \mathfrak{A}_c, \tag{7}$$

mit welchen Werten (4) in nachstehenden Ausdruck übergeht:

$$\varrho''\,\frac{e^2K_1}{36\,a_0{}^3}\sin 2\beta_1\,.\,b\cos\mathfrak{A}_b\sqrt{3a^2(2m^2 - a^2)}. \tag{8}$$

Nun ist aber abgesehen vom Vorzeichen $b\cos\mathfrak{A}_b$ gleich der Höhe h_a des Dreiecks, Fig. 31 (dieses als eben betrachtet), womit man erhält $b^2 = c^2 = \frac{1}{4}a^2 + h_a^2$; es ist also auch $3m^2 = 2h_a{}^2 + \frac{3}{2}a^2$.

Hieraus folgt $2m^2 - a^2 = \frac{4}{3}h_a{}^2$ und es geht (8) über in:

$$\pm\varrho''\,\frac{e^2K_1}{18\,a_0{}^3}\sin 2\beta_1\,.\,ah_a{}^2. \tag{9}$$

Der veränderliche Faktor $ah_a{}^2$ d. i. $\frac{3}{4}(2m^2a - a^3)$ wird ein Maximum für

$$\left.\begin{aligned} a = m\sqrt{\tfrac{2}{3}};\ h_a = m;\ A = 44^0 \text{ ca. mit*)} \\ \mathfrak{A}_b = 22^0 \text{ und } \mathfrak{A}_c = 338^0 \text{ oder } \mathfrak{A}_b = 202^0 \text{ und } \mathfrak{A}_c = 158^0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

*) In Fig. 31 ist fürs Maximum die Basis CB etwas zu breit angenommen.

Es ist somit im Maximum das in Rede stehende Glied d. h. $A' - A$ gleich

$$\pm \varrho'' \frac{e^2 K_1}{18} \sqrt{\frac{2}{3}} \sin 2\beta_1 \left(\frac{m}{a_0}\right)^3, \tag{11}$$

was für $m = 0{,}1 a_0$ und $\beta_1 = 45^0$ den nachstehenden geringen Betrag ergiebt:

$$\pm 0{,}062''. \tag{12}$$

Dieser Betrag reduziert sich für meſsbare Dreiecke stets noch beträchtlich; denn er ist

$$\left.\begin{array}{lll} \pm 0{,}008'' & \text{für } m = 0{,}05 a_0 & \text{d. i. } 319^{km} \\ \pm 0{,}0005'' & \text{für } m = 0{,}02 a_0 & \text{d. i. } 127^{km} \end{array}\right\} . \tag{13}$$

Selbst wenn in einzelnen Fällen der letztere Betrag überschritten werden sollte, so wird mit Rücksicht auf die verminderte Genauigkeit der Beobachtung auf sehr groſse Entfernungen es doch zulässig sein, *direkt beobachtete geodätische Dreiecke wie sphärische zu behandeln,* wenn dabei der Krümmungsradius dem mittleren Krümmungsmaſs der drei Ecken entsprechend angenommen wird. Vergleicht man (12) u. (13) mit S. 96 (8), so zeigt sich, daſs in den Formeln (6) S. 359 etwa gleich groſse Maximalfehler für $A - A^*$ durch Vernachlässigung der in $m^2 - a^2$ und $K_1 - K$ multiplizierten Glieder entstehen, und entsprechend für $B - B^*$ und $C - C^*$. Mit anderen Worten:

Nimmt man bei Verteilung des Excesses auf die 3 Winkel Rücksicht auf die Ungleichheit der Seiten, so muſs man auch auf die Ungleichheit der Krümmungsmaſse Rücksicht nehmen.

Solange man ein Dreieck demnach als ein *sphärisches* betrachtet, ist es einfach nur konsequent, den Exceſs *gleichmäſsig* zu verteilen, was nicht ausschlieſst, daſs zur Berechnung von ε die unter (6) S. 359 gegebene Formel mit Gliedern 4. Ordnung zur Anwendung gelangt. Für beobachtete Dreiecke dürfte es aber in der Regel überflüssig sein, diese letzteren herbeizuziehen [vergl. S. 95 (5)].

Berechnet man nun den Exceſs einfach nach der Formel:

$$\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} \frac{K_1 + K_2 + K_3}{3} \tag{14}$$

und verteilt ihn gleichmäſsig auf die 3 Winkel, so kann noch die Frage entstehen, ob in einer Kette von Dreiecken eine ungünstige *Anhäufung der hiermit begangenen Fehler* möglich ist. Bei der geringen Gröſse dieser Fehler für beobachtete Dreiecke im einzelnen ist dies aber weder für die Seitenlängen noch für die Azimute zu befürchten. Untersucht man insbesondere den Einfluſs der begangenen Fehler bei

Anwendung des Sinussatzes, so zeigt sich, dafs dieselben nur in der 9. Decimale der Logarithmen der Seiten beim einzelnen wohlgeformten Dreieck sich äufsern und dafs selbst bei 20 bis 30 zusammenhängenden Dreiecken die 7. Decimale stets unberührt bleibt.

§ 6. Excefs des geodätischen Dreiecks aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel. Erinnern wir uns zunächst der Formel fürs sphärische Dreieck, so ist nach S. 98, wenn A' der Zwischenwinkel, b und c die Seiten sind:

$$\varepsilon = \frac{bc \sin A'}{2a_0^2} K \left(1 + \frac{4a^2 - 3m^2}{24a_0^2} K + Gl_4\right).$$

Diese Formel gilt aber auch fürs geodätische Dreieck, weil bis auf Glieder 6. Ordnung es mit dem sphärischen gleichen Excefs hat. Nur ist zu setzen:

$$A' = A - \frac{1}{12} \frac{F^*}{a_0^2} [K_1 - K] + Gl_6,$$

wobei man F^* gleich $\frac{1}{2} bc \sin A$ nehmen darf. Führen wir dies oben ein, so folgt:

$$\varepsilon = \frac{bc \sin A}{2a_0^2} K \left\{1 + \frac{4a^2 - 3m^2}{24a_0^2} K - \frac{K_1 - K}{24} \frac{bc \cos A}{a_0^2} + Gl_4\right\}.$$

Man sieht hier sogleich, dafs rechter Hand das von $bc \cos A$ abhängende Glied weggelassen werden kann, weil es eine Ordnung höher ist, als die vernachlässigten Glieder 4. Ordnung. Mit Rücksicht auf S. 98 hat man nun sofort:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a^2}{a_0^2} &= \frac{b^2}{a_0^2} + \frac{c^2}{a_0^2} - \frac{2bc \cos A}{a_0^2} + Gl_4 \\
\log_{\text{in Sek.}} \varepsilon &= \log \frac{\varrho'' bc \sin A}{2a_0^2} K + M \left\{\frac{4a^2 - 3m^2}{24a_0^2} K + Gl_4\right\} \\
A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - a^2}{20a_0^2} K + \frac{K_1 - K}{4K} + Gl_4\right\} \\
B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - b^2}{20a_0^2} K + \frac{K_2 - K}{4K} + Gl_4\right\} \\
C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - c^2}{20a_0^2} K + \frac{K_3 - K}{4K} + Gl_4\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Kürzt man diese Formeln auf ihre 1. Glieder ab, so sind die Fehler für die Winkelreduktionen ebenso grofs wie im entsprechenden Falle des vorigen Paragraphen; für $\log \varepsilon$ ist, wie schon S. 99 gezeigt, der Fehler sogar, wenn auch unwesentlich, kleiner. Diese einfache Rechnung wird daher für direkt *beobachtete* Dreiecke in der Regel zulässig erscheinen.

§ 7. Flächeninhalt des geodätischen Dreiecks. Um den Inhalt zu finden, bestimmen wir zunächst, Fig. 29 S. 348, den Inhalt des Streifens BCC'. Ist P ein Punkt zwischen B und C, der bei der Drehung von BP die Lage P' erhält, sind ferner Q und Q' zwei unendlich benachbarte Punkte und wird aufserdem gesetzt:

$$BP = BP' = r \qquad PQ = P'Q' = dr,$$

so ist der Inhalt des unendlich kleinen Rechtecks $PQP'Q' = \mathfrak{m}_r d\mathfrak{B}_a dr$, mithin Dreieck $BC\dot{C}'$ oder

$$-dF = d\mathfrak{B}_a \int_0^a \mathfrak{m}_r dr.$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf S. 349 (5), wenn wie dort vorläufig $a_0 = 1$ genommen wird:

$$\mathfrak{m}_r = \frac{\sin[r\sqrt{K_2}]}{\sqrt{K_2}} - E_2 r^4 \cos \mathfrak{B}_a + Gl_7.$$

Die leicht auszuführende Integration giebt hieraus nach einiger Reduktion:

$$dF = -\frac{2\sin^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right]}{K_2}\left(1 - \frac{2}{5} E_2 a^5 \cos \mathfrak{B}_a + Gl_6\right) d\mathfrak{B}_a. \tag{1}$$

Um nun nochmals integrieren zu können, führen wir b als unabhängige Variable ein und setzen nach Fig. 29 S. 348:

$$\mathfrak{m}_a d\mathfrak{B}_a = -db \sin C,$$

ferner nach S. 352 (17):

$$\sin C = \sin A \frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{\sin[a\sqrt{K_2}]}\left(1 + \frac{3}{4} E_2(a^2 - c^2)(a\cos\mathfrak{B}_a + c\cos\mathfrak{B}_c) + \frac{1}{4}E_2 b^3 \cos\mathfrak{A}_b + Gl_6\right)$$

und nach S. 349 (5) wie oben für $\mathfrak{m}_r$:

$$\mathfrak{m}_a = \frac{\sin[a\sqrt{K_2}]}{\sqrt{K_2}}\left(1 - E_2 a^3 \cos \mathfrak{B}_a + Gl_6\right).$$

Durch Einführung dieser Ausdrücke in (1) wird nach einiger Reduktion erhalten:

$$dF = \frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{2\cos^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right]} \frac{\sin A\, db}{\sqrt{K_2}} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a\cos\mathfrak{B}_a + c\cos\mathfrak{B}_c) \\ &+ \frac{3}{5} E_2 a^3 \cos\mathfrak{B}_a + \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos\mathfrak{A}_b + Gl_6 \end{aligned} \right\}. \tag{2}$$

Aus dieser Formel folgt sofort auch die nachstehende für das Differential des Flächeninhalts F_2' eines sphärischen Dreiecks mit den Seiten b und c und dem Zwischenwinkel A, wenn als Kugelradius $1 : \sqrt{K_2}$ genommen wird:

$$dF_2' = \frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{2\cos^2\left[\frac{a'}{2}\sqrt{K_2}\right]} \frac{\sin A\, db}{\sqrt{K_2}}. \tag{3}$$

Die Seite a' ist hierzu sphärisch aus b, c und A nach der Formel zu berechnen:

$$\cos[a'\sqrt{K_2}] = \cos[b\sqrt{K_2}]\cos[c\sqrt{K_2}] + \sin[b\sqrt{K_2}]\sin[c\sqrt{K_2}]\cos A.$$

Andrerseits ist nach S. 355 u. 356 offenbar:

$$\cos[a\sqrt{K_2}] = \cos[b\sqrt{K_2}]\cos[c\sqrt{K_2}] + \sin[b\sqrt{K_2}]\sin[c\sqrt{K_2}]\cos A + Gl_7.$$

Es weichen daher $\cos[a'\sqrt{K_2}]$ und $\cos[a\sqrt{K_2}]$ nur um Glieder 7. Ordnung von einander ab, und man hat mit Rücksicht auf die Gleichung $2\cos^2\frac{u}{2} = 1 + \cos u$:

$$2\cos^2\left[\frac{a'}{2}\sqrt{K_2}\right] = 2\cos^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right] + Gl_7 = 2\cos^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right](1 + Gl_7).$$

Es ist nun mit Rücksicht aufs Vorige:

$$dF_2' = \frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{2\cos^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right]} \frac{\sin A\, db}{\sqrt{K_2}}(1 + Gl_7). \tag{4}$$

Hieraus folgt unter Einführung einiger zulässiger Vereinfachungen in Verbindung mit (2):

$$dF = dF_2' + \left\{\left[\begin{array}{l} \frac{3}{4}(a^2 - c^2)(a\cos\mathfrak{B}_a + c\cos\mathfrak{B}_c) \\ + \frac{3}{5}a^3\cos\mathfrak{B}_a + \frac{1}{4}b^3\cos\mathfrak{A}_b \end{array}\right]E_2 + Gl_7\right\}\frac{c\sin A\, db}{2}. \tag{5}$$

Die abhängigen Veränderlichen a und $\mathfrak{B}_a$, welche noch rechter Hand in den kleinen Gliedern vorkommen, eliminieren wir mittelst der bekannten Relationen (11) und (12) S. 350 u. 351, womit die eckige Parenthese den nachstehenden Wert erhält:

$$\left(\frac{8}{5}b^2 + \frac{3}{5}c^2 - \frac{27}{10}bc\cos A\right)b\cos\mathfrak{A}_b + \left(\frac{21}{10}b^2 + \frac{3}{5}c^2 - \frac{21}{5}bc\cos A\right)c\cos\mathfrak{B}_c,$$

nach dessen Einführung sich (5) sofort integrieren läfst. Berücksichtigt man, dafs für $b = 0$ das allgemeine Integral verschwindet

und F sowie F_2' null sind, so gelangt man ohne Schwierigkeit zu der Gleichung:

$$F = F_2' + \left\{ \left[\begin{array}{l} \frac{4b^2 + 3c^2 - 9bc \cos A}{10} \, b \cos \mathfrak{A}_b \\ + \frac{7b^2 + 6c^2 - 21bc \cos A}{10} \, c \cos \mathfrak{B}_c \end{array} \right] E_2 + Gl_7 \right\} \frac{bc \sin A}{2} . \quad (6)$$

Hierbei ist $F_2' = \varepsilon \varrho^2$ mit $\varrho = 1 : \sqrt{K_2}$ zu setzen d. i. nach S. 98 (3):

$$F_2' = \frac{1}{2} bc \sin A \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{4a^2 - 3m^2}{24} K_2 + \frac{14a^4 - 15a^2m^2 + 3m^4}{720} K_2^2 \\ \qquad + \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{72} K_2^2 + Gl_6 \end{array} \right\}, \quad (7)$$

in welcher Formel anstatt a eigentlich a' anzuwenden ist, was indessen nach dem oben über den Unterschied der zugehörigen Cosinus Gesagten nichts Merkliches ausmacht.

Setzen wir in F_2' für K_2 das mittlere Krümmungsmafs K, so wird der Inhalt F' eines sphärischen Dreiecks mit den Stücken b, c, A auf der Kugel vom Radius $1 : \sqrt{K}$ erhalten. — Man sieht, dafs

$$F_2' = F' + \frac{1}{2} bc \sin A \left(\frac{4a^2 - 3m^2}{24} [K_2 - K] + Gl_7 \right),$$

worin man wegen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A + Gl_4$$

auch

$$4a^2 - 3m^2 = 2b^2 + 2c^2 - 6bc \cos A + Gl_4$$

setzen kann. Hiermit ergiebt sich nun, wenn man in (6) rechter Hand noch nach S. 276 (5) von den Relationen

$$E_2 c \cos \mathfrak{B}_c = \frac{K_1 - K_2}{12} + Gl_4 = \frac{[K_1 - K] - [K_2 - K]}{12} + Gl_4$$

$$E_2 b \cos \mathfrak{A}_b = \frac{K_3 - K_1}{12} + Gl_4 = \frac{[K_3 - K] - [K_1 - K]}{12} + Gl_4$$

Gebrauch macht, nach einfacher Reduktion als Inhalt F des *geodätischen* Dreiecks (a_0 nicht mehr als Einheit der Längen vorausgesetzt):

$$F = F' \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{3b^2 + 3c^2 - 12bc \cos A}{120 a_0^2} [K_1 - K] + \frac{3b^2 + 4c^2 - 9bc \cos A}{120 a_0^2} [K_2 - K] \\ \qquad + \frac{4b^2 + 3c^2 - 9bc \cos A}{120 a_0^2} [K_3 - K] + Gl_6 \end{array} \right\} \quad (8)$$

mit Bezug auf den Inhalt F' des *sphärischen* Dreiecks, das mit jenem

die Stücke b, c und A gemein hat und auf der Kugel vom Radius $a_0 : \sqrt{K}$ liegt. Für F' hat man:

$$\log F' = \log\left(\frac{1}{2}\, bc \sin A\right) + M \left\{ \begin{array}{l} \frac{4a^2 - 3m^2}{24 a_0^2} K + \frac{32a^4 - 45m^4 + 24n^4}{5760 a_0^4} K^2 \\ \qquad + \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{72 a_0^4} K^2 + Gl_6 \end{array} \right\}, \quad (9)$$

wobei nach S. 98 zu berechnen ist:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{b^2}{a_0^2} + \frac{c^2}{a_0^2} - \frac{2bc \cos A}{a_0^2} - \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{3a_0^4} + Gl_6 \\ m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \qquad n^4 = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Die Formel (8) läfst sich dadurch noch vereinfachen, dafs man in der Parenthese null in der Form hinzufügt:

$$-\frac{3b^2 + 3c^2 - 12bc \cos A}{120 a_0^2} \{ [K_1 - K] + [K_2 - K] + [K_3 - K] \}.$$

Dann wird anstatt (8) erhalten:

$$F = F' \left\{ 1 + \frac{c^2 + 3bc \cos A}{120 a_0^2} [K_2 - K] + \frac{b^2 + 3bc \cos A}{120 a_0^2} [K_3 - K] + Gl_6 \right\}. \quad (11)$$

§ 8. **Fortsetzung. Geodätisches und sphärisches Dreieck mit denselben Seiten.** Um nun endlich noch den Inhalt F des geodätischen Dreiecks mit dem Inhalt F' eines sphärischen Dreiecks von denselben Seiten zu vergleichen, beachten wir, dafs im sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b und c auf der Kugel mit dem Radius $1 : \sqrt{K}$ der Winkel A', welcher a gegenüberliegt, nach (3) S. 358 gegeben ist durch die Gleichung:

$$A' = A - \frac{K_1 - K}{12} F^* + Gl_6, \quad (12)$$

wenn wir vorläufig a_0 wieder gleich 1 setzen. Nun ist aber

$$F' = \frac{1}{2}\, bc \sin A' \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{4a^2 - 3m^2}{24} K + \frac{14a^4 - 15a^2m^2 + 3n^4}{720} K^2 \\ \qquad + \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{72} K^2 + Gl_6 \end{array} \right\} \quad (13)$$

und hierzu nach (12):

$$\sin A' = \sin A - \frac{K_1 - K}{12} F^* \cos A + Gl_6.$$

Setzt man in letzterer Formel $F^* = \frac{1}{2}\, bc \sin A + Gl_4$, so wird ohne Schwierigkeit aus (9) und (13) erhalten:

$$F'' = F'\left(1 + \frac{K_1 - K}{24} bc \cos A + Gl_7\right). \qquad (14)$$

Die Einführung dieses Ausdrucks für F'' in (11) giebt nun sofort:

$$F = F' \left\{ \begin{matrix} 1 + \frac{bc\cos A}{24}[K_1 - K] + \frac{c^2 + 3bc\cos A}{120}[K_2 - K] \\ + \frac{b^2 + 3bc\cos A}{120}[K_3 - K] + Gl_6 \end{matrix} \right\},$$

welche Formel dadurch eleganter wird, dafs man in der Parenthese null in der Gestalt addiert:

$$-\frac{b^2 + c^2 + 11bc\cos A}{360}\left([K_1 - K] + [K_2 - K] + [K_3 - K]\right).$$

Eliminiert man dann noch $bc \cos A$ mittelst der Relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A + Gl_4$ und führt m^2 ein, so wird endlich erhalten (a_0 nicht mehr als Einheit der Längen vorausgesetzt):

$$F = F' \left\{ \begin{matrix} 1 + \frac{m^2 - a^2}{120 a_0^2}[K_1 - K] + \frac{m^2 - b^2}{120 a_0^2}[K_2 - K] \\ + \frac{m^2 - c^2}{120 a_0^2}[K_3 - K] + Gl_6 \end{matrix} \right\}. \qquad (15)$$

Hierin sind F und F' die Inhalte des *geodätischen* und *sphärischen* Dreiecks mit denselben Seiten a, b, c; der Kugelradius ist dem arithmetischen Mittel der 3 Eck-Krümmungsmafse entsprechend gleich $a_0 : \sqrt{K}$ angenommen.*)

Zur Berechnung von F' hat man nach S. 93 (2), insofern $F' = \varepsilon\varrho^2$ für $\varrho^2 = a_0^2 : K$ ist, die Formel:

$$\log F' = \log F^* + M\left(\frac{m^2}{8a_0^2}K + \frac{8n^4 + 9m^4}{1920 a_0^4}K^2 + Gl_8\right), \qquad (16)$$

wozu F^* in bekannter Weise als Inhalt des ebenen Dreiecks aus den 3 Seiten a, b und c zu berechnen ist.

Für Dreiecksseiten von mehr als $0{,}2a_0$ Länge wird man es vorziehen, F' aus dem strengen Wert des sphärischen Excesses abzuleiten, der nach S. 87 (8) zu berechnen ist; ebenso F'' aus Formel (3) S. 84.

Dadurch wird dem Mifsstand begegnet, dafs die Glieder 8. Ord-

*) Diese Formel stimmt überein mit einer von *Hansen* in seinen *Geodätischen Untersuchungen* S. 191 oben angegebenen, wenn man die Krümmungsmafse einführt, sowie den Unterschied berücksichtigt, der zwischen F' und dem *Hansen*schen Kugeldreieck F''' stattfindet, welches auf einer Kugel vom Radius a_0 liegt. Dieser Unterschied ist mittelst unserer Formel (16) leicht abzuleiten.

nung, welche von m^6 u. s. f. herrühren, nicht gegen die numerisch kleineren Glieder vernachlässigt werden, die von $K_1 - K$ u. s. f. erzeugt werden.

In Bezug auf die Gültigkeit obiger Entwicklungen, deren Zulässigkeit im einzelnen der Kürze halber nicht überall betont ist, bleibt kein Zweifel für mäfsig grofse Werte der Seitenlängen. Der Einflufs der in den Parenthesen von (11) und (15) auftretenden Glieder 5. Ordnung, die in erster Annäherung den Unterschied zwischen genauer und sphärischer Inhaltsberechnung angeben, beträgt für $m = 0{,}1\, a_0$ kaum eine Einheit der 7. Decimalstelle des $\log F$.

Der Inhalt geodätischer Dreiecke darf daher in der Regel aus beliebigen Stücken rein sphärisch berechnet werden, wenn nur der Kugelradius nach dem mittleren Krümmungsmafs gewählt wird.

§ 9. **Die Theorie der geodätischen Dreiecke** auf beliebig krummen Oberflächen ist das Hauptziel von *Gaufs'* Abhandlung: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gottingae 1828.*) Wenn wir die Formeln S. 358 u. 359 zur Reduktion des geodätischen Dreiecks auf ein sphärisches oder ebenes mit denselben Seiten nur für das Rotationsellipsoid nachgewiesen haben, so zeigt *Gaufs* die Allgemeingültigkeit dieser Formeln (abgesehen von unwesentlichen Unterschieden der Darstellung) für jede Fläche.

Gaufs knüpft nicht an das schiefwinklige Dreieck an, sondern er zerlegt es in 2 rechtwinklige Dreiecke und stellt Differentialformeln für ein rechtwinkliges Dreieck auf, dessen beide Katheten veränderlich angenommen werden, dergestalt, dafs sie beide ein System rechtwinkliger geodätischer Koordinaten bilden. Auf Formelentwicklungen dieser Art und die Entwicklung einer Hilfsvariablen $\mathfrak{n}$, die an Stelle unseres $\mathfrak{m}$ tritt, kommen wir im nächsten Kapitel bei der Behandlung des Problems rechtwinkliger geodätischer Koordinaten.

Würde man die *Gaufs*ische Methode der Zurückführung des Problems auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung mit 2 unabhängigen Variablen im Anschlufs an unsere Entwicklungen beim schiefwinkligen Dreieck anwenden wollen, so hätte man zu bilden nach Fig. 29 S. 348:

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \cos C \tag{1}$$

als partiellen Differentialquotienten von a nach b bei konstantem A und $\mathfrak{A}_b$. Ferner nach Fig. 30 S. 353:

---

*) Vergl. auch in *Gaufs'* Werken Bd. 4, S. 341 u. ff. die von *Gaufs* selbst verfafste Anzeige dieser Abhandlung, mit einer übersichtlichen Inhaltserklärung.

$$\frac{\partial a}{\mathfrak{m}_b \partial \mathfrak{A}_b} = \sin C \tag{2}$$

als partiellen Differentialquotienten von a nach $\mathfrak{A}_b$ bei konstantem b. Beide Gleichungen geben zusammen durch Elimination der Variablen C mittelst der Relation $\cos^2 C + \sin^2 C = 1$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\mathfrak{m}_b \partial \mathfrak{A}_b}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

oder, da $\partial(a^2) = 2a\partial a$ ist, wie man leicht findet:

$$\left(\frac{\partial(a^2)}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial(a^2)}{\mathfrak{m}_b \partial \mathfrak{A}_b}\right)^2 = 4a^2. \tag{4}$$

Behufs Integration wäre hier a^2 als Funktion von b und $\mathfrak{A}_b$, und zwar versuchsweise als Reihe nach Potenzen von b und nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von $\mathfrak{A}_b$ einzuführen, und es würden nach der Methode der unbestimmten Koefficienten die Koefficienten dieser Reihe zu bestimmen sein. Die Formel für a^2 ersetzt dann in der weiteren Rechnung den Cosinussatz und gestattet $\cos A$ und $\cos A^*$ zu vergleichen.

Für ein ebenes Dreieck ergiebt sich nun bekanntlich

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc(\cos \mathfrak{A}_b \cos \mathfrak{A}_c + \sin \mathfrak{A}_b \sin \mathfrak{A}_c)$$

und man erkennt, dafs im allgemeinen a^2 ein langgestreckter Ausdruck wird, dafs also jedenfalls eine ziemlich umfängliche Rechnung entsteht, die obendrein über die Konvergenz der Resultate keinen Aufschlufs giebt — wenigstens ist nur für unendlich kleine Dreiecke dieselbe ohne weiteres klar.

Bei *Gaufs'* Methode wird die Rechnung dadurch bequemer, dafs das variable Azimut wegfällt, und man es nur mit 2 veränderlichen Katheten, also nur mit einfachen Potenzreihen zu thun hat.

Die Rechnung läfst sich aber auch dadurch vereinfachen, dafs man wie in Fig. 29 nur b als unabhängige Variable einführt, Winkel A aber gleich 90° setzt. Dieses sehr empfehlenswerte Verfahren erfordert die Integration eines Systems von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche auch nach der Methode der unbestimmten Koefficienten geschehen kann. *Hansen* hat es angewandt und wir werden es im nächsten Paragraphen ausführlicher skizzieren.

Die von uns eingeschlagene Methode der successiven Annäherung dürfte vielleicht, obgleich sie keineswegs der *Gaufs*ischen Methode an die Seite gestellt werden soll, manchem Leser nicht unwillkommen sein, da die Entwicklungen verhältnismäfsig einfach werden und das Gültigkeitsgebiet der Vernachlässigungen vielleicht etwas besser als bei den Methoden von *Gaufs* und *Hansen* zu überblicken ist.

Man kann auf diesem Wege die Genauigkeit der Reihenentwicklungen auch noch weiter treiben. Für $\mathfrak{m}$ wäre dabei am zweckmäfsigsten der Ausdruck (11) S. 278 anzuwenden, welcher 2 Ordnungen genauer ist, als der früher benutzte. Nur eine Ordnung weiter zu gehen würde wenig Erfolg bieten, weil für Entfernungen $> 0{,}1\,a_0$, um welche es sich handeln würde, die Konvergenz der Reihe für K nur gering ist.

Wir übergehen diese Entwicklung, da geodätische Dreiecke von mehr als $0{,}1\,a_0$ Durchschnittsseitenlänge immer vermieden werden können und jedenfalls der Komplikation der Rechnung halber auch werden vermieden werden. Es sind jedoch diese Formeln nach *Weingarten* und *Hansen* weiterhin mitgeteilt.

Gaufs ging in seinen Formelentwicklungen nur eine Ordnung weiter, was jedoch, wie eben gezeigt wurde und wie auch *Hansen* in seinen Geodätischen Untersuchungen durch Betrachtung der Endformeln genau erörtert hat, wenig Gewinn bietet.

Hier ist zunächst noch der Abhandlung von *Christoffel: Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.* Berlin 1868 (Abh. der Kön. Akad. der Wiss.), als derjenigen Arbeit zu gedenken, welche die Theorie des *schiefwinkligen* geodätischen Dreiecks in direkter Weise behandelt. Wie *Gaufs* begründet *Christoffel* die Theorie der geodätischen Linie mittelst der Variationsrechnung. Er beweist damit namentlich zuerst, dafs bei einer Drehung die Kürzeste immer normal zur Bahn des bewegten Endpunktes steht und dafs für geodätische Polarkoordinaten die Formel (5) S. 348 besteht.

Nun werden die Differentialformeln im Dreieck aufgestellt, deren Integrabilitätsbedingungen (vergl. S. 74 die Entwicklung der Formel (10)) alsdann unter andern zu den fundamentalen Eigenschaften der reduzierten Länge führen: Gleichheit für Drehung um beide Endpunkte, sowie Erfüllung der Differentialgleichung (6) S. 275.

Eine Integration der Differentialformeln wird nicht ausgeführt, dagegen werden weitere Folgerungen im Gebiete der Klassifikation der Flächen gezogen.

§ 10. Höhere Glieder in den Formeln zur Berechnung geodätischer Dreiecke. Am unmittelbarsten an *Gaufs'* Entwicklungen schliefsen sich diejenigen von *Weingarten* an (Astronom. Nachr. 1869 Bd. 73 Nr. 1733 S. 65 und 1870 Bd. 75 Nr. 1782 S. 91; auch im 2. Heft der Schrift: *Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Zentralbureaus der Europäischen Gradmessung*). Er findet:

$$\underset{\text{n Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} K + \left[(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 + (\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 + (\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2\right] \frac{e^2}{6} \\ - \left[\frac{b^2+c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 + \frac{a^2+c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_2 + \frac{a^2+b^2}{a_0^2}\sin^2\beta_3\right]\frac{e^2}{12} + Gl_6 \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Hierzu ist die Fläche F des geodätischen Dreiecks nach § 7 (8) bis (11) S. 365 oder (15) und (16) S. 367 zu berechnen, event. unter teilweiser Benutzung der Formeln (8) S. 87 und (3). S. 84 für den sphärischen Teil der Rechnung.

Nach *Weingartens* Entwicklungen findet man ferner zur Reduktion auf das ebene Dreieck (unter Ergänzung des *Weingarten*schen Ausdrucks um das von n^4 und m^4 abhängende Glied, vergl. S. 93):

$$\underset{\text{n Sek.}}{-A^*} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3K+K_1}{12} + \frac{m^2-a^2}{60a_0^2}(1+2e^2) + \frac{20(n^4-a^4) - 3m^2(m^2-a^2)}{30240a_0^4} \\ \quad + \left[\begin{array}{c} 2(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 + 2(\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2 \\ + (\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 \end{array}\right] \frac{e^2}{30} \\ - \left[\begin{array}{c} \frac{-10a^2+34b^2+34c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 + \frac{a^2+5b^2+25c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_2 \\ + \frac{a^2+25b^2+5c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_3 \end{array}\right] \frac{e^2}{720} + Gl_6 \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Zieht man hiervon $\frac{\varepsilon}{3}$ beiderseits ab, rechter Hand nach Mafsgabe der obigen Formel, so ergiebt sich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_1-K}{12} + \frac{m^2-a^2}{60a_0^2}(1+2e^2) + \frac{20(n^4-a^4) - 3m^2(m^2-a^2)}{30240a_0^4} \\ \quad + \left[\begin{array}{c} (\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 + (\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2 \\ - 2(\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 \end{array}\right] \frac{e^2}{90} \\ - \left[\begin{array}{c} \frac{14m^2-8a^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 \\ + \frac{5m^2-8a^2}{a_0^2}(\sin^2\beta_2 + \sin^2\beta_3) \end{array}\right] \frac{e^2}{240} + Gl_6 \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Aus diesem Ausdrucke folgen diejenigen für $B - B^*$ und $C - C^*$ durch cyklische Vertauschung der auf die 3 Ecken bezüglichen Symbole.

Man darf in diesen Formeln anstatt der reduzierten Breiten β auch die geographischen Breiten B anwenden.

Hansen ging 1865 in seinen *Geodätischen Untersuchungen*, wie bereits erwähnt, nicht von der *Gaufs*ischen partiellen Differential-

gleichung mit 2 unabhängigen Variablen (den beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks) aus, sondern verfuhr in folgender Weise, wenn wir an Fig. 29 S. 348 anknüpfen (vergl. bei *Hansen* a. a. O. S. 137, 153 und 155 u. ff.; daselbst ist mit σ, φ, ψ bezeichnet, was hier a, B, C heifst).

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} da &= \quad db \cos C \\ \mathfrak{m}_a dB &= \quad db \sin C \\ dC &= -\frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a} dB. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dieses System wird mit Hilfe der Identitäten $d(a \sin C) = \sin C da + a \cos C dC$ und $d(a \cos C) = \cos C da - a \sin C dC$ übergeführt in das neue und vorteilhaftere:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(a \sin C)}{db} &= \quad \left(\mathfrak{m}_a - a \frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a}\right) \frac{dB}{db} \cos C \\ \frac{d(a \cos C)}{db} &= 1 - \left(\mathfrak{m}_a - a \frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a}\right) \frac{dB}{db} \sin C \\ \frac{d(B + C)}{db} &= \quad \left(1 - \frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a}\right) \frac{dB}{db}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wie wir sogleich sehen werden, kommt es nun darauf an, $a \sin B$ und $a \cos B$ kennen zu lernen (auf welche Unbekannte hin zu gleichem Zwecke auch *Gaufs* operiert). *Hansen* setzt daher für $a \sin B$, $a \cos B$ und $B + C$ Reihen mit unbestimmten Koefficienten, geordnet nach Potenzen von b, und geht dann mittelst der dritten der Reihen von den ersten beiden Ausdrücken zu $a \sin C$ und $a \cos C$ über, wobei die Rechnung am einfachsten wird, wenn Winkel A gleich 90^0, also in 1. Annäherung $B + C = 90^0$ ist.

Aus $a \sin C$ und $a \cos C$ folgen andere Funktionen von a und C, die in $\mathfrak{m}_a$ und $\frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a}$ vorkommen. Werden nun alle diese Ausdrücke in obiges System eingesetzt, so müssen die Gleichungen identisch erfüllt sein d. h. die Koefficienten der verschiedenen Potenzen von b müssen einzeln verschwinden. Aus diesen Bedingungen folgen endlich die unbekannten Koefficienten in den angenommenen Ausdrücken für $a \sin B$, $a \cos B$ und $B + C$. (Bei *Hansen* a. a. O. S. 159.)

Wendet man sie an auf 2 rechtwinklige Dreiecke ABC_1 und ABC_2, die A und B gemeinsam haben, so folgt für das schiefwinklige Dreieck BC_1C_2 leicht $a_1 a_2 \cos (B_1 - B_2)$ aus $a_1 \cos B_1 \,.\, a_2 \cos B_2 + a_1 \sin B_1 \,.\, a_2 \sin B_2$, in Potenzen von a_1, a_2 und $b_1 - b_2$, d. h. man erhält $\cos (B_1 - B_2)$, den Cosinus eines Winkels des schiefwinkligen Dreiecks, durch die 3 Seiten dargestellt und kann ihn direkt mit

dem Cosinus des entsprechenden Winkels im ebenen Dreieck vergleichen.

Nach S. 188 und 189 a. a. O. findet *Hansen:*

$$
\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{
\begin{aligned}
& 1 + (\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3) \frac{e^2 + \frac{1}{2} e^4}{3} \\
& + (\cos^2 2\beta_1 + \cos^2 2\beta_2 + \cos^2 2\beta_3 - 1) \frac{e^4}{4} \\
& + \left[\frac{-14a^2 + 2b^2 + 2c^2}{a_0^2} \cos 2\beta_1 + \frac{7a^2 + b^2 - 3c^2}{a_0^2} \cos 2\beta_2 + \frac{7a^2 - 3b^2 + c^2}{a_0^2} \cos 2\beta_3 \right] \frac{e^2}{360} \\
& - \left[\frac{3m^2}{a_0^2} \sin^2 \beta_1 - 2 \frac{b^2 \cos^2 \mathfrak{A}_b + c^2 \cos^2 \mathfrak{A}_c - bc \cos \mathfrak{A}_b \cos \mathfrak{A}_c}{a_0^2} \cos^2 \beta_1 \right] \frac{e^2}{6} \\
& + \left[\frac{a^2 + 6b^2 - 2c^2}{a_0^3} b \cos \mathfrak{A}_b + \frac{a^2 - 2b^2 + 6c^2}{a_0^3} c \cos \mathfrak{A}_c \right] \frac{2e^2}{45} \sin 2\beta_1 + Gl_6
\end{aligned}
\right\} \quad (6)
$$

$$
\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{
\begin{aligned}
& (2\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3) \frac{2e^2 + e^4}{24} \\
& + \left(2\cos^2 2\beta_1 + \cos^2 2\beta_2 + \cos^2 2\beta_3 - \frac{4}{3}\right) \frac{e^4}{16} \\
& + \left[\frac{-58a^2 + 54b^2 + 54c^2}{a_0^2} \cos 2\beta_1 + \frac{11a^2 + 23b^2 + 31c^2}{a_0^2} \cos 2\beta_2 + \frac{11a^2 + 31b^2 + 23c^2}{a_0^2} \cos 2\beta_3 \right] \frac{e^2}{4320} \\
& - \left[\frac{a^2 + 2b^2 + 2c^2}{a_0^2} \sin^2 \beta_1 - \frac{3b^2 \cos^2 \mathfrak{A}_b + 3c^2 \cos^2 \mathfrak{A}_c - 2bc \cos \mathfrak{A}_b \cos \mathfrak{A}_c}{a_0^2} \cos^2 \beta_1 \right] \frac{e^2}{80} \\
& + \left[\frac{a^2 + 11b^2 - 2c^2}{a_0^3} b \cos \mathfrak{A}_b + \frac{a^2 - 2b^2 + 11c^2}{a_0^3} c \cos \mathfrak{A}_c \right] \frac{e^2}{135} \sin 2\beta_1 + Gl_6
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
+ \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{
\begin{aligned}
& \frac{1}{3} + \frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2} + \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240 a_0^4} \\
& - \left[\frac{a^2 + 2b^2 + 2c^2}{a_0^2} \cos 2\beta_1 + \frac{2a^2 + b^2 + 2c^2}{a_0^2} \cos 2\beta_2 + \frac{2a^2 + 2b^2 + c^2}{a_0^2} \cos 2\beta_3 \right] \frac{e^2}{360}.
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

Hansen giebt nur den ersten Teil des Ausdrucks für $A - A^*$

als Reduktion von A auf den Winkel eines sphärischen Dreiecks mit gleichen Seiten auf einer Kugel vom Radius a_0. Wir fügten dazu die Reduktion aufs ebene Dreieck mit Benutzung von S. 93 (4), worin ε durch $F''' : a_0^2$ zu ersetzen war, wenn F''' der Inhalt des sphärischen Dreiecks ist, dessen Beziehung zu F *Hansen* a. a. O. S. 191 angiebt (vergl. die Anm. zu S. 367).

Die Formeln für $B - B^*$ und $C - C^*$ findet man aus der obigen für $A - A^*$ durch Vertauschung der Ecken; aufserdem giebt *Hansen* noch Ausdrücke, um für alle 3 Reduktionen dieselben 2 Azimute anwenden zu können.

Wir wandeln die obigen beiden Formeln noch etwas um. Nach S. 59 hat man leicht:

$$K_1 = 1 + \left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\cos 2\beta_1 + \frac{1}{4}e^4(3\cos^2 2\beta_1 - 1) + Gl_6 \quad (8)$$

und entsprechend für K_2 und K_3. Hiermit findet man sofort als Wert der 1. Zeile in ε den Betrag K, d. i. das arithmetische Mittel von K_1, K_2 und K_3.

Ferner hat man hiermit:

$$K_2 - K_1 = e^2(\cos 2\beta_2 - \cos 2\beta_1) + Gl_4,$$

was aber nach S. 355 (9) auch gleich dem nachstehenden Betrag ist:

$$K_2 - K_1 = 2e^2 \sin 2\beta_1 \frac{c}{a_0} \cos \mathfrak{A}_c + Gl_4.$$

Durch Gleichsetzung beider Werte ergiebt sich:

$$e^2(\cos 2\beta_2 - \cos 2\beta_1) = 2e^2 \sin 2\beta_1 \frac{c}{a_0} \cos \mathfrak{A}_c + Gl_4. \quad (9)$$

Ebenso ist:

$$e^2(\cos 2\beta_3 - \cos 2\beta_1) = 2e^2 \sin 2\beta_1 \frac{b}{a_0} \cos \mathfrak{A}_b + Gl_4. \quad (10)$$

Mit Hilfe beider Formeln läfst sich die 2. Zeile im obigen Ausdruck für ε auf die Form der letzten Zeile daselbst bringen und man erhält:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{aligned} & K - \left[\frac{3m^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 - 2\,\frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{a_0^2}\cos^2\beta_1\right]\frac{e^2}{6} \\ & + \left[\frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{a_0^3}\,b\cos\mathfrak{A}_b + \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{a_0^3}\,c\cos\mathfrak{A}_c\right]\frac{e^2}{12}\sin 2\beta_1 + Gl_6. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

In derselben Weise findet sich ohne Schwierigkeit:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3K + K_1}{12} + \frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2) + \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240 a_0^4} \\ - \left[\begin{array}{l} \frac{8m^2 - 3a^2}{a_0^2} \sin^2\beta_1 \\ - \frac{3b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + 3c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - 2bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{a_0^2}\cos^2\beta_1 \end{array} \right] \frac{e^2}{30} \\ + \left[\begin{array}{l} \frac{a^2 + 61b^2 - 7c^2}{a_0^3} b\cos\mathfrak{A}_b \\ + \frac{a^2 - 7b^2 + 61c^2}{a_0^3} c\cos\mathfrak{A}_c \end{array} \right] \frac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + Gl_6 . \end{array} \right\} \quad (12)$$

Führt man hier noch $\frac{\varepsilon}{3}$ ein mit Hilfe des vorhergehenden Ausdrucks (11) für ε, so wird schliefslich erhalten:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_1 - K}{12} + \frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2 - 6e^2\sin^2\beta_1) \\ \quad + \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240 a_0^2} \\ - \frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - 4bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{90 a_0^2} e^2\cos^2\beta_1 \\ + \left[\begin{array}{l} \frac{-19a^2 + b^2 + 13c^2}{a_0^3} b\cos\mathfrak{A}_b \\ + \frac{-19a^2 + 13b^2 + c^2}{a_0^3} c\cos\mathfrak{A}_c \end{array} \right] \frac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + Gl_6 . \end{array} \right\} \quad (13)$$

In diesen Formeln (11) und (13) darf man ebenfalls die geographischen Breiten B anstatt der reduzierten Breiten β anwenden.

§ 11. **Fortsetzung. Vergleichung der höheren Glieder nach Hansen und Weingarten.** Um die im Vorhergehenden nach beiden Autoren angesetzten Formeln zu vergleichen, setzen wir im Anschlufs an Fig. 19 S. 225 mittelst des sphärischen Hilfsdreiecks, welches der geodätischen Linie $AB = c$ zugeordnet ist:

$$\sin\beta_2 = \sin\beta_1 \cos\Delta\varphi - \cos\beta_1 \sin\Delta\varphi \cos\mathfrak{A}_c .$$

Da nach S. 223 (9) aber $\Delta\varphi$ gleich $\frac{c}{a_0} + Gl_3$ ist, hat man hieraus sofort:

$$\sin\beta_2 = \sin\beta_1 - \frac{c}{a_0}\cos\mathfrak{A}_c\cos\beta_1 - \frac{c^2}{2a_0^2}\sin\beta_1 + Gl_3 . \quad (1)$$

Entsprechend ist:

$$\sin\beta_3 = \sin\beta_1 - \frac{b}{a_0}\cos\mathfrak{A}_b\cos\beta_1 - \frac{b^2}{2a_0^2}\sin\beta_1 + Gl_3 \quad (2)$$

und durch Subtraktion beider Gleichungen:

$$\sin\beta_2 - \sin\beta_3 = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{b}{a_0}\cos\mathfrak{A}_b - \frac{c}{a_0}\cos\mathfrak{A}_c\right)\cos\beta_1 \\ + \left(\frac{b^2}{2a_0^2} - \frac{c^2}{2a_0^2}\right)\sin\beta_1 + Gl_3. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Hieraus folgt nun ohne Schwierigkeit weiter:

$$\left[(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 + (\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 + (\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2\right]\frac{e^2}{6}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{3a_0^2}\, e^2\cos^2\beta_1 \\ + \left[\frac{2b^2 - c^2}{a_0^3}\, b\cos\mathfrak{A}_b + \frac{2c^2 - b^2}{a_0^3}\, c\cos\mathfrak{A}_c\right]\frac{e^2}{12}\sin 2\beta_1 + Gl_6 \end{array} \right\},$$

sowie:

$$\left[\frac{b^2 + c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 + \frac{a^2 + c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_2 + \frac{a^2 + b^2}{a_0^2}\sin^2\beta_3\right]\frac{e^2}{12}$$

$$= \frac{m^2}{2a_0^2}\, e^2\sin^2\beta_1 - \left[\frac{a^2 + b^2}{a_0^3}\, b\cos\mathfrak{A}_b + \frac{a^2 + c^2}{a_0^3}\, c\cos\mathfrak{A}_c\right]\frac{e^2}{12}\sin 2\beta_1 + Gl_6.$$

Subtrahiert man beide Gleichungen Seite für Seite, so ersieht man bald, dafs die Ausdrücke für ε nach (1) S. 371 und (11) S. 374 identisch sind bis auf die überhaupt vernachlässigten Glieder 8. Ordnung.

Ferner erhält man aus den Formeln (1) bis (3):

$$\left[(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 - 2(\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 + (\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2\right]\frac{e^2}{90}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - 4bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{90a_0^2}\, e^2\cos^2\beta_1 \\ + \left[\frac{-4b^2 + 8c^2}{a_0^3}\, b\cos\mathfrak{A}_b + \frac{8b^2 - 4c^2}{a_0^3}\, c\cos\mathfrak{A}_c\right]\frac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + Gl_6 \end{array} \right\}$$

sowie:

$$\left[\frac{14m^2 - 8a^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 + \frac{5m^2 - 8a^2}{a_0^2}(\sin^2\beta_2 + \sin^2\beta_3)\right]\frac{e^2}{240}$$

$$= \frac{m^2 - a^2}{10a_0^2}\, e^2\sin^2\beta_1 + \frac{19a^2 - 5b^2 - 5c^2}{a_0^3}(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\frac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + Gl_6.$$

Hiermit ersieht man leicht, dafs die Formeln (3) S. 371 und (13) S. 375 bis auf Glieder 8. Ordnung ebenfalls identisch sind.

Für die Anwendung sind die Formeln (1) und (3) S. 371 ebenso bequem als (11) und (13) S. 374 u. 375.

Es ist aber einleuchtend, dafs an der Grenze der Anwendbarkeit vorstehender Formeln die verschiedenen Modifikationen merklich verschiedene Resultate geben können. Dies ist in der That für einen

Betrag der mittleren Seitenlängen $m = 0{,}3a_0$ der Fall; verschieden modificierte Formeln für den Excefs zeigen hier Differenzen bis zu ca. 0,2″.

Hansen ist es gelungen, bei gleicher analytischer Genauigkeit eine solche Modifikation zu finden, die auch für $m = 0{,}3a_0$ noch in den Hundertstelsekunden sicher ist. Er bedient sich dabei der Krümmungsmafse gewisser Hilfspunkte aufser denjenigen der Ecken, ein Verfahren, welches auch 1868 *Schering*, jedoch unter Beschränkung auf geringere analytische Genauigkeit, eingeschlagen hat.

Hierüber ist zu vergleichen die Mitteilung *Hansens: Reflexionen über die Reduktion der Winkel eines sphärischen Dreiecks* u. s. f. in den Berichten über die Verhandl. der Ges. der Wiss. zu Leipzig, math.-physik. Klasse, 1869, S. 139.

Ausführlicher mit Beispielen (die an die in den *Geodätischen Untersuchungen* S. 191 u. ff. gegebenen anknüpfen) im *Supplement zu der »Geodätische Untersuchungen« benannten Abhandlung* etc. in den Abhandlungen derselben Gesellschaft von 1869, Bd. 9, Nr. III.

Vergleiche auch eine übersichtliche Besprechung in der Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges. 1870, Bd. 5, S. 222, sowie einige Bemerkungen in Bd. 13, 1878, S. 79.

Wir dürfen uns hier darauf beschränken, eines der von *Hansen* für sehr grofse Dreiecke berechneten Beispiele auf die oben angegebenen Formeln anzuwenden. Man wird dadurch zugleich hinlänglich erkennen, dafs bei $m \leqq 0{,}2a_0$ diese Formeln in jeder Modifikation ausreichen und jedenfalls genügen, um die früher von uns für $m \leqq 0{,}1\,a_0$ entwickelten einfacheren Formeln nach ihren Fehlern zu beurteilen.

§ 12. Zahlenbeispiel zu Hansens und Weingartens Formeln.

In seinen *Geodätischen Untersuchungen* S. 199 und insbesondere in dem *Supplement* S. 348 giebt *Hansen* folgendes Dreieck, nach den strengen Formeln für geodätische Linien (welche Formeln denen unseres 5. Kapitels entsprechen) berechnet:

A	$\beta_1 = 15^0\,14'\,30{,}0318''$	$\varrho''\,\dfrac{a}{a_0} = 70351{,}4184$	$\mathfrak{A}_b = 32^0\,18'\,53{,}2155''$	$= -\mathfrak{A}_c$
B	$\beta_2 = 0$	$\varrho''\,\dfrac{b}{a_0} = 64800$	$\mathfrak{B}_c = 148^0$	$\mathfrak{B}_a = 90^0$
C	$\beta_3 = 0$	$\varrho''\,\dfrac{c}{a_0} = 64800$	$\mathfrak{C}_a = 270^0$	$\mathfrak{C}_b = 212^0.$

Die ältere Rechnung *Hansens* in den *Geodätischen Untersuchungen* stimmt mit diesen dem *Supplement* entnommenen Angaben im wesentlichen überein; wir haben deshalb nicht nachgerechnet. Der Excefs ist nach diesen Zahlen gleich

$$\varepsilon = 9466{,}4310''.$$

Berechnet man ferner zu den linearen Längen 70351,4184, 64800 und 64800 der 3 Seiten die zugehörigen Winkel des ebenen Dreiecks nach bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie, so folgt:

$$\begin{aligned} A^* &= 65^0\ 45'\ 13{,}2493'' \\ B^* &= 57\ \ \ 7\ \ 23{,}3754 \\ C^* &= 57\ \ \ 7\ \ 23{,}3754 \\ \hline \text{Summa} &= 180\ \ \ 0\ \ \ 0{,}0001\ . \end{aligned}$$

Da man nun für das geodätische Dreieck hat:

$$\begin{aligned} A &= 66^0\ 37'\ 46{,}4310'' \\ B &= 58^0 \\ C &= 58^0, \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} A - A^* &= 3153{,}1817'' = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}2953'' \\ B - B^* &= 3156{,}6246\ \ = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}1476 \\ C - C^* &= 3156{,}6246\ \ = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}1476 \\ \hline \text{Summa} &= 9466{,}4309\,. \end{aligned}$$

Zugleich folgt

$$\varrho''\,\frac{F^*}{a_0^{\,2}} = 3{,}9675889.6\,.$$

Behufs Anwendung der Formeln des § 10 haben wir zunächst nach S. 59:

$$\log K_1 = 9{,}9970916.4\text{—}10 - 4\log w_1 = 0{,}0025051.0$$

$$K_1 = 1{,}00578487\,.$$

$$K_2 = K_3 = 1 : (1 - e^2) = 1 + \delta\,,$$

also nach S. 38:

$$K_2 = K_3 = 1{,}00671922$$

$$K = \frac{K_1 + K_2 + K_3}{3} = 1{,}00640777\,.$$

Man erhält ferner:

$\frac{a^2}{a_0^{\,2}} = 0{,}1163311$	$\frac{m^2 - a^2}{a_0^{\,2}} = -0{,}0117567$	$\frac{a^4}{a_0^{\,4}} = 0{,}013533$	$\frac{n^4 - a^4}{a_0^{\,4}} = -0{,}002528$
$\frac{b^2}{a_0^{\,2}} = 0{,}0986961$	$\frac{m^2 - b^2}{a_0^{\,2}} = +0{,}0058783$	$\frac{b^4}{a_0^{\,4}} = 0{,}009741$	$\frac{n^4 - b^4}{a_0^{\,4}} = +0{,}001264$
$\frac{c^2}{a_0^{\,2}} = 0{,}0986960$	$\frac{m^2 - c^2}{a_0^{\,2}} = +0{,}0058783$	$\frac{c^4}{a_0^{\,4}} = 0{,}009741$	$\frac{n^4 - c^4}{a_0^{\,4}} = +0{,}001264$
$\frac{m^2}{a_0^{\,2}} = 0{,}1045744$		$\frac{n^4}{a_0^{\,4}} = 0{,}011005$	

Nach Formel (16) S. 367 hat man jetzt:

$$\log F'' = \log F^* + 0{,}0057133.9 + 0{,}0000427.2\,,$$

also ist:

$$\log \varrho'' \frac{F'}{a_0^2} = 3{,}9733450.7\,.$$

Wegen der bedeutenden Gröſse des Dreiecks ist dieser Betrag etwas zu klein, wie die nachfolgende strenge Rechnung zeigt.

Man hat zunächst $\sqrt{K} = 1{,}00319878$ und hiermit als Seiten des sphärischen Dreiecks F':

$$\varrho'' \frac{a}{a_0} \sqrt{K} = 70576{,}4569'' = 19^0\, 36'\, 16{,}4569''$$

$$\varrho'' \frac{b}{a_0} \sqrt{K} = 65007{,}2809 \quad = 18 \quad 3 \quad 27{,}2809$$

$$\varrho'' \frac{c}{a_0} \sqrt{K} = 65007{,}2809 \quad = 18 \quad 3 \quad 27{,}2809\,.$$

Hiermit folgt nach (8) S. 87:

$$\log \tan \frac{\varepsilon'}{4} = 8{,}0596534.9 - 10 \qquad \log \frac{\varepsilon'}{4} = 8{,}0596344.3 - 10$$

$$\log \varepsilon' = 8{,}6616944.3 - 10\,,$$

wobei ε' als Arcus zu verstehen ist. Subtrahiert man $\log K$ und addiert $\log \varrho''$, so ergiebt sich sofort:

$$\log \varrho'' \frac{F'}{a_0^2} = 3{,}9733455.8\,.$$

Um auf F zu kommen, berechnen wir noch:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m^2 - a^2}{a_0^2}(K_1 - K) = -\,0{,}0118.(-\,0{,}00062) = +\,0{,}0000073 \\ \frac{m^2 - b^2}{a_0^2}(K_2 - K) = +\,0{,}0059.(+\,0{,}00031) = + \qquad\quad 18 \\ \frac{m^2 - c^2}{a_0^2}(K_3 - K) = +\,0{,}0059.(+\,0{,}00031) = + \qquad\quad 18 \end{array}\right\}$$

$$+\,0{,}0000109.$$

Das giebt als Zuwachs im Logarithmus nach S. 367 (15):

$$+\,M\,\frac{0{,}0000109}{120} = +\,0{,}0000000.4\,;$$

es wird daher:

$$\log \varrho'' \frac{F}{a_0^2} = 3{,}9733456.2 - 10\,.$$

Formel (1) S. 371 giebt nunmehr zur Berechnung von ε:

$$\log \varrho'' \frac{F}{a_0^2} K = 3{,}9761196.0 \qquad \varrho'' \frac{F}{a_0^2} K = 9464{,}978''$$

Es ist aber $\sin \beta_2 = \sin \beta_3 = 0$, $\log e^2 \frac{\sin^2 \beta_1}{6} = 5{,}88582-10$, daher wird:

$$\varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left[(\sin\beta_1-\sin\beta_2)^2+(\sin\beta_2-\sin\beta_3)^2+(\sin\beta_3-\sin\beta_1)^2\right]\frac{e^2}{6} = +\ 1{,}446''$$

Ferner ist:

$$-\varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left[\frac{b^2+c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1+\frac{a^2+c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_2+\frac{a^2+b^2}{a_0^2}\sin^2\beta_3\right]\frac{e^2}{12} = -\ 0{,}071''$$

Diese drei Glieder geben zusammen $\varepsilon = 9466{,}353''$

fehlerhaft um $+\ 0{,}078$.

Rechnet man mit der *geographischen* Breite $B_1 = 15^0\ 17'\ 25{,}46''$, so folgt für das 2. und 3. Glied bezw. $+\ 1{,}455 - 0{,}072$ und damit $\varepsilon = 9466{,}361''$

fehlerhaft um $+\ 0{,}070$.

Formel (6) S. 359 giebt $\varepsilon = 9340{,}346 + 122{,}877 = 9463{,}223''$

fehlerhaft um $+\ 3{,}208$.

Der Fehler vermindert sich etwas durch streng sphärische Rechnung, wonach sich findet:

$$\log \varepsilon' = \log \varrho'' \frac{F'}{a_0^2} K = 3{,}9761195.6 \text{ und damit } \varepsilon' = 9464{,}977''$$

fehlerhaft um $+\ 1{,}458$.

Formel (3) S. 371 giebt

für $A - A^*$:

$$\begin{array}{lr} \frac{K_1 - K}{12} = -\ 0{,}00005191 & \\ +\frac{m^2-a^2}{60a_0^2}(1+2e^2) = - & 19856 \\ +\frac{n^4-a^4}{1512a_0^4} = - & 17 \\ -\frac{m^2(m^2-a^2)}{10080a_0^4} = + & 12 \\ +\frac{e^2\sin^2\beta_1}{45} = + & 1025 \\ -\frac{14m^2-8a^2}{240a_0^2}e^2\sin^2\beta_1 = - & 103 \\ \hline \text{Summa} = -\ 0{,}00024130 & \end{array}$$

für $B - B^*$ und $C - C^*$:

$$\left\{\begin{array}{lcr} \frac{K_2 - K}{12} & = + & 0{,}00002596 \\ + \frac{m^2 - b^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2) & = + & 9928 \\ + \frac{n^4 - b^4}{1512 a_0^4} & = + & 8 \\ - \frac{m^2 (m^2 - b^2)}{10080 a_0^4} & = - & 6 \\ - \frac{e^2 \sin^2 \beta_1}{90} & = - & 513 \\ \frac{-5m + 8b^2}{240 a_0^2} e^2 \sin^2 \beta_1 & = + & 52 \end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = + 0{,}00012065.$$

Diese Zahlen sind mit $\varrho'' \frac{F}{a_0^2}$ zu multiplizieren. Es folgt dann:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}269'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}134''$$

fehlerhaft um $-0{,}026$ fehlerhaft um $+0{,}014$.

Führt man $\frac{\varepsilon}{3}$ nach Formel (1), wie oben erhalten, gleich $3155{,}451''$ ein, so wird:

$$A - A^* = 3153{,}182'' \qquad B - B^* = C - C^* = 3156{,}585''$$

fehlerhaft um $0{,}000$ fehlerhaft um $+0{,}040$.

Die *Formeln* (6) S. 359 führen zu folgenden Zahlen:

$$\left\{\begin{array}{lcr} \frac{K_1 - K}{12} & = - & 0{,}00005191 \\ \frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2} K^2 & = - & 0{,}00019846 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcr} \frac{K_2 - K}{12} & = + & 0{,}00002596 \\ \frac{m^2 - b^2}{60 a_0^2} K^2 & = + & 0{,}00009923 \end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = - 0{,}00025037 \qquad \text{Summa} = + 0{,}00012519.$$

Dieses mit $\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2}$ multipliziert, ergiebt:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}323'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}162''$$

fehlerhaft um $+0{,}028$ fehlerhaft um $-0{,}014$;

es sind also hier die Resultate ebenso genau wie bei der strengeren Rechnung. Wir werden weiterhin sehen, dafs die Formeln (6) S. 359 in der That für sehr grofse Dreiecke noch ausreichen, wenn nur ε nach einer strengeren Formel berechnet wird.

Formel (11) S. 374 giebt für den Exceſs:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho''\frac{F}{a_0^2}K &= \quad 9464{,}978'' \\
\log\left(\frac{e^2m^2}{2a_0^2}\sin^2\beta_1\right) = 5{,}38236-10 \text{ und } -\varrho''\frac{F}{a_0^2}\cdot\frac{e^2m^2}{2a_0^2}\sin^2\beta_1 &= -\quad 0{,}227 \\
+\varrho''\frac{F}{a_0^2}\cdot\frac{b^2}{a_0^2}\cos^2\mathfrak{A}_b\cdot\frac{e^2}{8}\cos^2\beta_1 = [0{,}13768] &= +\quad 1{,}373 \\
+\varrho''\frac{F}{a_0^2}\cdot\frac{3m^2}{a_0^3}b\cos\mathfrak{A}_b\cdot\frac{e^2}{6}\sin 2\beta_1 = [0{,}9645-10] &= +\quad 0{,}442
\end{aligned}\right\}$$

$$\varepsilon = 9466{,}566''$$

$$\text{fehlerhaft um } -\ 0{,}135.$$

Die Einführung der geographischen Breite B_1 ändert das Resultat nicht merklich, dagegen kommt ein anderer Wert heraus, wenn man in Formel (11) die Ecken cyklisch vertauscht d. h. alles was sich daselbst auf Ecke A und ihre Nachbarseiten bezieht, auf Ecke B oder C und deren Nachbarseiten bezieht. Man erhält z. B. für Ecke C, da auſser dem Hauptglied die andern Glieder bis auf eines verschwinden:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho''\frac{F}{a_0^2}K &= 9464{,}978'' \\
\varrho''\frac{F}{a_0^2}\,\frac{b^2\cos^2 212^0 + a^2\cos^2 270^0 - ab\cos 212^0\cos 270^0}{a_0^2}\cdot\frac{e^2}{8} &= \quad 1{,}485
\end{aligned}\right\}$$

$$\varepsilon = 9466{,}463''$$

$$\text{fehlerhaft um } -\ 0{,}032.$$

Dieser Wert resultiert auch, wenn man von Ecke B ausgeht.

Das arithmetische Mittel der 3 Werte von ε mit Ecke A, B und C als Ausgang führt zu dem Werte:

$$\varepsilon = 9466{,}497''$$

$$\text{fehlerhaft um } -\ 0{,}066.$$

Das Mittel dieses letzten Wertes und des Wertes aus Formel (1) S. 371 endlich giebt:

$$\varepsilon = 9466{,}425'' \text{ bezw. } 429''$$

$$\text{fehlerhaft um } +0{,}006 \qquad +0{,}002$$

je nachdem man mit reduzierter oder geographischer Breite rechnet.

Nach *Hansens* Bemerkungen in der Abhandlung *Reflexionen* etc. S. 142 und 143 muſs man annehmen, daſs überhaupt in allen Fällen das soeben gebildete Mittel *besonders genau* ist, indem es ver-

mutlich die numerisch beträchtlichsten der höheren Glieder mit einschliefst.

Formel (13) S. 375 giebt:

für $A - A^*$:

$$\left\{\begin{array}{lr}
\frac{K_1 - K}{12} & = -\ 0{,}00005191 \\
+\frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2 - 6e^2 \sin^2\beta_1) = - & 19803 \\
+\frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240 a_0^4} = - & 5 \\
+\frac{b^2 \cos^2 \mathfrak{A}_b}{45 a_0^2} e^2 \cos^2\beta_1 = + & 973 \\
-\frac{19a^2 + 14b^2}{360 a_0^3} b \cos \mathfrak{A}_b e^2 \sin^2\beta_1 = - & 207
\end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = -\ 0{,}00024233$$

für $B - B^*$ und $C - C^*$:

$$\left\{\begin{array}{lr}
\frac{K_2 - K}{12} & = +\ 0{,}00002596 \\
+\frac{m^2 - b^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2) = + & 9928 \\
+\frac{20(n^4 - b^4) - 3m^2(m^2 - b^2)}{30240 a_0^4} = + & 2 \\
-\frac{b^2 \cos^2 212^0}{90 a_0^2} e^2 = - & 526 \\
\text{letztes Glied} = & 0
\end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = +\ 0{,}00012000.$$

Diese Koefficienten geben mit $\varrho'' \frac{F}{a_0^2}$ multipliziert:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}279'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}129''.$$

Infolge des Einflusses höherer Glieder ist die Summe von

$$-\ 2{,}279 + 1{,}129 + 1{,}129$$

nicht null, sondern — 0,021. Korrigiert man diese Zahlen entsprechend um $\pm$ 0,007, so wird

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}272'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}136''$$

fehlerhaft um — 0,023 fehlerhaft um + 0,012.

Nimmt man $\frac{\varepsilon}{3} = 3155{,}499''$, entsprechend dem Mittelwerte der 3 Berechnungen nach Formel (11) S. 374, so wird erhalten:

$$A - A^* = 3153{,}227'' \qquad B - B^* = C - C^* = 3156{,}635''$$

fehlerhaft um $-0{,}045$ fehlerhaft um $-0{,}010$.

Verbinden wir aber die Mittelwerte der Ergebnisse von (3) und (13):

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}271'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}135''$$

mit dem Mittelwert der Ergebnisse von (1) und (11), d. h. mit $\varepsilon = 9466{,}425''$, so folgt:

$$A - A^* = 3153{,}204'' \qquad B - B^* = C - C^* = 3156{,}610''$$

fehlerhaft um $-0{,}022$ fehlerhaft um $+0{,}015$.

§ 13. **Maximalbeträge der Glieder 6. und 7. Ordnung.** Die Formeln des § 10 gestatten die Beantwortung der Frage, wie lange es zulässig ist, die Glieder 6. und 7. Ordnung bei Berechnung der Reduktionen $A - A^*$ u. s. f. zu vernachlässigen, also die Formeln (6) S. 359 zu benutzen.

Wenden wir uns zunächst zu dem Exceſs ε, so kommen die folgenden Formeln in betracht. Einerseits nach S. 359 (6):

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F^*}{a_0^2}\left(K + \frac{m^2}{8 a_0^2} K^2 + Gl_4\right). \tag{1}$$

Andererseits nach S. 374 (11) und S. 367 (15) und (16), wobei wir aber im letzteren Falle die logarithmische Formel durch die direkte Formel nach S. 93 (2) ersetzen:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left\{\begin{aligned} &K - \left[\frac{3m^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 - 2\frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{a_0^2}\cos^2\beta_1\right]\frac{e^2}{6} \\ &+ \left[\frac{a^2+3b^2-c^2}{a_0^3}b\cos\mathfrak{A}_b + \frac{a^2-b^2+3c^2}{a_0^3}c\cos\mathfrak{A}_c\right]\frac{e^2}{12}\sin^2\beta_1 + Gl_6 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\varrho''\frac{F}{a_0^2} = \varrho''\frac{F^*}{a_0^2}\left\{\begin{aligned} &1 + \frac{m^2}{8a_0^2}K + \frac{3m^4+n^4}{240a_0^4}K^2 \\ &+ \frac{(m^2-a^2)(K_1-K)+(m^2-b^2)(K_2-K)+(m^2-c^2)(K_3-K)}{120a_0^2} + Gl_6. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Formel (2) geht in (1) über, wenn man in (3) das 3. und 4. Glied der Parenthese und in (2) sämtliche Glieder bis aufs erste d. i. K vernachlässigt.

Das 3. Glied in (3):

$$\varrho''\frac{F^*}{a_0^2}\cdot\frac{3m^4+n^4}{240a_0^4}K^2 \tag{4}$$

hat seinen Maximalwert im gleichseitigen Dreieck. Wie schon S. 95 berechnet, beträgt es für $m = n = 0{,}1\,a_0$:

$$0{,}0015''. \tag{5}$$

Man kann daher für Dreiecke mit $m \leqq 0{,}1\,a_0$ das 3. Glied der Formel (3) unbedenklich fortlassen.

Dies gilt in noch höherem Maſse für das 4. Glied dieser Formel:

$$\varrho''\,\frac{F^*}{a_0^{\,2}} \cdot \frac{(m^2 - a^2)\,(K_1 - K) + (m^2 - b^2)\,(K_2 - K) + (m^2 - c^2)\,(K_3 - K)}{120\,a_0^{\,2}}. \tag{6}$$

Wir untersuchen dessen Maximum für konstantes m mit Rücksicht auf die Bedingungen (3) und (6) S. 360, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} F^{*2} &= \frac{1}{16}\left(6a^2m^2 - 3a^4 - (b^2 - c^2)^2\right) \\ 3m^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c) + a_0^{\,2}\,Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hierzu treten nach S. 360 (2) und S. 355 (9) noch folgende Bestimmungsgleichungen für $K - K_1$ u. s. f.:

$$\left.\begin{aligned} K - K_1 &= \frac{2}{3}\,e^2 \sin 2\beta\,\frac{b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c}{a_0} + Gl_4 \\ K - K_2 &= \frac{2}{3}\,e^2 \sin 2\beta\,\frac{b\cos\mathfrak{A}_b - 2c\cos\mathfrak{A}_c}{a_0} + Gl_4 \\ K - K_3 &= \frac{2}{3}\,e^2 \sin 2\beta\,\frac{-2b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c}{a_0} + Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Unter β kann man eine mittlere reduzierte Breite der 3 Ecken verstehen.

Man bemerkt nun sofort, daſs das zu untersuchende Glied (6) symmetrisch zu $b\cos\mathfrak{A}_b$ und $c\cos\mathfrak{A}_c$, $b\sin\mathfrak{A}_b$ und $\pm c\sin\mathfrak{A}_c$ ist. Dem Maximum entspricht daher:

$$b = c \qquad \mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b. \tag{9}$$

Substituieren wir dies, so geht der Ausdruck (6) mit Rücksicht darauf, daſs $b\cos\mathfrak{A}_b$ die positive oder negative Höhe h_a des Dreiecks ist, über in:

$$\pm\,\varrho''\,\frac{e^2\sin 2\beta}{180}\,\frac{(b^2 - a^2)\,a h_a^2}{a_0^{\,5}}$$

oder

$$\pm\,\varrho''\,\frac{e^2\sin 2\beta}{160}\,\frac{(2m^2 - a^2)\,(m^2 - a^2)\,a}{a_0^{\,5}}. \tag{10}$$

Dieses hat sein Maximum bei $a^2 = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{10}\,m^2$. Zu dem kleineren a

welches sehr nahe gleich $\frac{m}{2}$ ist, gehört das gröfsere Maximum; es beträgt für $\beta = 45^0$ und $m = 0{,}1\,a_0$:

$$\pm 0{,}00006''. \tag{11}$$

Das 2. Glied der Formel (2) ist angenähert gleich

$$-\rho'' \frac{F^*}{a_0^2} \cdot \frac{m^2}{2\,a_0^2}\, e^2 \sin^2\beta_1. \tag{12}$$

Es erhält sein Maximum fürs gleichseitige Dreieck und zwar beträgt dasselbe bei $\beta_1 = 90^0$ für $m = 0{,}1\,a_0$:

$$-\,0{,}030''. \tag{13}$$

Das 3. Glied der Formel (2) ist angenähert gleich

$$+\rho'' \frac{F^*}{a_0^2}\,\frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{3\,a_0^2}\, e^2\cos^2\beta_1. \tag{14}$$

Wenn dasselbe ein Maximum werden soll unter Voraussetzung konstanten Wertes von m, so zeigen die hierbei zu beachtenden Bedingungen (7), dafs $b = c$ und entweder $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ oder $180^0 - \mathfrak{A}_b$ sein mufs. Denn das Glied (14) und die (7) sind symmetrisch zu $b\cos\mathfrak{A}_c$ und $\pm c\cos\mathfrak{A}_c$, $b\sin\mathfrak{A}_b$ und $\pm c\sin\mathfrak{A}_c$.

Für $b = c$, $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ liegt das Dreieck symmetrisch zum Meridian von A, $b\cos\mathfrak{A}_b$ ist wieder die Höhe $\pm h_a$ und das Glied wird gleich

$$+\rho'' \frac{a h_a^3}{6\,a_0^4}\, e^2\cos^2\beta_1 \tag{15}$$

mit $h_a = \sqrt{\frac{3\,(2m^2 - a^2)}{4}}$. Das Maximum tritt ein bei $a^2 = \frac{1}{2}\,m^2$, $\tan\mathfrak{A}_b = \frac{1}{3}$ mit $\mathfrak{A}_b = 18{,}4^0$ oder $198{,}4^0$, vergl. Fig. 32. Es beträgt:

Fig. 32.

$$+\rho'' \frac{9m^4}{64\,a_0^4}\, e^2\cos^2\beta_1. \tag{16}$$

Insbesondere ist sein Betrag für $\beta_1 = 0^0$ und $m = 0{,}1\,a_0$:

$$+\,0{,}019'' \tag{17}$$

Für $b = c$, $\mathfrak{A}_c = 180^0 - \mathfrak{A}_b$ liegt das Dreieck östlich oder westlich vom Meridian A, symmetrisch zu dessen Perpendikel. Das Glied (14) wird hier, da $b\cos\mathfrak{A}_b$ jetzt $\pm\frac{a}{2}$ ist, gleich

$$+\rho'' \frac{e^2\cos^2\beta_1}{16\,a_0^4}\, a^2\sqrt{6a^2m^2 - 3a^4} \tag{18}$$

und ein Maximum für $a^2 = \frac{3}{2} m^2$. Dieses beträgt soviel wie (16), ist also auch für $\beta_1 = 0^0$ und $m = 0{,}1\, a_0$ so grofs wie (17). Dabei ist jedoch $\mathfrak{A}_c = 45^0$ oder 225^0; vergl. Fig. 33.

Das 4. Glied der Formel (2) ist angenähert gleich

$$\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} \left(\frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{a_0^3}\, b \cos \mathfrak{A}_b + \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{a_0^3}\, c \cos \mathfrak{A}_c \right) \frac{e^2}{12} \sin 2\beta_1. \quad (19)$$

Mit Rücksicht auf die Bedingungen (7) ersieht man leicht, dafs bei konstantem m für ein Maximum $b = c$ und $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ erforderlich ist, womit der Ausdruck (19) in

$$\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} \frac{m^2 b \cos \mathfrak{A}_b}{2 a_0^3} e^2 \sin 2\beta_1$$

Fig. 33.

übergeht. Nun ist $b \cos \mathfrak{A}_b$ jetzt wieder $\pm h_a$, daher der Ausdruck (19) auch gleich

$$\pm \varrho'' \frac{m^2\, a\, h_a^2}{4 a_0^5} e^2 \sin 2\beta_1. \quad (20)$$

Wegen $h_a^2 = \frac{3}{4}(2m^2 - a^2)$ wird dies ein Maximum für $a = m\sqrt{\frac{2}{3}}$ wobei $h_a = m$. Das Maximum beträgt

$$\mp \varrho'' \frac{m^5 \sqrt{6}}{12 a_0^5} e^2 \sin 2\beta_1. \quad (21)$$

Insbesondere hat man für dasselbe bei $\beta_1 = 45^0$ und $m = 0{,}1\, a_0$:

$$\pm 0{,}003''. \quad (22)$$

Uberblickt man nunmehr die Maximalwerte der einzelnen Glieder, so zeigt sich, dafs für $m \leq 0{,}1\, a_0$ nur 2 Glieder in betracht kommen, nämlich das 2. und 3. Glied in ε. Um das Zusammenwirken derselben festzustellen, betrachten wir noch ihre Summe für $\beta_1 = 45^0$. Mit Rücksicht auf das Obige erkennt man leicht, dafs 2 Maxima eintreten.

Man erhält erstens für $b = c$ und $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$, wobei das Dreieck symmetrisch zum Meridian von A liegt, Fig. 34:

Fig. 34.

$$- \varrho'' \frac{e^2}{24} \frac{a h_a}{a_0^4} (3m^2 - 2h_a^2); \quad (23)$$

zweitens für $b = c$ und $\mathfrak{A}_c = 180^0 - \mathfrak{A}_b$, wobei das Dreieck symmetrisch zum Perpendikel von A liegt, Fig. 35:

$$-\varrho'' \frac{e^2}{32 a_0^4} (2m^2 - a^2) \sqrt{3(2m^2 - a^2) a^2}. \tag{24}$$

(23) wird ein Maximum für $a = m\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $\mathfrak{A}_b = 45$ oder 225^0; (24) dagegen für $a = \frac{m}{\sqrt{2}}$, $\tan \mathfrak{A}_c = 3$, $\mathfrak{A}_c = 71{,}6^0$ oder $251{,}6^0$. Beide sind gleich

$$-\varrho'' \frac{9e^2}{128} \frac{m^4}{a_0^4}; \tag{25}$$

Das ist für $m = 0{,}1 a_0$:

$$-0{,}010''. \tag{26}$$

Nord

Süd

Fig. 35.

In Bezug auf die beiden beträchtlichsten Glieder der Formel (2) hat man nunmehr folgende Zusammenstellung, welche durch Mitnahme der kleinen vernachlässigten Glieder nur unerheblich modificiert werden würde:

Maximaler Fehler der Formel (1) *im Vergleich zu* (2)
für $m = 0{,}1 a_0$.

$B_1 = 0^0$	$+ 0{,}019''$	Fig. 32 und 33.	
45	$- 0{,}010$	Fig. 34 und 35.	(27)
90	$- 0{,}030$	Beliebig gelegenes gleichseitiges Dreieck.	

§ 14. **Fortsetzung. Maximalbeträge der Glieder 6. und 7. Ordnung in $A - A^*$ u. s. f.** Um die Formel (6) S. 359 für $A - A^*$, nämlich

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} \left(\frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2} K^2 + \frac{K_1 - K}{12} \right) + Gl_6 \tag{1}$$

mit der strengen Formel (13) S. 375 zu vergleichen, führen wir in dieser für F den Inhalt F^* ein mittelst der Relation (3) S. 384. Es wird dann:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2} (1 + 2e^2 - 6e^2 \sin^2 \beta_1) + \frac{K_1 - K}{12} \left(1 + \frac{m^2}{8 a_0^2}\right) \\ \qquad + \frac{(n^4 - a^4) + 3m^2(m^2 - a^2)}{1512 a_0^4} \\ \qquad - \frac{b^2 \cos^2 \mathfrak{A}_b + c^2 \cos^2 \mathfrak{A}_c - 4bc \cos \mathfrak{A}_b \cos \mathfrak{A}_c}{90 a_0^2} e^2 \cos^2 \beta_1 \\ + \left[\begin{array}{l} \frac{-19a^2 + b^2 + 13c^2}{a_0^3} b \cos \mathfrak{A}_b \\ + \frac{-19a^2 + 13b^2 + c^2}{a_0^3} c \cos \mathfrak{A}_c \end{array} \right] \frac{e^2}{720} \sin 2\beta_1 + Gl_6 \end{array} \right\}.$$

Hierin setzen wir noch nach S. 360 (2):

$$\frac{K_1 - K}{12}\,\frac{m^2}{8a_0^2} = -\frac{(5b\cos\mathfrak{A}_b + 5c\cos\mathfrak{A}_c)\,m^2}{a_0^3}\,\frac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + \cdots$$

sowie:

$$\begin{aligned} 1 + 2e^2 - 6e^2\sin^2\beta_1 &= K_1^2 - 2e^2\sin^2\beta_1 + \cdots \\ &= K^2 + (K_1^2 - K^2) - 2e^2\sin^2\beta_1 + \cdots \\ &= K^2 - \frac{4}{3}\,\frac{b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c}{a_0}\,e^2\sin 2\beta_1 - 2e^2\sin^2\beta_1 + \cdots. \end{aligned}$$

Damit wird erhalten:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{8}} + \varrho''\frac{F^*}{a_0^2}\left\{\begin{aligned} &\frac{m^2 - a^2}{60a_0^2}K^2 + \frac{K_1 - K}{12} + \frac{(n^4 - a^4) + 3m^2(m^2 - a^2)}{1512a_0^4} \\ &\qquad - \frac{m^2 - a^2}{30a_0^2}\,c^2\sin^2\beta_1 \\ &- \frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - 4bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{90a_0^2}\,e^2\cos^2\beta_1 \\ &- \begin{bmatrix} \dfrac{5a^2 + 3b^2 - 3c^2}{a_0^3}\,b\cos\mathfrak{A}_b \\ + \dfrac{5a^2 - 3b^2 + 3c^2}{a_0^3}\,c\cos\mathfrak{A}_c \end{bmatrix}\frac{e^2}{360}\sin 2\beta_1 + Gl_6. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Das 3. Glied in der Parenthese von (2) beträgt, wie der Vergleich mit (4) S. 384 zeigt, für $m = 0{,}1\,a_0$ sicher nur wenige Zehntausendstelsekunden.

Das 4. Glied ist ein Maximum für $a^2 = m^2(1 \pm \sqrt{0{,}5})$, weil für diesen Wert von a^2 nach S. 96 (6) und (7) das Produkt $F^*(m^2 - a^2)$ ein Maximum wird. Es beträgt darnach bei $m = 0{,}1\,a_0$ im Maximum:

$$\pm\, 0{,}0010''\,\sin^2\beta_1. \qquad (3)$$

Für das 5. Glied erhält man mit Rücksicht auf den vorigen Paragraphen sofort als Maximum $\frac{1}{15}$ des Ausdruckes (16) S. 386 d. i. bei $m = 0{,}1\,a_0$ der Betrag

$$\pm\, 0{,}0013''\,\cos^2\beta_1. \qquad (4)$$

Das 6. Glied wird ein Maximum für $b = c$ und $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ mit $a = \sqrt{\frac{6}{5}}\,m$, $b\cos\mathfrak{A}_b = \pm h_a = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}\,m$. Es wird für $m = 0{,}1\,a_0$ gleich

$$\pm\, 0{,}00015''\,\sin 2\beta_1. \qquad (5)$$

Aus dem Vorstehenden wird ersichtlich, dafs die Formel (1) völlig genügt, solange $m \leq 0{,}1\,a_0$ ist. Mit Rücksicht auf die Ergebnisse des vorigen Paragraphen kann man daher sagen:

Die Formeln (6) S. 359 *genügen in der Regel zur Berechnung eines geodätischen Dreiecks, so lange*

$$m < 0{,}1\,a_0 \text{ oder } 637^{km}. \tag{6}$$

Ebenso lange gelten die Formeln (3) ebenda, denn die entsprechenden Formeln im System (3) und (6) unterscheiden sich nur durch die Reduktion vom sphärischen Dreieck auf die Ebene, für welche Reduktio die S. 359 angewandte Formel nach S. 96 jedenfalls genügt.

Auch die Formeln (1) S. 362 gelten ebenso lange. Die Entwicklung daselbst zeigt nämlich, dafs es dabei wesentlich darauf ankommt, ob es zulässig ist, A mit A' zu vertauschen. Abgesehen hiervon handelt es sich nur um die Berechnung des sphärischen Excesses aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel und dafür reicht nach S. 99 die angewandte Formel vollkommen aus. Nun ist, wie man aus § 6 S. 362 leicht entnimmt, der Fehler in ε durch Vertauschung von A und A' angenähert gleich

$$-\,\varrho''\frac{F^*}{a_0^2}\,\frac{[K_1 - K]\,bc\cos A}{24\,a_0^2}. \tag{7}$$

Setzt man hierin für $K_1 - K$ den Ausdruck (2) S. 360, so folgt für (7) in ausreichender Annäherung:

$$\varrho''\,\frac{e^2\sin 2\beta_1}{36}\;\frac{F^*\,(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\,bc\cos(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c)}{a_0^5}.$$

Das Maximum dieses Ausdrucks kann nur mit $b = c$, $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ bestehen. Führt man aber $h_a = \pm\, b\cos\mathfrak{A}_b = \sqrt{\frac{3}{4}\,(2m^2 - a^2)}$ ein, so geht derselbe über in

$$\pm\,\varrho''\,\frac{e^2\sin 2\beta_1}{144}\;\frac{a h_a^2\,(4h_a^2 - a^2)}{a_0^5}. \tag{8}$$

Bei konstantem m wird dies für $a^2 = \frac{21 - \sqrt{201}}{20}\,m^2$ am gröfsten und zwar bei $m = 0{,}1\,a_0$ gleich

$$\pm\,0{,}00032''\sin 2\beta_1. \tag{9}$$

Dieser Betrag ist ganz unerheblich. Die Formeln (1) des § 6 S. 362 genügen also in der That ebensoweit wie die (6) des § 4 S. 359, vorausgesetzt, dafs a^2 genügend scharf berechnet wird. Berechnet man dies, wie in § 6 S. 362 (1) angenommen, so ist es nach S. 98 (4) näherungsweise mit dem Fehler behaftet:

$$-\,\frac{b^2c^2\sin^2 A}{3\,a_0^4}\ \text{ d. i. }\ -\,\frac{F^{*2}}{12\,a_0^4}. \tag{10}$$

Man sieht leicht, dafs der Einflufs hiervon auf ε und $A - A^*$ u. s. f. ein Maximum wird fürs gleichseitige Dreieck und zwar näherungsweise

$$\left.\begin{array}{l} \text{in } \varepsilon \text{ gleich } - \varrho'' \dfrac{F^{*3}}{96 a_0^6} \\ \text{in } A - A^* \text{ gleich } + \varrho'' \dfrac{F^{*3}}{1080 a_0^6} \end{array}\right\} \text{mit } F^* = \frac{1}{4} m^2 \sqrt{3}. \tag{11}$$

Diese Werte sind für $m = 0{,}1 a_0$ völlig unerheblich, denn sie betragen nur:

$$- 0{,}00017'' \text{ bezw. } + 0{,}00002''. \tag{12}$$

§ 15. **Zahlenbeispiel III.** Dem auf S. 200 als Beispiel behandelten Sehnendreieck mit Horizontalwinkeln entspricht nachstehendes von kürzesten Linien gebildete geodätische Dreieck:

		Azimut α.	Winkel.	Meter.
Berlin	K	239° 33′ 0,6889″	95° 19′ 5,1218″	log KW = 5,8907956.989
	W	334 52 5,8107		
Königsberg	W	23 11 41,5017	42 4 27,8633	log WB = 5,7182160.562
	B	65 16 9,3650		
Wien	B	157 10 7,2216	42 48 6,1935	log BK = 5,7242591.353
	K	199 58 13,4151		
		$180^0 + \varepsilon$ =	180° 11′ 39,1786″	

	Geographische Breite.	Reduzierte Breite.
Berlin	$B_1 = 52^0\ 30'\ 16{,}7''$	$\beta_1 = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''$
Königsberg	$B_2 = 54\ \ 42\ \ 50{,}6$	$\beta_2 = 54\ \ 37\ \ 24{,}75639$
Wien	$B_3 = 48\ \ 12\ \ 35{,}5$	$\beta_3 = 48\ \ 6\ \ 52{,}27604$

Die Azimute und Entfernungen sind aus den Angaben von S. 200 in derselben Weise abgeleitet, wie für die Linie BK allein es S. 339, 182 und 341 geschehen ist. Für das Verfahren ergab sich dabei eine Kontrole durch direkte Behandlung der Linie BK S. 256 u. ff.

Werden die Punkte B, K, W mit den Indices 1, 2, 3 ausgezeichnet, so ist zur Reduktion der Azimute nach Formel (5) S. 337:

$$a_{1.3} - \alpha_{1.3} = [13{,}4990] \frac{\cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.3}}{\varrho_{\alpha_1} \varrho_{n_1}} + [18{,}616] \frac{\sin 2B_1 \sin \alpha_{1.3}}{a_0 \varrho_\alpha \varrho_{n_1}},$$

$$a_{3.1} - \alpha_{3.1} = [13{,}4990] \frac{\cos^2 B_3 \sin 2\alpha_{3.1}}{\varrho_{\alpha_3} \varrho_{n_3}} + [18{,}616] \frac{\sin 2B_3 \sin \alpha_{3.1}}{a_0 \varrho_{\alpha_3} \varrho_{n_3}},$$

$\log \varrho_{\alpha_1} = 6{,}8047$ $\log \varrho_{\alpha_3} = 6{,}8044$ $\log \varrho_{n_1} = 6{,}8056$ $\log \varrho_{n_3}' = 6{,}8055$

und hiermit:

$$a_{1.3} - \alpha_{1.3} = -0{,}2205 - 0{,}0065 = -0{,}2270''$$

$$a_{3.1} - \alpha_{3.1} = -0{,}2460 + 0{,}0061 = -0{,}2399\ .$$

Ferner hat man:

$$a_{2.3} - \alpha_{2.3} = [13{,}8442] \frac{\cos^2 B_2 \sin 2\alpha_{2.3}}{\varrho_{\alpha_2} \varrho_{n_2}} + [19{,}133] \frac{\sin 2B_2 \sin \alpha_{2.3}}{a_0 \varrho_{\alpha_2} \varrho_{n_2}},$$

$$a_{3.2} - \alpha_{3.2} = [13{,}8442] \frac{\cos^2 B_3 \sin 2\alpha_{3.2}}{\varrho_{\alpha_3} \varrho_{n_3}} + [19{,}133] \frac{\sin 2B_3 \sin \alpha_{3.2}}{a_0 \varrho_{\alpha_3} \varrho_{n_3}},$$

$\log \varrho_{\alpha_2} = 6{,}8048$ $\log \varrho_{\alpha_3} = 6{,}8043$ $\log \varrho_{n_2} = 6{,}8056$ $\log \varrho_{n_3} = 6{,}8055$

und hiermit:

$$a_{2.3} - \alpha_{2.3} = +0{,}4142 + 0{,}0194 = +0{,}4336''$$

$$a_{3.2} - \alpha_{3.2} = +0{,}4891 - 0{,}0177 = +0{,}4714\ .$$

Zur Probe wurden die Gleichungen gerechnet:

$$\cos \beta_1 \sin \alpha_{1.3} = -\cos \beta_3 \sin \alpha_{3.1}$$

$$\cos \beta_2 \sin \alpha_{2.3} = -\cos \beta_3 \sin \alpha_{3.2}\,.$$

Es fand sich bezw.:

$\log \cos \beta_1 = 9{,}7853155.518 - 10$	$\log \cos \beta_3 = 9{,}8245448.818 - 10$
$\log \sin \alpha_{1.3} = 9{,}6280829.617_n - 10$	$\log \sin \alpha_{3.1} = 9{,}5888536.313 - 10$
Summa $= 9{,}4133985.135_n - 10$	Summa $= 9{,}4133985.131 - 10$
$\log \cos \beta_2 = 9{,}7626381.918 - 10$	$\log \cos \beta_3 = 9{,}8245448.818 - 10$
$\log \sin \alpha_{2.3} = 9{,}5953413.007 - 10$	$\log \sin \alpha_{3.2} = 9{,}5334346.092_n - 10$
Summa $= 9{,}3579794.925 - 10$	Summa $= 9{,}3579794.910_n - 10.$

Die Differenzen deuten auf Ungenauigkeiten der Azimute von einigen wenigen Einheiten der 4. Decimale.

Für die Reduktion der Sehne BW diente zunächst Formel (11) S. 181. Zu dem mittleren Azimut 156° 1′ 6″ in der mittleren Breite 50° 21′ 26″ gehört $\log \varrho = 6{,}8045141$. Hiermit wird für die kürzeste Distanz BW:

$$\log s = 5{,}7180944.366 + 1215.440 + .748$$
$$= 5{,}7182160.554.$$

Rechnet man dagegen mit dem Mittel der $\log \varrho$ für $52^0\,30'\,17''$ Breite und $154^0\,52'\,6''$ Azimut einerseits, sowie $48^0\,12'\,36''$ Breite und $157^0\,10'\,7''$ Azimut andrerseits, welche nach strenger Rechnung bezw. betragen:

$$\left.\begin{array}{l}6{,}8046724\\6{,}8043503\end{array}\right\}\text{Mittel} = 6{,}8045113,$$

so wird nach den Formeln (10) und (11) S. 181 erhalten für BW:

$$\begin{array}{lrl}\log s = & 5{,}7180944.366 & \\ + & 1215.456 & \text{nach (11)} \\ + & 0.748 & \\ - & 0.008 & \text{nach (10)} \\ \hline \log s = & 5{,}7182160.562. & \end{array}$$

Für KW findet sich zu der mittleren geographischen Breite $51^0\,27'\,44''$ und dem mittleren Azimut $21^0\,34'\,57''$ in strenger Rechnung

$$\log \varrho = 6{,}8055536$$

und hieraus nach Formel (11) S. 181:

$$\log s = 5{,}8905264.742 + 2688.558 + 3.662$$
$$= 5{,}8907956.962$$

Schärfer ist die folgende Berechnung von $\log s$, bei welcher die Glieder 6. Ordnung in $\log s$ vollständig berücksichtigt werden.

Es ist $\log \varrho$ für $48^0\,12'\,36''$ Breite und $19^0\,58'\,13''$ Azimut, sowie $54^0\,42'\,51''$ Breite und $23^0\,11'\,42''$ Azimut nach strenger Rechnung bezw.:

$$\left.\begin{array}{l}6{,}8043073\\6{,}8047889\end{array}\right\}\text{Mittel} = 6{,}8045481.$$

Hiermit folgt nach S. 181 (10) und (11) unter Beifügung eines aus der 1. Formel (4) S. 30 leicht zu entnehmenden Gliedes:

$$\left\{\begin{array}{rr} \log k = & 5{,}8905264.742 \\ + \frac{1}{6} M \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^2 = + & 2688.623 \\ + \frac{11}{180} M \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^4 = + & 3.662 \\ + \frac{191}{5670} M \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^6 = + & 0.007 \\ + M \frac{e^2}{40} \frac{k^4}{\varrho^4} (\cos^2 B \cos^2 a - \sin^2 B) = - & 0.045 \end{array}\right.$$

$$\text{Für } KW: \quad \log s = 5{,}8907956.989.$$

Für die 3 Ecken des Dreiecks ergiebt sich nunmehr behufs Anwendung der Formeln (1) S. 362:

$$\left.\begin{array}{l} K_1 = 0{,}9982777 \\ K_2 = 0{,}9977849 \\ K_3 = 0{,}9992626 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K = 0{,}9984417 \\ \log K = 9{,}9993227-10 \end{array}$$

$$\log \frac{\varrho'' K}{2 a_0^2} = 1{,}4034309-10 \qquad \log \frac{MK}{24 a_0^2} = 4{,}6476-20$$

$\log a = 5{,}8907957$	$A = 95^\circ\, 19'\ 5{,}12''$	$\log \sin A = 9{,}9981266-10$
$\log b = 5{,}7182161$	$B = 42\ \ 4\ 27{,}86$	$\log \sin B = 9{,}8261364-10$
$\log c = 5{,}7242591$	$C = 42\ 48\ \ 6{,}19$	$\log \sin C = 9{,}8321660-10$

$a^2 = 10^{10}.\ 60{,}477$	$4a^2 - 3m^2 = 126{,}026 \,.\, 10^{10} = [12{,}1005\ ]$
$b^2 = 10^{10}.\ 27{,}317$	$4b^2 - 3m^2 = -6{,}614 \,.\, 10^{10} = [10{,}8205_n]$
$c^2 = 10^{10}.\ 28{,}088$	$4c^2 - 3m^2 = -3{,}530 \,.\, 10^{10} = [10{,}5478_n]$
$3m^2 = 10^{10}.\ 115{,}882$	Probe: Sa. $= 115{,}882 \,.\, 10^{10}$.

Damit wird erhalten aus

A, b und c:	$\log \varepsilon = 2{,}8440327 + 5598 =$	$2{,}8445925$
B, a und c:	$2{,}8446221 - 294 =$	5927
C, a und b:	$2{,}8446087 - 157 =$	5930

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon = 699{,}1856'' \\ 1860 \\ 1864 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{im Mittel} \\ 11'\ 39{,}1860'' \end{array}$$

Dieser Wert ist etwas zu grofs und zwar um 0'',0074.

Es ist jetzt weiter für $A - A^*$, u. s. f., nach den Formeln (1) S. 362:

$\log (K_1 - K) = 6{,}2151_n - 10$	$\log (m^2 - a^2) = 11{,}3395_n$
$\log (K_2 - K) = 6{,}8174_n - 10$	$\log (m^2 - b^2) = 11{,}0535$
$\log (K_3 - K) = 6{,}9143\ -10$	$\log (m^2 - c^2) = 11{,}0229$
$\log \frac{\varepsilon}{12 K} = 1{,}7661\ -10$	$\log \frac{\varepsilon K}{60 a_0^2} = 7{,}4565-20$

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 0{,}0096'' - 0{,}0625'' = \frac{\varepsilon}{3} - 0{,}0721''$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} - 0{,}0383 + 0{,}0324 = \frac{\varepsilon}{3} - 0{,}0059$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 0{,}0479 + 0{,}0301 = \frac{\varepsilon}{3} + 0{,}0780\,.$$

Mit $\varepsilon = 699{,}1786$ ergeben sich hieraus die Werte:

$$\begin{cases} A^* = & 95^0\ 15'\ 12{,}1343'' \\ B^* = & 42\quad 0\ 34{,}8097 \\ C^* = & 42\ 44\ 13{,}0560 \end{cases}$$
$$\text{Summa} = 180\ 00\ 00{,}0000\,.$$

Die Sinus dieser Winkel müssen sich wie die Seiten a, b, c verhalten. In der That hat man:

$\log a = 5{,}8907956.989$	$\log b = 5{,}7182160.562$	$\log c = 5{,}7242591.353$
$\log \sin A^* = 9{,}9981719.226$	$\log \sin B^* = 9{,}8255922.810$	$\log \sin C^* = 9{,}8316353.602$
$5{,}8926237.763$	$5{,}8926237.752$	$5{,}8926237.751$

Die Übereinstimmung dürfte genügen.

Vorstehende Ergebnisse benutzen wir endlich noch zu einer strengen Berechnung des Excesses nach *Weingartens* Formel (1) S. 371.

Wir haben vorerst mittelst der Winkel des ebenen Dreiecks $\log F^* = 11{,}4406471.1$ und hieraus mittelst Formel (16) S. 367:

$$\log F = 11{,}4406471.1 + 5147.7 + 3.5 = 11{,}4411622\,.$$

Jetzt wird:

$$\varrho'' \frac{F}{a_0^2} K = [2{,}8445931] = 699{,}1866''\,.$$

Es ist weiter:

$$\sin B_1 = 0{,}7934 \quad \sin B_2 = 0{,}8163 \quad \sin B_3 = 0{,}7456$$

und hiermit:

$$\varrho'' \frac{F}{a_0^2} \frac{c^2}{6} \begin{Bmatrix} (\sin B_1 - \sin B_2)^2 + (\sin B_2 - \sin B_3)^2 \\ + (\sin B_3 - \sin B_1)^2 \end{Bmatrix} = + 0{,}0061''$$

$$- \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \frac{c^2}{12} \left[\frac{b^2+c^2}{a_0^2} \sin^2 B_1 + \frac{a^2+c^2}{a_0^2} \sin^2 B_2 + \frac{a^2+b^2}{a_0^2} \sin^2 B_3 \right] = -0{,}0136\,.$$

Dies giebt zusammen $-0{,}0075''$. Man hat daher genauer:

$$\varepsilon = 699{,}1791''\,,$$

welcher Wert bis auf $0{,}0005''$ mit demjenigen übereinstimmt, der aus den Horizontalwinkeln abgeleitet worden ist.

Auf $A - A^*$ u. s. f. haben die höheren Glieder, um welche sich

die Formeln S. 371 u. ff. von denen S. 362 unterscheiden, nur einen Einflufs von durchschnittlich 0,0001″.

§ 16. Bessels Formeln zur Reduktion eines geodätischen Dreiecks. Bereits im Jahre 1822 hat *Bessel* in den Astronom. Nachr. Bd. 1 Nr. 6 S. 85 (*Abhandlungen* Bd. 3 S. 3) eine Formel zur Reduktion der Winkel eines geodätischen Dreiecks auf ein sphärisches mit denselben Seiten angegeben, ohne jedoch ihre Entwicklung zu zeigen. Die Formel enthält alle Glieder, welche von e^2 abhängen, vollständig, vernachlässigt aber die höheren Potenzen von e^2. Sie kann dadurch erhalten werden, dafs man die Formeln des § 9 S. 232 u. ff. auf Glieder mit e^2 abkürzt und alsdann auf die 3 Seiten eines geodätischen Dreiecks anwendet. (Die Entwicklung hat Ähnlichkeit mit derjenigen des § 4 S. 329 u. ff.; in den Endresultaten treten auch ähnliche Parenthesen-Ausdrücke auf wie in (10) S. 332.)

Hansen hat die Entwicklung in seinen *Geodätischen Untersuchungen* S. 116—136 durchgeführt (vergl. auch S. 104) und schliefslich eine interessante Abkürzung der Ausdrücke für mäfsig grofse Dreiecksseiten gegeben. Darnach hat man zur Reduktion der Winkel A, B, C im geodätischen Dreieck auf die Winkel A'', B'', C'' des sphärischen Dreiecks mit denselben Seiten die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} A - A'' &= \frac{1}{12} e^2 \frac{F}{a_0^2} (2\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3) + Gl_6 \\ B - B'' &= \frac{1}{12} e^2 \frac{F}{a_0^2} (\cos 2\beta_1 + 2\cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3) + Gl_6 \\ C - C'' &= \frac{1}{12} e^2 \frac{F}{a_0^2} (\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + 2\cos 2\beta_3) + Gl_6 . \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hierbei ist als Kugelradius der Äquatorialradius a_0 vorausgesetzt. Berücksichtigt man dies, sowie die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= 1 + e^2 \cos 2\beta_1 + Gl_4 \\ K_2 &= 1 + e^2 \cos 2\beta_2 + Gl_4 \\ K_3 &= 1 + e^2 \cos 2\beta_3 + Gl_4 , \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

so kann man leicht von den Formeln (1) zu den Formeln (3) S. 358 gelangen, wie folgt.

Letztere setzen als Kugelradius $a_0 : \sqrt{K}$ voraus, K das arithmetische Mittel von K_1, K_2 und K_3. Geht man aber vom sphärischen Dreieck auf der Kugel mit dem Radius a_0 erst zum ebenen Dreieck über und dann von hieraus auf die Kugel vom Radius $a_0 : \sqrt{K}$, so ist unter Beachtung der Formeln S. 92:

$$A'' - A' = \frac{F^*}{3a_0^2}(1-K) + Gl_6$$
$$= -\frac{1}{9}e^2\frac{F}{a_0^2}(\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3) + Gl_6 \,.$$

Addiert man diese Gleichung zur 1. Gleichung (1), so folgt ein Ausdruck für $A - A'$, woraus durch Analogie auch $B - B'$ und $C - C'$ hervorgeht. Das Resultat ist darnach:

$$\left.\begin{aligned} A - A' &= \frac{1}{12}e^2\frac{F}{a_0^2}\left(\cos 2\beta_1 - \frac{\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3}{3}\right) + Gl_6 \\ B - B' &= \frac{1}{12}e^2\frac{F}{a_0^2}\left(\cos 2\beta_2 - \frac{\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3}{3}\right) + Gl_6 \\ C - C' &= \frac{1}{12}e^2\frac{F}{a_0^2}\left(\cos 2\beta_3 - \frac{\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3}{3}\right) + Gl_6 \,, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

welches Formelsystem nun augenscheinlich mit (3) auf S. 358 übereinstimmt.

Es läfst sich nicht verkennen, dafs die im Vorstehenden angedeutete Entwicklung den Vorteil vor der S. 348 u. ff. gegebenen hat, weniger Vorbereitungen zu erfordern. Sie wird sich auch namentlich (im Vergleich zu *Hansen* a. a. O.) noch sehr vereinfachen, wenn von vornherein nur mäfsig grofse Werte der Dreiecksseiten vorausgesetzt werden. Dagegen scheint es sehr schwierig zu sein, in diese Entwicklung auch höhere Potenzen von e^2 aufzunehmen, was bei jener keineswegs der Fall ist.

Hansen benutzt auf S. 210 bis 218 seiner Geodätischen Untersuchungen die allgemeinen *Bessel*schen Formeln noch zur Näherungsauflösung mehrerer Aufgaben, die sich auf eine durch 3 Stücke bestimmte geodätische Linie beziehen, welche dabei eine beträchtliche Länge haben kann. Insbesondere betrachtet er den Fall gegebener Breiten der Endpunkte und gegebener linearer Länge der Linie. Diese selten auftretende Aufgabe kann selbstverständlich auch durch successive Annäherung mittelst der hier gegebenen Formeln in ähnlicher Weise wie die Aufgabe, eine geodätische Linie aus der geographischen Lage ihrer Endpunkte zu bestimmen, gelöst werden. Auch *Hansens* Formeln sind, wie bemerkt, keine strengen und erfordern eventuell ebenfalls eine weitere Annäherungsrechnung.

§ 17. Andraes Entwicklungen. Dreiecke aus Vertikalschnitten u. s. f.

Schon S. 94 ist die Art und Weise erörtert worden, wie *Andrae* im 1. Bde. der *Dänischen Gradmessung* bei der Entwicklung von *Legendres* Theorem vorgeht. Für das Ellipsoid knüpft er (S. 187—200) seine Betrachtungen zunächst an die (als mit der geodätischen Linie gleichlang zu setzenden) Vertikalschnitte und die zwischen denselben liegenden Horizontalwinkel an und zeigt in der bereits angedeuteten Weise (bei *Zachariae* a. a. O. S. 129—132),

welche Reduktionen an den Horizontalwinkeln angebracht werden müssen, um sie als Winkel eines ebenen Dreiecks betrachten zu können, dessen Seiten den Längen der Vertikalschnitte (also auch der geodätischen Linien) zwischen den Endpunkten entsprechen.

Um zu diesen ein besonderes Interesse bietenden Formeln zu gelangen, drehen wir hier den Gang um. Denn die Reduktionsformeln für das geodätische Dreieck haben wir bereits. Wir brauchen in dieselben nur anstatt der Winkel zwischen den geodätischen Linien die Horizontalwinkel (d. h. die Winkel zwischen den Vertikalschnitten) einzuführen und haben dann die Formeln für die von den Vertikalschnitten gebildete Figur, weil eben in den linearen Längen der Vertikalschnitte und der geodätischen Linien kein Unterschied ist, so lange man sich auf mäfsig grofse Entfernungen beschränkt.

Nennen wir die Horizontalwinkel A_0, B_0 und C_0, die Winkel zwischen den geodätischen Linien aber A, B und C, und beschränken uns auf die gröfsten Glieder in den Differenzen $A - A_0$, u. s. f., dann ist mit Rücksicht auf Formel (11) S. 332, weil $A = \alpha_{1.3} - \alpha_{1.2}$, $A_0 = a_{1.3} - a_{1.2}$ ist:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{A - A_0} &= \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_1}{12 a_0^2} (c^2 \sin 2a_{1.2} - b^2 \sin 2a_{1.3}) + Gl_5 \\
\underset{\text{in Sek.}}{B - B_0} &= \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_2}{12 a_0^2} (a^2 \sin 2a_{2.3} - c^2 \sin 2a_{2.1}) + Gl_5 \\
\underset{\text{in Sek.}}{C - C_0} &= \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_3}{12 a_0^2} (b^2 \sin 2a_{3.1} - a^2 \sin 2a_{3.2}) + Gl_5 .
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Verbinden wir dies mit den Formeln (6) S. 359, wobei wir aber auch nur bis zu Gliedern 5. Ordnung gehen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{A_0 - A^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \rho'' \frac{F^* K^2 (m^2 - a^2)}{60 a_0^4} \\
&\quad + \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_1}{12 a_0^2} (b^2 \sin 2a_{1.3} - c^2 \sin 2a_{1.2}) + Gl_5 \\
\underset{\text{in Sek.}}{B_0 - B^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \rho'' \frac{F^* K^2 (m^2 - b^2)}{60 a_0^4} \\
&\quad + \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_2}{12 a_0^2} (c^2 \sin 2a_{2.1} - a^2 \sin 2a_{2.3}) + Gl_5 \\
\underset{\text{in Sek.}}{C_0 - C^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \rho'' \frac{F^* K^2 (m^2 - c^2)}{60 a_0^4} \\
&\quad + \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_3}{12 a_0^2} (a^2 \sin 2a_{3.2} - b^2 \sin 2a_{3.1}) + Gl_5 .
\end{aligned}\right\} (2)$$

Aus diesen Formeln ersieht man sofort, dafs in allen Fällen, wo überhaupt solche Entfernungen in betracht kommen, für welche

geodätisches und astronomisches Azimut merklich von einander verschieden sind, es immer weit einfacher ist, mit der geodätischen Linie, als mit dem Vertikalschnitt zu rechnen.

Nach *Andraes* Auseinandersetzung ist überhaupt der Vorteil der Einführung der geodätischen Linie der, daſs die Berechnung der Dreiecksnetze möglichst einfach wird. In der That zeigt die Vergleichung der Formeln (2) mit den (6) S. 359, daſs von allen möglichen als gleichlang zu betrachtenden (und auf der Kugel zusammenfallenden) Verbindungslinien *die geodätische Linie die einfachsten Reduktionsformeln giebt.* Die Rechnung ist eben, wenn man nur Glieder bis zur 4. Ordnung incl. berücksichtigt, fürs einzelne geodätische Dreieck auf dem Ellipsoid gerade so einfach wie auf der Kugel. Sie wird erst durch Herbeiziehung von Gliedern 5. Ordnung etwas komplizierter, aber doch in nur geringem Maſse.

Insoweit es sich nun um meſsbare Dreiecke handelt, ist allerdings ein Vorzug der geodätischen Verbindungslinie nicht notwendig vorhanden. Da nämlich die *beobachteten* Azimute astronomische Azimute sind, die Horizontalwinkel aber Differenzen solcher, so ist einleuchtend, daſs letztere bei Anwendung der geodätischen Linie zunächst auf geodätische Azimute reduziert werden müssen. Hierbei kommen aber gerade wieder die in den Formeln (1) steckenden Glieder zur Geltung. Dieselben sind jedoch lediglich geringfügige Gröſsen, die als gegen die Beobachtungsfehler ganz zurücktretend vielfach weggelassen werden. Werden aber diese Korrektionen angebracht, so zeigt obige Auseinandersetzung, daſs sie auch bei der Wahl irgend einer andern Verbindungslinie nicht zu vermeiden sind. Es müssen sogar, wenn diese Linien in den Dreieckspunkten nicht wieder gerade die Horizontalwinkel A_0, B_0, C_0 mit einander einschlieſsen, zu den rechten Seiten der Formeln (2) noch weitere Korrektionsglieder treten.

Der Vorteil der geodätischen Linie für die Dreiecksberechnung geht aber evident hervor bei Betrachtung der Berechnung von *Polarkoordinaten.* Hier hat man es, wenn einmal die beobachteten Richtungen korrigiert sind, für alle durch Rechnung abgeleiteten nur mit geodätischen Azimuten zu thun. Hier treten also die (verhältnismäſsig) einfachen Formeln (6) S. 359 in sehr günstigen Gegensatz zu obigen Formeln (2) oder noch komplizierteren Formeln.

Ebenso zeigt sich hier die Rechnung mit der geodätischen Linie derjenigen mit der Sehne weit überlegen (vergl. S. 197 und 211), in Bezug auf diese aber auch schon bei meſsbaren Dreiecken, weil die Sehnenrechnung die von e^2 abhängigen Glieder 4. Ordnung dreimal so groſs hat, als die Rechnung mit der geodätischen Linie (vergl. die Formeln (2) mit den (1) S. 197).

Von verschiedenen ins Auge gefafsten Hilfslinien ist besonders die *Feldlinie* untersucht worden, von *Andrae* a. a. O. Bd. 1 S. 179 und von *Bremiker* a. a. O. S. 59 u. ff. Die Feldlinie ist durch die Eigenschaft definiert, dafs in jedem Punkt der Horizontalwinkel nach den beiden Endpunkten 180° beträgt, d. h. dafs die Normale der Fläche in einer Ebene durch diesen Punkt und die beiden Endpunkte liegt. Sie schliefst sich daher in P_1 dem Vertikalschnitt nach P_2 und in P_2 dem nach P_1 tangential an. Wenn aber *Bremiker* S. 64 findet, dafs jene Ebene allgemein Tangentialebene der Kurve sei, so ist das ein Irrtum und beruht nur auf einem Scheinbeweis, wie die genaue Rechnung und der Umstand zeigen, dafs alsdann die Kurve eine ebene Kurve wäre und dafs ihre Ebene mit den Vertikalebenen $P_1 P_2$ und $P_2 P_1$ zusammenfallen müfste. In unseren beiden Referaten, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* von *Schlömilch* 1870 Litt.-Ztg. S. 29 und *Astronom. Vierteljahrsschrift* Bd. 13 S. 73 ist demgemäfs an der entsprechenden Stelle statt *tangierende Normalebene (Vertikalebene)* nur einfach *Normalebene* zu lesen. (Das Versehen am letztgenannten Orte beruht nur auf einem Schreibfehler, da wir schon gleich nach dem Erscheinen des erstgenannten Referats bei einer ausführlichen Untersuchung der Feldlinie sofort auf den Scheinbeweis *Bremikers* aufmerksam geworden waren. Diese Untersuchung wurde nicht publiziert, da der Feldlinie vom geodätischen Standpunkte aus so wenig Interesse gebührt, dafs andere Arbeiten bald ihrer vergessen liefsen.)

Man vergleiche auch über die Feldlinie das Hauptwerk der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 237.

§ 18. **Berechnung einer Dreieckskette. Polarkoordinaten.** Die beobachteten Azimute und ihre Differenzen, die Horizontalwinkel, sind zunächst wegen der Unterschiede der astronomischen und geodätischen Azimute nach der auf ihr 1. Glied reduzierten Formel (11) S. 332:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\alpha - a} = -\frac{1}{12}\varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \cos^2 B \sin 2a + \cdots \tag{1}$$

zu korrigieren, wobei s die Entfernung ist und B die geographische Breite des Standpunktes, α das geodätische, a das astronomische Azimut bezeichnet. Im übrigen sind die Formeln (6) S. 359 anzuwenden.

Vielfach wird nicht nur die Reduktion der Azimute und Horizontalwinkel unterlassen, sondern auch die Berechnung der Dreiecksseiten und Polarkoordinaten rein sphärisch mit Zugrundelegung eines mittleren Krümmungsmafses des *ganzen* trigonometrischen Netzes ausgeführt. *Bessel* nahm bei Berechnung der ostpreufsischen Gradmessung als Kugelradius sogar den Äquatorialradius des Ellipsoids und betrachtete doch schliefslich die Ergebnisse der sphärischen Rechnung als für die geodätischen Linien zwischen den Netzpunkten gültig.

Die Frage nach den Fehlern, die hierbei begangen werden, ist

eine dreifache. Sie betrifft 1. den Einflufs mangelnder Reduktion der gemessenen Azimute und Winkel, 2. den Einflufs des Krümmungsmafses auf die nach dem Sinussatz berechneten Dreiecksseiten und die ausgeglichenen Winkel und 3. den Einflufs der sphärischen Rechnung bei Ausmittelung der Polarkoordinaten.

Die Reduktion der Azimute nach (1) beträgt für $s = 0{,}01\,a_0$ d. i. 64^{km} im Maximum rund $\pm 0{,}01''$. Da nun s in direkt beobachteten Dreiecksketten jenen Betrag in der Regel nur ausnahmsweise etwas überschreitet, so kann man wohl die Reduktion als weit innerhalb der Beobachtungsfehler liegend vernachlässigen.

Günstig ist diesem Verfahren, dafs abgesehen von Gliedern 5. Ordnung, der Überschufs der Summe der 3 Horizontalwinkel über 180^0 den Excefs des geodätischen Dreiecks giebt, wie die Addition der Gleichungen (1) S. 398 zeigt, wonach

$$A_0 + B_0 + C_0 = A + B + C + Gl_5\,. \tag{2}$$

Es wird daher bei der Ausgleichung einer einfachen Dreieckskette ohne Reduktion der Azimute dasselbe System von Verbesserungen erhalten, wie in dem Falle, dafs die Azimute und Horizontalwinkel korrigiert sind.

Die vernachlässigten Reduktionen $\alpha - a$ bleiben aber den einzelnen Richtungen als Fehler rein anhaften, und es läfst sich deren Einflufs auf die Seitenberechnung und Azimutübertragung somit für eine geradgestreckte Kette von der Form der Fig. 13 S. 198 leicht ersehen.

Da $\alpha - a$ von $\sin 2a$ abhängt, so werden Winkel mit bezw. entgegengesetzt gerichteten und gleich langen Schenkeln gleichviel fehlerhaft, mithin ist der Einflufs der Vernachlässigungen auf die Berechnung der Seiten a', a'', a''' u. s. f. (welche man sich in Fig. 13 an Stelle der Sehnen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'''$ u. s. f. eingesetzt zu denken hat) um so mehr verschwindend, je genauer sich die Dreiecke paarweise zu Parallelogrammen gruppieren (vergl. die Betrachtung S. 198 u.). Dagegen werden alle Seiten c und d um ungefähr gleiche Beträge irrig erhalten und somit auch die Gesamtlänge etwas fehlerhaft. Jedoch wächst der Fehler nur einfach proportional der Länge, weil in den Seiten a', a'' u. s. f., wie bemerkt, keine Fehleranhäufung eintritt.

Bedenkt man nun noch, dafs die gestreckten Winkel an den Langseiten der Kette von den $\alpha - a$ nicht erheblich beeinflufst werden, so bleibt als Gesamteinflufs nur eine geringe Drehung der ganzen Kette infolge des Fehlers im Azimut der Seiten c und d, sowie eine geringe Änderung der Gesamtlänge der Kette.

Erstere wird $0{,}''01$ nicht wesentlich übersteigen und letztere bei

wohlgeformten Dreiecken erst in der 8. Decimalstelle des Logarithmus merkbar, wie man leicht durch Bildung des $\log \frac{c}{a}$ mittelst der um etwa 0,01″ fehlerhaft angenommenen Gegenwinkel findet.

Man kann noch bemerken, dafs auch diejenigen Seitengleichungen, welche einer doppelten Verbindung von je zwei der Seiten a, a', a'' · · entsprechen, von der Vernachlässigung der Azimutkorrektionen wenig oder gar nicht beeinflufst werden. Sind nämlich z. B. a und a', Fig. 13 S. 198, durch ein Viereck mit beiden Diagonalen verbunden und denkt man sich das Verhältnis $\frac{a}{a'}$ mit Hilfe beider Diagonalen hergestellt und damit die Seitengleichung gebildet, so geht natürlich in diese ebensowenig jene Vernachlässigung ein, wie in die beiden Werte des Verhältnisses $\frac{a}{a'}$. Es ist klar, dafs auch jede andere Art der Aufstellung der Seitengleichung in jenem Viereck frei von der Vernachlässigung sein wird, wenn die obige es ist, weil man aus dieser und den Dreieckswinkelgleichungen, die auch frei von der Vernachlässigung sind, jede andere Form der Seitengleichung herstellen kann.

Wenn nach dem Vorhergehenden die Vernachlässigung der Reduktionen der gemessenen astronomischen Azimute und Azimutalunterschiede auf geodätische unter günstigen Umständen nur geringe Fehler giebt, so ist doch immerhin bei der grofsen Leichtigkeit, diese Reduktionen anzubringen, nicht recht einzusehen, warum sie vernachlässigt werden, zumal in Fällen, wo einzelne lange Diagonalen vorkommen, der Einflufs der Vernachlässigungen ohne Zweifel beträchtlich das oben angegebene Mafs überschreiten kann.

Vielleicht würde man dieser Reduktion mehr Aufmerksamkeit schenken, wenn sie in den Excessen merkbar würde, oder wenn bei der Berechnung geographischer Breiten und Längen mittelst der Ergebnisse der Triangulierung aus ihrer Vernachlässigung Widersprüche zwischen den Rechnungsresultaten, welche auf verschiedenen Wegen durch das trigonometrische Netz hindurch erhalten werden, entstünden.

Dieses letztere ist aber ebenso wenig der Fall wie das erstere.

Indem man die astronomischen Azimutaldifferenzen für geodätische nimmt, begeht man nämlich Fehler, die wie Beobachtungsfehler nur bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen merkbar werden können (hier jedoch auch oft nicht merkbar werden, wie oben gezeigt), die aber jedenfalls *nach* erfolgter Ausgleichung nicht mehr zu Widersprüchen führen.

Dieses Verhalten ist wesentlich verschieden von dem bei der Rechnung mit Sehnen. Vernachlässigt man hier die entsprechenden Glieder 4. Ordnung, so giebt das einen Fehler der mathematischen

Bedingung, d. h. es wird nicht korrekt ausgeglichen, und es mufs daher bei der Berechnung geographischer Positionen entlang verschiedener Seitenzüge sich in den Ergebnissen für gemeinsame Punkte eine angemessene kleine Differenz zeigen.

Ch. H. Kummell hat 1877 in den *Astronom. Nachr.* Bd. 89 Nr. 2116 S. 49 die übliche Berechnung der Dreiecksnetze nach dem einfachen *Legendre*schen Satze einer Kritik unterzogen. Er wendet dazu die Hypothese an, dafs man jedes Sehnendreieck des Ellipsoids wie ein Sehnendreieck einer Kugel, deren Radius dem mittleren Krümmungsmafs der 3 Ecken entspricht, berechnen könne. Unsere Untersuchungen zeigen aber die Unzulässigkeit dieser Hypothese.

§ 19. Fortsetzung. Sphärische Berechnung einer Kette. Wird anstatt des speziellen Krümmungsmafses K für jedes einzelne Dreieck ein gemeinsamer Wert $K_m = K + \delta K$ im ganzen Netz angewandt, so vergröfsert sich ε um $\delta\varepsilon$ nach Mafsgabe der Gleichung:

$$\delta\varepsilon = \varepsilon \frac{\delta K}{K}, \tag{1}$$

wie die Differentiation der Gleichung für ε S. 359 zeigt. Entspricht nun K der geographischen Breite B und $K_m = K + \delta K$ der mittleren Breite des Netzes $B_m = B + \delta B$, so wird, weil allgemein $K = (1 - e^2 \sin^2 B)^2 : (1 - e^2)$ ist:

$$\frac{\delta K}{K_m} = - \frac{2e^2 \sin 2B_m}{1 - e^2 \sin^2 B_m} \delta B. \tag{2}$$

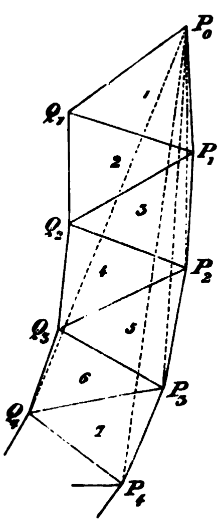


Fig. 36.

Hierbei ist δB als klein vorausgesetzt, wie es der Fall sein wird, wenn K_m *ein mittleres Krümmungsmafs des Netzes* ist. Man kann nun offenbar in hinreichender Annäherung setzen:

$$\delta\varepsilon = -\varepsilon \,.\, 2e^2 \sin 2B_m \delta B + \cdots. \tag{3}$$

Für $\delta B = 0{,}05$ (als Arcus genommen, wie Formel (3) verlangt) und für eine mittlere Breite $B_m = 45^0$ sowie für $\varepsilon = 10''$ wird $\delta\varepsilon$ gleich 0,''007. Jener Betrag von ε gehört im Maximum zu einer mittleren Seitenlänge $m = 0{,}01\,a_0$ ca.; $\delta B = 0{,}05$ aber tritt erst an den äufsersten Enden einer meridional gestreckten 637^{km} langen Kette auf. Man erkennt hieraus, dafs es in der Regel recht wohl zulässig sein wird, mit einem mittleren Krümmungsmafs des Netzes zu rechnen.

Ist jedoch $K_m = 1$, *wie bei Bessels Berechnung der ostpreufsischen Gradmessung*, so wird $\delta K = K_m - K = 1 - K$ und in hinreichender Annäherung

$$\delta\varepsilon = -\varepsilon \,.\, e^2 \cos 2B + \cdots. \tag{4}$$

Für B gleich null giebt dies bei $\varepsilon = 10''$ für $\delta\varepsilon$ den beträchtlichen Wert 0,07''. Nur zufällig ist für die Dreiecke der ostpreufsischen Gradmessung $\delta\varepsilon$ weit kleiner, da hier B im Mittel 55°, also $\cos 2B$ gleich $-0,34$ ist. Immerhin wird hier $\delta\varepsilon = +\varepsilon : 450$, also für $\varepsilon = 10''$ doch schon $+0,022''$.

Die $\delta\varepsilon$ werden nun bei der Ausgleichung wie Beobachtungsfehler verteilt. Die Art der Verteilung ist dabei je nach der Gruppierung der Dreiecke und den Gewichten der verschiedenen Beobachtungen verschieden. Sehr übersichtlich ist die Sache bei einer einfachen Dreieckskette ohne Diagonalen, deren Winkel gleich genau beobachtet sind. Hier wird durch den üblichen Rechnungsgang $\delta\varepsilon$ in jedem Dreieck gleichmäfsig auf die 3 Winkel verteilt und jeder Winkel um $\frac{\delta\varepsilon}{3}$ vergröfsert. Dies hat jedoch auf die Seitenberechnung keinen Einflufs, denn A^*, B^*, C^* werden offenbar dieselben wie für den richtigen Betrag des Excesses, weil bei ihrer Bildung wieder $\frac{1}{3}\delta\varepsilon$ subtrahiert wird, indem man $\frac{1}{3}$ des Excesses von den ausgeglichenen Winkeln abzieht.

Die Seiten und namentlich die Gesamtlänge P_0P_n einer geradgestreckten Dreieckskette, Fig. 36, werden also richtig erhalten.

Nicht jedoch die Azimute. Die Winkel bei P_1, P_2, P_3 u. s. f. sind nämlich zu grofs um $\frac{1}{3}$ der Summe der ε der daselbst zusammenstofsenden Dreiecke. Speziell für Fig. 36 ist der Winkel bei P_1 zu grofs um $\frac{1}{3}(\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3)$ d. i. angenähert $\delta\varepsilon_2$. Ebenso hat man für P_2 angenähert $\delta\varepsilon_4$ zu viel, u. s. f. Bei der Übertragung der Azimute von P_0P_1 auf P_1P_2, P_2P_3 u. s. f. entstehen daher Fehler im Betrage von $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_4$, $\delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_4 + \delta\varepsilon_6$, u. s. f.

Diese Beträge können bedeutend werden, sobald wie bei der ostpreufsischen Gradmessung die $\delta\varepsilon$ alle einerlei Zeichen haben, weil die ε mit dem Äquatorialradius a_0 berechnet worden sind.

Wenn dagegen ein mittleres Krümmungsmafs des Netzes gewählt ist, so wird offenbar nicht nur der Betrag der einzelnen $\delta\varepsilon$ kleiner, sondern es treten in nördlich und südlich von der Mitte gelegenen Netzteilen die $\delta\varepsilon$ mit verschiedenen Vorzeichen auf, wodurch einer zu grofsen Anhäufung vorgebeugt ist.

Setzen wir $P_0P_n = 0{,}1\,a_0$ und $n = 10$, so wird im 1. Fall (*Bessels* Methode) der Azimutfehler der Seite P_9P_{10} gleich $9e^2\cos 2B_m \,.\, \varepsilon$ und da unter Voraussetzung gleichseitiger Dreiecke $\varepsilon = 10$ Sek. ist, so folgt dafür rund $0{,}6''\cos 2B_m$, ein Wert, der im allgemeinen zu grofs ist, um vernachlässigt werden zu können.

Im 2. Falle (Anwendung eines mittleren Krümmungsmafses) entsteht überhaupt nur dann ein Fehler, wenn die Kette nicht die ostwestliche Richtung hat. Nehmen wir meridionale Richtung, so wird auch hierbei der Azimutfehler von $P_9 P_{10}$ gleich null. Derjenige der andern Seiten ist aber nicht null und zwar wird der Azimutfehler der Seite $P_4 P_5$ ein Maximum. Er beträgt jedoch unter sonst denselben Voraussetzungen wie vorher nur 0,013″ sin $2 B_m$.

Im wesentlichen ebenso *geringfügig* dürften sich bei Anwendung eines mittleren Krümmungsmafses des Netzes die Fehler für jede geradgestreckte Dreieckskette von derselben Länge gestalten, wenn auch die Verteilung der $\delta\varepsilon$ auf die Winkel bei ungleicher Genauigkeit derselben sowie bei Existenz von Seitengleichungen ungleichmäfsig sein wird und der Einflufs von $\delta\varepsilon$ auf die Seiten dann nicht ganz verschwindend ist.

Dagegen mufs die Anwendung des Wertes $K = 1$ (welcher der Breite $B =$ ca. 45^0 entspricht) als unzulässig bezeichnet werden.

Es mögen hier noch die Fragen beantwortet werden, wie ε sich durch einen *Fehler in* c^2 und einen *Fehler in* a_0 verändert. Man findet leicht bezw.

$$\delta\varepsilon = + \varepsilon \,.\, \cos 2B\, \delta c^2 + \cdots \tag{5}$$

$$\delta\varepsilon = -\, 2\varepsilon \frac{\delta a_0}{a_0} \tag{6}$$

und ersieht hieraus, dafs selbst so beträchtliche Werte wie $\delta c^2 = 0{,}0003$ und $\frac{\delta a_0}{a_0} = 0{,}0001$ nur die Tausendstelsekunden in ε beeinflussen.

§ 20. Fortsetzung. Sphärische Berechnung von Polarkoordinaten. Sind im Anschlufs an Fig. 36 für P_1, P_2, P_3 u. s. f. Polarkoordinaten in Bezug auf P_0 als Zentrum zu berechnen, so kommen mehr und mehr Dreiecke mit langen Seiten in betracht und man wird daran denken, die strengen Formeln (1) S. 362 anzuwenden. Ist jedoch wie in Fig 36 die Kette so geradgestreckt, dafs nur sehr kleine Excesse für jene Dreiecke entstehen, so kann wieder das einfache *Legendre*sche Theorem in Bezug auf die, dem mittleren Krümmungsmafs des Netzes entsprechende Kugel Anwendung finden. Nur bei Dreiecksnetzen mit grofser Ausdehnung nach 2 Dimensionen sind die strengen Formeln nötig, denn hier entsteht wegen grofser ε auch eine wesentliche Ungleichheit der Reduktionen $A - A^*$, $B - B^*$, $C - C^*$ in den zur Berechnung der Polarkoordinaten erforderlichen Dreiecken.

Im Falle der Fig. 36 werden durch die sphärische Berechnung, wie bereits nachgewiesen, nur die Azimute der Seiten, nicht aber ihre

Längen beeinflufst. Infolge dessen werden auch nur die Azimute, nicht aber die Längen von P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3 ... fehlerhaft.

Man erhält als Fehler der Azimute im Punkte P_0, wie die Betrachtung der Figur zeigt, wenn für die gestreckten Winkel in P_1, P_2 u. s. f. die Fehler bezw. gleich $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_4$ u. s. f. gesetzt werden,

für P_0P_2 : $\frac{1}{2}\delta\varepsilon_2$

„ P_0P_3 : $\frac{2}{3}\delta\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\delta\varepsilon_4$

„ P_0P_4 : $\frac{3}{4}\delta\varepsilon_2 + \frac{2}{4}\delta\varepsilon_4 + \frac{1}{4}\delta\varepsilon_6$

. . . .

„ P_0P_{10} : $\frac{9}{10}\delta\varepsilon_2 + \frac{8}{10}\delta\varepsilon_4 + \cdots \frac{2}{10}\delta\varepsilon_{16} + \frac{1}{10}\delta\varepsilon_{18}$.

Rechnet man nun mit $K = 1$, sodafs alle $\delta\varepsilon$ nahezu den gleichen Betrag (4) S. 403 erhalten, so macht dies $5\delta\varepsilon$ d. i. $5e^2 \cos 2B_m \,.\, \varepsilon$ oder rund 0,3″ cos $2B$. Dieser Azimutfehler kann in der 2. Decimalstelle der Sekunden der von P_0 nach P_{10} übertragenen geographischen Breite und Länge merkbar werden.

Rechnet man aber mit K_m und nimmt (als ungünstigsten Fall) eine meridionale Erstreckung der Kette an, so ist näherungsweise:

$\delta\varepsilon_2 = -\delta\varepsilon_{18} = -0{,}005'' \sin 2B_m$ | $\delta\varepsilon_4 = -\delta\varepsilon_{16} = -0{,}004'' \sin 2B_m$

$\delta\varepsilon_6 = -\delta\varepsilon_{14} = -0{,}003 \ \sin 2B_m$ | $\delta\varepsilon_8 = -\delta\varepsilon_{12} = -0{,}001 \ \sin 2B_m$

und daher der Azimutfehler für P_0P_{10} nur gleich $-0{,}008'' \sin 2B_m$, was wohl meist als geringfügig angesehen werden wird.

Etwas gröfser wird jedoch im allgemeinen der Fehler für P_0Q_{10}, weil bei der Berechnung der Polarkoordinaten für Q_{10}, von P_{10} aus, das zwar auch noch schmale, doch immerhin nicht kleine Dreieck $P_0P_{10}Q_{10}$ eingeht. Mit Rücksicht auf das oben Gegebene findet man leicht mittelst der Formeln (1) S. 362, dafs hier die Berechnung nach *Legendres* Satz mittelst K_m zu dem oben berechneten Azimutfehler für P_0P_{10} beim Übergang zu P_0Q_{10} noch 0,01 bis 0,02″ hinzufügen kann, sodafs eben diese sphärische Rechnung nur für schmale geradgestreckte Ketten zulässig ist.

9. Kapitel.

Rechtwinklige geodätische Koordinaten und Übertragung geographischer Koordinaten mittelst derselben.

§ 1. **Fundamentalsatz.** Ein System rechtwinkliger Koordinaten können wir uns mittelst geodätischer Linien in der Weise gebildet denken, daſs die Abscissen auf einer geodätischen Linie gezählt werden und daſs die Ordinaten geodätische Linien normal zu jener sind; Fig. 37.

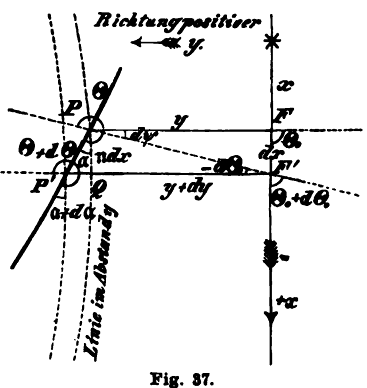


Fig. 37.

Bewegt man eine Ordinate y im Sinne wachsender x, so beschreibt ihr Endpunkt P eine Linie konstanten Abstandes von der x-Axe. Ist die Verschiebung des Fuſspunkts F unendlich klein und gleich dx, so wird man diejenige von P gleich $\mathfrak{n}dx$ setzen können, wobei $\mathfrak{n}$ eine Funktion der Lage und Länge der Ordinate sein wird:

$$PQ = \mathfrak{n}dx. \tag{1}$$

Um $\mathfrak{n}$ kennen zu lernen, führen wir PF dadurch in die Lage QF' über, daſs wir PF zuerst um den Punkt P drehen und dann PF' durch Drehung um den Punkt F' in die Lage QF' bringen. Da FF' normal zu PF steht, so muſs PF' bis auf eine unendlich kleine Strecke 2. Ordnung mit y, also auch mit QF' übereinstimmen, sodaſs PQ als normal zu der Ordinate QF' betrachtet werden kann. (Die Abweichung von der normalen Stellung ist von derselben Art wie beim geodätischen Kreis, vergl. § 3 S. 271.)

Formel (4) S. 347 giebt nun mit Rücksicht auf die Figuren 28 und 37 sofort mit leicht ersichtlicher Übertragung der Bezeichnung:

$$d\Theta_0 = -\frac{\sin\Theta_0}{\mathfrak{m}_y}\left(\frac{\partial\mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{PF} dx,$$

wobei der Index PF an $\frac{\partial\mathfrak{m}_y}{\partial y}$ bedeutet, daſs y in der Richtung PF verlängert gedacht werden muſs. Da $\Theta_0 = 90^0$ ist, so folgt hieraus:

$$-\frac{\mathfrak{m}_y d\Theta_0}{dx} = \left(\frac{\partial\mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{PF}. \tag{2}$$

Das linker Hand auftretende Produkt $-\mathfrak{m}_y d\Theta_0$ ist aber gleich PQ, wie man mit Rücksicht auf Fig. 37 und aus dem Umstande

erkennt, daſs PQ nicht wesentlich von dem geodätischen Kreis abweicht, den die Linie QF' bei Drehung um F' beschreibt. Da also $-\mathfrak{m}_y d\Theta_0 = PQ$ und nach (1) gleich $\mathfrak{n}\,dx$ ist, so folgt aus (2):

$$\mathfrak{n} = \left(\frac{\partial \mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{PF} \tag{3}$$

Diese Formel bildet in Verbindung mit dem oben erhaltenen Satz, daſs die Parallelen zur x-Axe, also die Linien konstanten Wertes y, normal zu den Ordinaten stehen, das Fundament für die Theorie der rechtwinkligen geodätischen Koordinaten. Die in Formel (3) verlangte Differentiation ist indessen etwas unbequem auszuführen, und wir wandeln (3) daher um. Zunächst schreiben wir anstatt (3) für den Augenblick besser:

$$\mathfrak{n} = \frac{d\,\mathfrak{m}_y}{d\,F}. \tag{3*}$$

Hierin ist erstens anstatt des Zeichens der partiellen Differentiation dasjenige der vollständigen eingeführt, weil eine Azimutänderung von y nicht in betracht kommen, also keine Verwechslung stattfinden kann. Zweitens ist anstatt dy im Nenner kurz dF gesetzt, um damit zugleich den Index PF zu bezeichnen.

Nach Gleichung (6) S. 275 ist aber unter Anwendung der oben eingeführten Schreibweise:

$$\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dP^2} + \mathfrak{m}_y \frac{K}{a_0^2} = 0. \tag{4}$$

Hierin bezeichnet $K : a_0^2$ das Krümmungsmaſs für Punkt P. Differenzieren wir diese Gleichung nach y, wobei aber letzteres über F hinaus verlängert zu denken ist, so folgt:

$$\frac{d^3\mathfrak{m}_y}{dP^2\,dF} + \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{K}{a_0^2} = 0 \tag{5}$$

d. i. mit Rücksicht auf den Wert von $\mathfrak{n}$ nach (3*):

$$\frac{d^2\mathfrak{n}}{dP^2} + \mathfrak{n}\frac{K}{a_0^2} = 0.$$

Für $\frac{d\mathfrak{n}}{dP}$ schreiben wir nunmehr wieder $\frac{d\mathfrak{n}}{dy}$. Bei dieser Schreibweise erscheint es selbstverständlich, daſs y im Sinne wachsender Ordinaten über P hinaus verlängert gedacht werden muſs. Man erhält also:

$$\frac{d^2\mathfrak{n}}{dy^2} + \mathfrak{n}\frac{K}{a_0^2} = 0. \tag{6}$$

Diese Formel stellt sich der entsprechenden Formel (6) S. 275 für $\mathfrak{m}$ an die Seite.

Gaufs hat a. a. O. Art. 19 in der That beide Differentialgleichungen gleichzeitig in Form einer noch allgemeiner gültigen Gleichung bewiesen. Die Formeln (3) und (6) gelten nämlich auch noch, wenn die Abscissenaxe keine geodätische, sondern eine *beliebige* Linie ist.

§ 2. Differentialformel für den Richtungswinkel.

Obgleich wir im Folgenden diese Formel *nicht* anwenden, soll sie doch der Vollständigkeit wegen hier entwickelt werden.

Eine durch P gezogene geodätische Linie PP', Fig. 37, bildet in P mit der Parallelen zur x-Axe den Richtungswinkel $\mathfrak{a}$, in dem unendlich benachbarten Punkt P' aber, wenn man sie sich über P' hinaus fortgesetzt denkt, den Richtungswinkel $\mathfrak{a} + d\mathfrak{a}$.

Beziehen wir nun diese Geodätische zunächst auf die Linien $F'P$ und $F'P'$, indem wir diese als Radienvectoren betrachten, so kann man nach S. 347 (4) angeben, um wieviel der Winkel Θ, gezählt vom wachsenden Radiusvector bis zur wachsenden Linie PP', zunimmt beim Übergang von P nach P'. Bezeichnen wir PP' mit ds, so wird:

$$d\Theta = -\frac{\sin\Theta}{\mathfrak{m}_y}\left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{FP} ds.$$

Nun ist aber, wie die Figur zeigt, PQ einerseits gleich $-\sin\Theta ds$ und andrerseits gleich $-\mathfrak{m}_y d\Theta_0$. Man hat daher auch

$$d\Theta = -\left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{FP} d\Theta_0 .$$

Nach S. 407 (2) ist ferner:

$$d\Theta_0 = -\left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{PF} \frac{dx}{\mathfrak{m}_y}.$$

Setzen wir diesen Wert für $d\Theta_0$ in die vorige Gleichung ein und berücksichtigen dabei nach Fig. 37 die Relation $dx = \mathfrak{m}_y d\psi$, so folgt:

$$d\Theta = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{FP} \cdot \left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{PF} d\psi. \tag{1}$$

Aus $d\Theta$ erhält man $d\mathfrak{a}$, wenn man beachtet, dafs wie die Figur zeigt:

$$\Theta + d\psi = 270^0 + \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \Theta + d\Theta = 270^0 + \mathfrak{a} + d\mathfrak{a},$$

mithin $d\Theta - d\psi = d\mathfrak{a}$ ist. Es wird nämlich hieraus durch Einführung von (1):

$$d\mathfrak{a} = \left(\left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{FP} \cdot \left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{PF} - 1\right) d\psi.$$

Restituieren wir hierin den Wert von $d\psi$ mittelst der schon erwähnten Relation $dx = \mathfrak{m}_y d\psi$, so folgt:

$$d\mathfrak{a} = \frac{\left(\frac{d\,\mathfrak{m}_y}{dy}\right)_{PF} \cdot \left(\frac{d\,\mathfrak{m}_y}{dy}\right)_{FP} - 1}{\mathfrak{m}_y} dx. \tag{2}$$

In dieser Formel ist in den Differentialquotienten für $\mathfrak{m}_y$ das Zeichen der vollständigen Differentiation eingeführt, weil der Gegensatz zu Änderungen von $\mathfrak{m}_y$ mit dem Azimut weggefallen ist.

(2) läſst sich aber weit einfacher schreiben. Um dies zu erkennen, erinnern wir an die S. 408 vorkommenden beiden Gleichungen (4) und (5):

$$\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dP^2} + \mathfrak{m}_y \frac{K}{a_0^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^3\mathfrak{m}_y}{dP^2 dF} + \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{K}{a_0^2} = 0.$$

Eliminiert man K hieraus, so folgt unter gleichzeitiger Addition eines und desselben Gliedes $\frac{d\mathfrak{m}_y}{dP}\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dPdF}$ beiderseits:

$$\mathfrak{m}_y \frac{d^3\mathfrak{m}_y}{dP^2 dF} + \frac{d\mathfrak{m}_y}{dP}\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dPdF} = \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dP^2} + \frac{d\mathfrak{m}_y}{dP}\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dPdF}.$$

Dieses läſst sich links und rechts sofort integrieren. Man erhält:

$$\mathfrak{m}_y \frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dPdF} = \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{d\mathfrak{m}_y}{dP} + \text{Konst.}$$

Weil aber für $y = 0$ auch $\mathfrak{m}_y = 0$ und $\frac{d\mathfrak{m}_y}{dF} = 1 = \frac{d\mathfrak{m}_y}{dP}$ ist, was mit Rücksicht auf die Beziehungen in der Ebene ohne weiteres einleuchtet, so ist die Konstante offenbar -1. Auſserdem ist nach (3) S. 408 $\frac{d\mathfrak{m}_y}{dF} = \mathfrak{n}$ und daher:

$$\mathfrak{m}_y \frac{d\mathfrak{n}}{dP} = \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{d\mathfrak{m}_y}{dP} - 1$$

oder

$$\left(\frac{d\mathfrak{m}_y}{dy}\right)_{PF}\left(\frac{d\mathfrak{m}_y}{dy}\right)_{FP} - 1 = \mathfrak{m}_y \left(\frac{d\mathfrak{n}}{dy}\right)_P.$$

Wird dieses in Gleichung (2) eingeführt und der nunmehr überflüssige Index P rechter Hand weggelassen, so ergiebt sich:

$$d\mathfrak{a} = \frac{d\mathfrak{n}}{dy}\,dx. \tag{3}$$

Vorstehende Formel giebt *Gauſs* a. a. O. Art. 19. Sie gilt auch dann, wenn die Abscissenaxe keine Geodätische ist.

Die Differentialformeln für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{n}$ können auch dadurch gewonnen werden, daſs man die Ordinaten y in F und F' bis zu ihrem Durchschnitt A verlängert und AQF' auffaſst als eine durch Drehung entstandene Lage von APF, sodaſs PQ und FF' Elemente geodätischer Kreise sind. Mit Benutzung der für 3 Punkte einer geodätischen Linie von *Christoffel* a. a. O. S. 148 u. 149 aufgestellten Relationen (insbesondere Nr. 3) gelangt man leicht zum Ziele.

§ 3. **Bestimmung von $\mathfrak{n}$.** Zur Bestimmung von $\mathfrak{n}$ ist K für Punkt P aus S. 276 (5) zu entnehmen. K_1, $\alpha_{1.2}$, β_1 beziehen sich darin auf den Fufspunkt der Ordinate y, welche an Stelle von s tritt und werden besser mit K_F, α_F, β_F bezeichnet. Man hat zunächst offenbar, wenn die x-Axe in den *Meridian* gelegt wird:

$$\alpha_F = 90^0, \quad \cos\alpha_F = 0 \tag{1}$$

und ersieht, dafs infolge dessen zahlreiche Glieder in K verschwinden. Der Ausdruck (5) geht nämlich über in:

$$K = K_F\left(1 + 2e^2 \sin^2\beta_F \sin^2 \frac{y}{a_0} + \cdots\right).$$

Werden nun e und $y : a_0$ als Gröfsen 1. Ordnung genommen, so ist

$$K = K_F + Gl_4. \tag{2}$$

Substituieren wir diesen Ausdruck für K in die Gleichung (6) S. 408, so folgt:

$$\frac{d^2\mathfrak{n}}{dy^2} + \mathfrak{n}\frac{K_F}{a_0^2}(1 + Gl_4) = 0. \tag{3}$$

Abgesehen von dem Rest Gl_4 ist dies aber die Differentialgleichung für $\mathfrak{n}$ in Bezug auf eine Kugel vom Krümmungsmafs $K_F : a_0^2$. In der That ist (3) erfüllt durch

$$\mathfrak{n} = \cos\left(\frac{y}{a_0}\sqrt{K_F}\right) + Gl_6, \tag{4}$$

wie man leicht verificiert.

Für den nachfolgenden Gebrauch ist es nun erforderlich, das Krümmungsmafs eines festen Punktes der x-Axe einzuführen. Wir denken uns diesen Punkt als *Koordinatenanfang* genommen und K sowie β für denselben mit dem Index null versehen. In der Formel (5) S. 276 ist jetzt $\alpha_{1.2} = 0$ und $\cos\alpha_{1.2} = 1$, $\beta_1 = \beta_0$, $K_1 = K_0$, $s = x$ zu setzen. Man erhält damit:

$$K_F = K_0 + 2K_0e^2 \sin 2\beta_0 \frac{x}{a_0} + Gl_4. \tag{5}$$

Denkt man sich nunmehr $\cos\left(\frac{y}{a_0}\sqrt{K_F}\right)$ in eine Reihe entwickelt, so ersieht man sogleich, dafs

$$\cos\left(\frac{y}{a_0}\sqrt{K_F}\right) = \cos\left(\frac{y}{a_0}\sqrt{K_0}\right) - K_0e^2 \sin 2\beta_0 \frac{xy^2}{a_0^3} + Gl_6. \tag{6}$$

Dieses ist zugleich der Ausdruck für $\mathfrak{n}$. Setzen wir nun noch zur Vereinfachung:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{6}\, e^2 \sin 2\beta_0 = E_0 \\ &\frac{x}{a_0}\sqrt{K_0} = \xi \qquad \frac{y}{a_0}\sqrt{K_0} = \eta\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und fügen dem 2. Gliede in (6) den Faktor $\sqrt{K_0}$ bei, was nur einen Fehler höherer Ordnung erzeugt, so geht (4) mit Rücksicht auf (6) über in:

$$\mathfrak{n} = \cos\eta - 6E_0\xi\eta^2 + Gl_6\,, \tag{8}$$

welche Formel zur weiteren Anwendung geeignet ist. Nach (8) ist es insbesondere zulässig zu setzen:

$$\frac{1}{\mathfrak{n}} = \sec\eta + 6E_0\xi\eta^2 + Gl_6\,. \tag{9}$$

§ 4. **Gang der weiteren Entwicklung.** Im Anschlufs an eine von *Gaufs* in den *Disqu. c. sup. c.* Art. 19 (*G.* Werke Bd. 4 S. 251) für die Theorie der geodätischen Dreiecke gegebene Entwicklung stellen wir zunächst eine Differentialgleichung für die Kürzeste zwischen 2 durch ihre Koordinaten gegebene Punkte auf, Fig. 38.

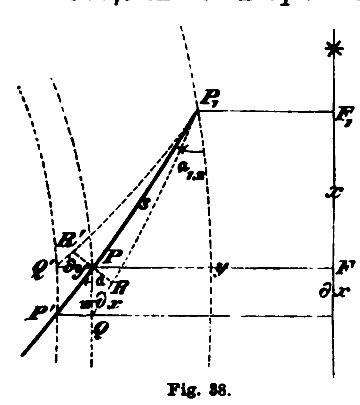


Fig. 38.

Im Richtungswinkel $\mathfrak{a}_{1\cdot 2}$ gehe von P_1 eine geodätische Linie aus, deren Länge bis zu einem beliebigen Punkte P gleich s sei. Wächst nun bei konstantem y die Abscisse x um ∂x, so verschiebt sich die Linie P_1P in die Lage P_1Q. Zieht man PR normal zu P_1Q, so ist:

$$QR = PQ\cos\mathfrak{a}.$$

Nun ist aber QR zu betrachten als partieller Zuwachs von s bei konstantem y und veränderlichem x. Es ist also $\partial s = \mathfrak{n}\partial x\,.\cos\mathfrak{a}$ und

$$\frac{\partial s}{\mathfrak{n}\partial x} = \cos\mathfrak{a}\,. \tag{1}$$

Bei konstantem x und einem um ∂y wachsenden y entsteht ein Zuwachs $\partial s = Q'R'$ und da $Q'R' = \partial y \sin\mathfrak{a}$ ist, so wird

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \sin\mathfrak{a}\,. \tag{2}$$

Die Elimination von $\mathfrak{a}$ aus (1) und (2) mittelst der Gleichung

$$\cos^2\mathfrak{a} + \sin^2\mathfrak{a} = 1$$

führt zu der Gleichung:

$$\left(\frac{\partial s}{\mathfrak{n}\,\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Multipliziert man beiderseits mit $4s^2$, führt anstatt x und y, um den einfachen Ausdruck (8) für $\mathfrak{n}$ anwenden zu können, ξ und η mittelst der Relationen (7) auf voriger Seite ein und setzt ferner

$$\sigma = \frac{s}{a_0}\sqrt{K_0}, \tag{3}$$

so ergiebt sich endlich:

$$\left(\frac{d\,(\sigma^2)}{\mathfrak{n}\,d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\,(\sigma^2)}{d\eta}\right)^2 = 4\sigma^2. \tag{4}$$

Diese Gleichung ist zu integrieren. Geschieht dieses nach der Methode der unbestimmten Koefficienten, so wird σ^2 als Potenzreihe erhalten. Ist aber σ^2 als Funktion von ξ und η bekannt geworden, so geben (1) und (2) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\sigma \cos \mathfrak{a} &= \frac{1}{2\mathfrak{n}}\,\frac{d\,(\sigma^2)}{d\xi}\\ \sigma \sin \mathfrak{a} &= \frac{1}{2}\,\frac{d\,(\sigma^2)}{d\eta}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

zur Bestimmung von $\mathfrak{a}$.

Die Vertauschung der Punkte in den Gleichungen (5) liefert Formeln für den Richtungswinkel $\mathfrak{a}_{1.2}$ und offenbar damit auch ein Mittel zur Bestimmung von $\mathfrak{a}_{1.2} - \mathfrak{a}$.

Auf dem hier vorgezeichneten Weg werden wir σ^2 und $\mathfrak{a}$, sowie $\mathfrak{a}_{1.2} - \mathfrak{a}$ bestimmen. Er erscheint deswegen bequem, weil die in betracht kommenden Ausdrücke für den Fall der Kugel schon entwickelt sind und nur kleine Verbesserungen zu erhalten haben.

§ 5. Fortsetzung. Bestimmung von σ^2. Wenn wir in Gleichung (4) des vorigen Paragraphen für $1:\mathfrak{n}$ einfach $\sec\eta$ setzen, so ergiebt sich diejenige Beziehung von σ^2 zu den Koordinaten der Punkte P_1 und P, welche für die Kugel mit dem Radius $a_0 : \sqrt{K_0}$ gilt und aus S. 122 entnommen werden kann. Der genauere Wert von $1:\mathfrak{n}$ giebt einen kleinen Zusatz zu jenem σ^2, welches wir $\sigma_0{}^2$ nennen wollen. Heifst die Verbesserung V, so ist also:

$$\sigma^2 = \sigma_0{}^2 + V. \tag{1}$$

Hiermit geht die oben erwähnte Gleichung (4) über in:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial(\sigma_0{}^2)}{\partial\xi} + \frac{\partial V}{\partial\xi}\right)^2 (\sec\eta + 6E_0\,\xi\eta^2 + Gl_6)^2 \\ + \left(\frac{\partial(\sigma_0{}^2)}{\partial\eta} + \frac{\partial V}{\partial\eta}\right)^2 = 4\sigma_0{}^2 + 4V.\end{aligned} \tag{2}$$

Dieses vereinfacht sich einesteils dadurch, dafs

$$\left(\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}\right)^2\sec^2\eta+\left(\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\eta}\right)^2=4\sigma_0^2$$

ist, andernteils durch die Bemerkung, dafs man die 2. Potenzen der Differentialquotienten von V gegen die 1. Potenzen derselben vernachlässigen kann. Denn indem V nur durch das Glied 5. Ordnung $6E_0\eta^2\xi$ entsteht, ist es nach (2) selbst von der Ordnung des Produkts dieses Gliedes in $\left(\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}\right)^2$, d. i. von der 7. Ordnung. Die Differentialquotienten von V haben dann die 6. Ordnung, ihre Quadrate also die 12. Ordnung. Da ferner die Differentialquotienten von σ_0^2 die 1. Ordnung besitzen, so sind ihre Produkte mit den Differentialquotienten von V Gröfsen 7. Ordnung.

Vernachlässigt man alle Gröfsen, welche die 7. Ordnung der Voraussetzung nach überschreiten, so folgt aus (2):

$$\frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\eta}\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\eta}+6E_0\xi\eta^2\left(\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}\right)^2+Gl_8=2V. \quad (3)$$

Da nach S. 122 $\sigma_0^2=\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+Gl_4$ ist, wenn gesetzt werden:

$$\Delta\xi=\xi-\xi_1 \qquad \Delta\eta=\eta-\eta_1, \quad (4)$$

so hat man für die Differentialquotienten von σ_0^2:

$$\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}=2\Delta\xi+Gl_3 \qquad \frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\eta}=2\Delta\eta+Gl_3. \quad (5)$$

Für V haben wir, wie bemerkt, eine Funktion 7. Ordnung einzuführen, d. h., weil e^2 als Faktor auftritt: eine Funktion 5. Grades in Bezug auf die Koordinaten der Punkte P_1 und P. Offenbar ist aber σ^2 und also auch V eine solche Funktion, welche in Bezug auf die Koordinaten der beiden Punkte P und P_1 vollständig symmetrisch gebaut ist.

Man kann sich diese Funktion zunächst nach Potenzen von $\Delta\xi$ geordnet denken, denn $\Delta\xi$ mufs Faktor derselben sein, indem für $\Delta\xi=0$ $\sigma^2=\Delta\eta^2$ wird, also V verschwindet. Indessen bleiben nur $\Delta\xi^2$ und $\Delta\xi^4$ zu berücksichtigen, da das Vorhandensein ungerader Potenzen von $\Delta\xi$ der eben erwähnten Symmetrie widersprechen würde. Wir begnügen uns aber mit Vernachlässigung von $\Delta\xi^4$ zu setzen:

$$V=E_0\Delta\xi^2\left(\xi(a\eta^2+b\eta_1^2+c\eta\eta_1)+\xi_1(b\eta^2+a\eta_1^2+c\eta\eta_1)\right)+Gl_8, \quad (6)$$

worin a, b, c zu bestimmende Koefficienten bezeichnen. Der Erfolg wird diese Annahme bestätigen.

Mit Weglassung des gemeinsamen Faktors $E_0 \Delta \xi^2$ ergiebt die Substitution des Ausdrucks (6) in (3) zur Bestimmung von a, b, c die (noch nicht weiter zusammengezogene) Gleichung:

$$2\{\xi(a\eta^2 + b\eta_1^2 + c\eta\eta_1) + \xi_1(b\eta^2 + a\eta_1^2 + c\eta\eta_1)\}$$

$$+(\xi-\xi_1)(a\eta^2+b\eta_1^2+c\eta\eta_1)+(\eta-\eta_1)\{\xi(2a\eta+c\eta_1)+\xi_1(2b\eta+c\eta_1)\}$$

$$+\ 12\eta^2\xi = \xi(a\eta^2 + b\eta_1^2 + c\eta\eta_1) + \xi_1(b\eta^2 + a\eta_1^2 + c\eta\eta_1) + Gl_6$$

welche nach gehöriger Ordnung folgende Form annimmt:

$$\left.\begin{aligned} &\xi\ \{4\eta^2(a+3) + \eta\eta_1(3c-2a) + \eta_1^2(2b-c)\} \\ +\ &\xi_1\{\eta^2(3b-a) + \eta\eta_1(c-2b) + \eta_1^2(a-b-c)\} + Gl_6 \end{aligned}\right\} = 0\,.$$

Dieselbe mufs identisch verschwinden, was nur möglich ist für nachstehende Werte von a, b, c:

$$a = -3 \qquad b = -1 \qquad c = -2\,.$$

Setzt man dies in (6) ein und fügt alsdann V zu σ_0^2 hinzu, so folgt:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 - E_0\Delta\xi^2 \left\{\begin{aligned} &\xi\ (3\eta^2 + \eta_1^2 + 2\eta\eta_1) \\ +\ &\xi_1(\eta^2 + 3\eta_1^2 + 2\eta\eta_1) \end{aligned}\right\} + Gl_8\,. \tag{7}$$

Im Anschlufs an die Formeln (5) des vorigen Paragraphen bilden wir nun die Differentialquotienten von σ^2 und erhalten zuerst:

$$\sigma\cos\mathfrak{a} = (\sec\eta + 6E_0\,\xi\eta^2 + Gl_6)\Big(\frac{1}{2}\,\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}$$

$$-\,E_0\Delta\xi\Big[\xi\Big(\frac{9}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\eta_1^2 + 3\eta\eta_1\Big) + \xi_1\Big(-\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{5}{2}\eta_1^2 + \eta\eta_1\Big)\Big] + Gl_7\Big)$$

Hieraus folgt, wenn wir $\sec\eta\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}$ mit $(\sigma\cos\mathfrak{a})_0$ als dem für die Kugel gültigen Ausdruck bezeichnen und den oben angegebenen Näherungswert von $\frac{1}{2}\,\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}$ berücksichtigen:

$$\sigma\cos\mathfrak{a} = (\sigma\cos\mathfrak{a})_0 + E_0\Delta\xi \left\{\begin{aligned} &\xi\Big(\frac{3}{2}\eta^2 - \frac{3}{2}\eta_1^2 - 3\eta\eta_1\Big) \\ +\ &\xi_1\Big(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{5}{2}\eta_1^2 - \eta\eta_1\Big) \end{aligned}\right\} + Gl_7\,. \tag{8}$$

Die Differentiation von σ^2 nach η giebt ferner sofort:

$$\sigma\sin\mathfrak{a} = (\sigma\sin\mathfrak{a})_0 - E_0\Delta\xi^2\{\xi(3\eta + \eta_1) + \xi_1(\eta + \eta_1)\} + Gl_7\,. \tag{9}$$

§ 6. Bestimmung von Distanz und Richtungswinkeln aus den Koordinaten. Die Formeln (7), (8) und (9) des vorigen Paragraphen denken wir uns nunmehr angewandt auf 2 Punkte P_1 und P_2. Es ist alsdann an die Symbole ξ und η ohne Index der Index 2 anzuhängen. Ferner ist $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}_{2.1} + 180^0$ zu vertauschen.

Führen wir aufserdem die linearen Koordinaten selbst wieder ein und beachten die für die Kugel geltenden Formeln (3), (4) und (5) S. 122, dann wird nach einigen Reduktionen erhalten:

$$s^2 = \left\{\begin{array}{c} \Delta x^2 + \Delta y^2 - \left(\frac{y^2}{\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{12\varrho^2}\right)\Delta x^2 \\ + \left(\frac{y^4}{3\varrho^4} - \frac{y^2 \Delta y^2}{6\varrho^4} - \frac{\Delta y^4}{720\varrho^4}\right)\Delta x^2 - \left(\frac{y^2}{12\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{720\varrho^2}\right)\frac{\Delta x^4}{\varrho^2} \\ - \left\{\left(\frac{2y^2}{\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{6\varrho^2}\right)\frac{x}{\varrho} + \frac{y\,\Delta x\,\Delta y}{3\varrho^2}\right\}\Delta x^2\, e^2 \sin 2B_0 + \varrho^2\, Gl_8. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Hierin ist gesetzt:

$$\left.\begin{array}{ll} x = \frac{x_2 + x_1}{2} & y = \frac{y_2 + y_1}{2} \\ \Delta x = x_2 - x_1 & \Delta y = y_2 - y_1 \\ \multicolumn{2}{c}{\varrho^2 = \frac{a_0^2}{K_0} = \frac{b_0^2}{W_0^4} \text{ mit } W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0},} \end{array}\right\} \quad (2)$$

letzteres nach S. 59 § 15 (3), wobei B_0 die geographische Breite des Koordinatenanfangs bezeichnet.

Bei Herstellung der Ausdrücke $s \cos \mathfrak{a}_{2.1}$ und $s \sin \mathfrak{a}_{2.1}$ mittelst (3) und (4) S. 122 ist in diesen Formeln eine Vertauschung der Indices 1 und 2 auszuführen. Es findet sich:

$$s \cos \mathfrak{a}_{2.1} = -\Delta x \left\{\begin{array}{c} 1 - \left(\frac{y_1^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{6\varrho^2}\right) \\ + \left(\frac{y_1^4}{24\varrho^4} - \frac{y_1^2 \Delta y^2}{12\varrho^4} + \frac{7\Delta y^4}{360\varrho^4}\right) - \left(\frac{y_1 y_2}{2\varrho^2} + \frac{2\Delta y^2}{15\varrho^2}\right)\frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} \\ - \left[\left(\frac{y_1^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{12\varrho^2}\right)\frac{x_1}{\varrho} + \left(\frac{y_1^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{4\varrho^2}\right)\frac{x_2}{\varrho}\right] e^2 \sin 2B_0 \end{array}\right\} + \varrho Gl_7; \quad (3)$$

$$s \sin \mathfrak{a}_{2.1} = \left\{\begin{array}{c} -\Delta y + \left(y_2 - \frac{1}{3}\Delta y\right)\frac{\Delta x^2}{2\varrho^2} \\ - \left\{\left(y_2 - 2\Delta y\right)\frac{y_2^2}{\varrho^2} + \left(y_2 - \frac{2}{15}\Delta y\right)\frac{\Delta y^2}{\varrho^2}\right\}\frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} + \left(y_2 - \frac{7}{15}\Delta y\right)\frac{\Delta x^4}{24\varrho^4} \\ + \left[y\frac{x_1}{3\varrho} + (4y + \Delta y)\frac{x_2}{6\varrho}\right]\frac{\Delta x^2}{\varrho^2} e^2 \sin 2B_0 + \varrho\, Gl_7. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 folgt hieraus:

$$s \cos \mathfrak{A}_{1.2} = \Delta x \left\{ \begin{array}{c} 1 - \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{6\varrho^2} \right) \\ + \left(\frac{y_2^4}{24\varrho^4} - \frac{y_2^2 \Delta y^2}{12\varrho^4} + \frac{7\Delta y^4}{360\varrho^4} \right) - \left(\frac{y_1 y_2}{2\varrho^2} + \frac{2\Delta y^2}{15\varrho^2} \right) \frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} \\ - \left[\left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{4\varrho^2} \right) \frac{x_1}{\varrho} + \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{12\varrho^2} \right) \frac{x_2}{\varrho} \right] e^2 \sin 2B_0 \end{array} \right\} + \varrho\, Gl_7; \quad (5)$$

$$s \sin \mathfrak{A}_{1.2} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta y + \left(y_1 + \frac{1}{3} \Delta y \right) \frac{\Delta x^2}{2\varrho^2} \\ - \left\{ \left(y_1 + 2\Delta y \right) \frac{y_1^2}{\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{2}{15} \Delta y \right) \frac{\Delta y^2}{\varrho^2} \right\} \frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{7}{15} \Delta y \right) \frac{\Delta x^4}{24\varrho^4} \\ + \left[(4y - \Delta y) \frac{x_1}{6\varrho} + y \frac{x_2}{3\varrho} \right] \frac{\Delta x^2}{\varrho^2} e^2 \sin 2B_0 + \varrho\, Gl_7 \, . \end{array} \right\} \quad (6)$$

Zur Prüfung dieser Formeln dienen die Relationen:

$$s^2 = s^2 \cos^2 \mathfrak{A}_{2.1} + s^2 \sin^2 \mathfrak{A}_{2.1} = s^2 \cos^2 \mathfrak{A}_{1.2} + s^2 \sin^2 \mathfrak{A}_{1.2} \, .$$

Bei der numerischen Auswertung ergiebt sich ebenfalls eine Kontrolle durch doppelte Berechnung von s aus den Systemen (3), (4) und (5), (6).

Eine andere Kontrolle kann mittelst einer Formel erhalten werden, welche direkt die Differenz

$$\mathfrak{A}_{2.1} - \mathfrak{A}_{1.2} - 180^0 = \Delta \mathfrak{A} \quad (7)$$

angiebt. Soweit die Kugel in betracht kommt, ist diese Differenz schon bekannt. Es handelt sich also auch jetzt nur wieder um die Bestimmung des Korrektionsgliedes.

Durch Addition der Gleichungen (4) und (6) ergiebt sich mit Rücksicht auf (7):

$$s\left(\sin \mathfrak{A}_{1.2} - \sin(\mathfrak{A}_{1.2} + \Delta\mathfrak{A})\right) = \left\{ s\left(\sin \mathfrak{A}_{1.2} - \sin(\mathfrak{A}_{1.2} + \Delta\mathfrak{A})\right) \right\}_0$$

$$+ \left\{ \left(y - \frac{1}{6} \Delta y \right) \frac{x_1}{\varrho} + \left(y + \frac{1}{6} \Delta y \right) \frac{x_2}{\varrho} \right\} \frac{\Delta x^2}{\varrho^2} e^2 \sin 2B_0 + \varrho\, Gl_7 \, , \quad (8)$$

worin das 1. Glied rechts sich wieder auf die Kugel bezieht. Wird nun $\sin(\mathfrak{A}_{1.2} + \Delta\mathfrak{A})$ aufgelöst, so folgt aus (8) unter gleichzeitiger Umformung des in e^2 multiplizierten Gliedes:

$$- s \cos \mathfrak{A}_{1.2} \, . \, \Delta\mathfrak{A} + \cdots = - (s \cos \mathfrak{A}_{1.2} \, . \, \Delta\mathfrak{A})_0 + \cdots$$

$$+ \left\{ 2y \frac{x}{\varrho} + \Delta y \frac{\Delta x}{6\varrho} \right\} \frac{\Delta x^2}{\varrho^2} e^2 \sin 2B_0 + \varrho\, Gl_7 \, .$$

Beachtet man jetzt Formel (5), nach welcher Δx im allgemeinen nur um einen kleinen Bruchteil 2. Ordnung seines Wertes von $s \cos \mathfrak{A}_{1.2}$ verschieden ist, so erhält man durch Division mit Δx (vorbehältlich weiterer Untersuchung der Gültigkeit):

$$\Delta \mathfrak{a} = (\Delta \mathfrak{a})_0 - \left(2 \frac{xy}{\varrho^2} + \frac{\Delta x \Delta y}{6 \varrho^2}\right) \frac{\Delta x}{\varrho} e^2 \sin 2 B_0 + Gl_6 .$$

Der Wert von $(\Delta \mathfrak{a})_0$ ergiebt sich aus Formel (4) S. 119, wobei in den Gliedern 4. Ordnung für u und v bezw. Δx und Δy genommen werden dürfen.

Damit folgt endlich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta \mathfrak{a}} = - \varrho'' \frac{\Delta x}{\varrho} \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{\varrho} \left(1 - \frac{y^2}{6\varrho^2} + \frac{\Delta x^2}{12 \varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{8 \varrho^2}\right) \\ + \left(2 \frac{xy}{\varrho^2} + \frac{\Delta x \Delta y}{6 \varrho^2}\right) e^2 \sin 2 B_0 + Gl_5 . \end{array} \right\} \qquad (9)$$

Um mit Sicherheit zu erkennen, dafs diese Entwicklung zulässig ist, mufs man sich (8) in die Form gebracht denken:

$$s \sin (\mathfrak{a}_{1.2} + \Delta \mathfrak{a}) = s \sin \mathfrak{a}_{1.2} + h . \qquad (8^*)$$

Wie S. 31 gezeigt, findet man nun, dafs die Entwicklung von $\Delta \mathfrak{a}$ nach Potenzen von h gilt, sobald $h : s \cos^2 \mathfrak{a}_{1.2}$ eine kleine Gröfse ist, deren Potenzen von einer gewissen Stelle ab vernachlässigt werden können. Insoweit aber die der Kugel entsprechenden Glieder allein in betracht kommen, ist die Formel (9) schon früher als für kleine Werte der Koordinaten brauchbar erwiesen. Man sieht jetzt, dafs die Brauchbarkeit auch für das Ellipsoid bestehen bleibt, denn die Glieder in h, welche durch e^2 erzeugt werden, haben jedenfalls sämtlich den Faktor Δx^2, weil dieser Faktor notwendig allen höheren Gliedern des Ausdrucks für s^2 S. 416 (1) anhaftet, wie die Entwicklung S. 414 zeigt. Dieser Faktor bleibt für $s \sin \mathfrak{a}_{1.2}$ bestehen, und es läfst sich also h durch $s^2 \cos^2 \mathfrak{a}_{2.1}$ dividieren, welches von Δx^2 nur um einen, von 1 nicht erheblich abweichenden Faktor unterschieden ist.

Hiermit ist aber leicht zu ersehen, dafs $h : s \cos^2 \mathfrak{a}_{2.1}$ für solche Werte der Koordinaten, die im Verhältnis zu a_0 Gröfsen 1. Ordnung sind, jedenfalls eine *kleine* Gröfse 2. Ordnung ist, deren Potenzen also der Reihe nach immer kleiner werden.

Für die *numerische Genauigkeit* der vorstehenden Formeln ist es vorteilhaft, den Anfangspunkt der Abscissen, für welchen K_0 gilt, so zu verschieben, dafs die Abscissen selbst möglichst klein werden.

Im allgemeinen ist es am besten, K_0 *für die Mitte zwischen den Fufspunkten der Ordinaten* y_1 *und* y_2 zu nehmen. Dann wird $x = 0$ und $x_1 = - x_2$, wodurch sich die Werte der von e^2 abhängenden Glieder stark reduzieren.

Bei Werten der Entfernungen s und Ordinaten $y < 0{,}1 a_0$ beträgt unter dieser Voraussetzung der Einflufs der von e^2 abhängenden

Glieder im Maximum für log s höchstens mehrere Einheiten der 8. Decimale. Der Einfluſs auf $\varDelta\mathfrak{A}$ beträgt gleichzeitig etwa ebensoviele Einheiten der 2. Decimalstelle der Sekunden.

Um eine Vorstellung von der Genauigkeit der Formeln dieses Paragraphen zu gewinnen, braucht man sich dieselben nur mittelst derjenigen für das geodätische Dreieck S. 359 entwickelt zu denken, was in der That möglich ist, indem man das Viereck $P_1 P_2 F_2 F_1$ (Fig. 38 S. 412) in 2 Dreiecke zerlegt. Aus Tafel (27) S. 388 und Formel (3) S. 403 schlieſst man, daſs bei passender Wahl von K_0 in $\varDelta\mathfrak{A}$ im Maximum Fehler von einigen Hundertstelsekunden entstehen können, wenn die in frage kommenden Dimensionen den Betrag von $0{,}1\,a_0$ erreichen. Ferner ist hieraus und aus § 14 S. 388 u. ff. zu ersehen, daſs log s in diesem Falle in der 8. Decimalstelle unsicher werden kann.

§ 7. **Bestimmung der Koordinatendifferenz und der Differenz der Richtungswinkel aus der Entfernung P_1P_2, dem Richtungswinkel in P_1 und den Koordinaten von P_1.** Hierzu ist es nur nötig, die Formeln (5) und (6) des vorigen Paragraphen nach $\varDelta x$ und $\varDelta y$ aufzulösen. Dies wird aber dadurch sehr erleichtert, daſs, insoweit die für die Kugel gültigen Glieder in betracht kommen, die Formeln schon früher auf S. 118 gegeben sind. Auſserdem genügt es in den mit e^2 multiplizierten Gliedern zu setzen:

$$x_2 = x_1 + u + Gl_3 \qquad y_2 = y_1 + v + Gl_3,$$

und so wird erhalten:

$$\left.\begin{array}{c} v = s \sin \mathfrak{A}_{1.2} \qquad u = s \cos \mathfrak{A}_{1.2} \\ \varrho^2 = \dfrac{a_0{}^2}{K_0} = \dfrac{b_0{}^2}{W_0{}^4} \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$y_2 - y_1 = \left\{\begin{array}{l} v - \left(y_1 + \frac{1}{3} v\right) \dfrac{u^2}{2\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{1}{5} v\right)\left(\dfrac{u^4}{24\varrho^4} - \dfrac{u^2 v^2}{3\varrho^4}\right) - (y_1 + 3v)\dfrac{u^2 y_1{}^2}{6\varrho^4} \\ \quad - \left[\left(y_1 + \frac{1}{3} v\right)\dfrac{x_1}{\varrho} + \left(\frac{1}{3} y_1 + \frac{1}{6} v\right)\dfrac{u}{\varrho}\right]\dfrac{u^2}{\varrho^2}\, e^2 \sin 2B_0 + \varrho\, Gl_7 \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$x_2 - x_1 = u\left\{\begin{array}{l} 1 + \left(\dfrac{y_2{}^2}{2\varrho^2} - \dfrac{v^2}{6\varrho^2}\right) + \left(\dfrac{y_2{}^2}{2\varrho^2} - \dfrac{v^2}{5\varrho^2}\right)\dfrac{u^2}{3\varrho^2} + \dfrac{5}{6}\left(\dfrac{y_2{}^2}{2\varrho^2} - \dfrac{v^2}{10\varrho^2}\right)^2 \\ \quad + \left[\left(\dfrac{y_2{}^2}{\varrho^2} - \dfrac{v^2}{3\varrho^2}\right)\dfrac{x_1}{\varrho} + \left(\dfrac{y_2{}^2}{2\varrho^2} - \dfrac{v^2}{12\varrho^2}\right)\dfrac{u}{\varrho}\right] e^2 \sin 2B_0 \end{array}\right\} + \varrho Gl_7. \tag{3}$$

Zur Berechnung von $\varDelta\mathfrak{A}$ kann man entweder die Formel (9) des vorigen Paragraphen anwenden oder mit Rücksicht auf Formel (5) S. 119 setzen:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\mathfrak{A}} = -\varrho'' \dfrac{u}{\varrho}\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{y_1}{\varrho} + \dfrac{v}{2\varrho}\right) + \left(\dfrac{y_1}{\varrho} + \dfrac{v}{4\varrho}\right)\dfrac{5v^2 - u^2}{6\varrho^2} + \left(\dfrac{y_1}{3\varrho} + \dfrac{v}{\varrho}\right)\dfrac{y_1{}^2}{\varrho^2} \\ \quad + \left(\dfrac{2xy}{\varrho^2} + \dfrac{uv}{6\varrho^2}\right) e^2 \sin 2B_0 + Gl_5 \end{array}\right\} \\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \qquad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ \mathfrak{A}_{2.1} = \mathfrak{A}_{1.2} + 180^0 + \varDelta\mathfrak{A}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Über die Genauigkeit dieser Formeln gelten wesentlich dieselben Bemerkungen wie im vorigen Paragraphen. Insbesondere ist es im allgemeinen vorteilhaft, den *Koordinatenanfang*, auf welchen K_0 sich bezieht, auch hier inmitten der Fufspunkte der Ordinaten anzunehmen, wozu es ausreicht, $x_1 = -\frac{1}{2}u$ zu setzen.

Man kann indessen um so mehr hiervon abweichen, je kleiner die in betracht kommenden Dimensionen sind. Ohne Zweifel ist es unbequem, bei der successiven Berechnung der Koordinaten der Punkte einer Haupttriangulierung stets ein neues K_0 für jede neue Dreiecksseite zu nehmen, wenigstens dann, wenn man K_0 bezw. W_0 aus den Tafeln genau interpolieren mufs. Es genügt jedoch immer, den *nächstgelegenen Tafelwert* zu nehmen, unter der Voraussetzung, dafs die Tafelwerte von 10 zu 10′ voranschreiten (selbst 20′ Intervall würde noch genügen).

Indem man also ϱ immer fortschreitend verbessert, erlangt man den Vorteil, dafs die in e^2 multiplizierten Glieder sehr klein und meistens so klein werden, dafs sie ganz wegbleiben können.

Man wird dann oftmals die Formeln (2) bis (4) auf die im Druck hervorgehobenen Glieder der beiden niedersten Ordnungen reduzieren können.

Ein sehr ausgedehntes Dreiecksnetz kann nach diesen einfachen Formeln aber nur dann behandelt werden, wenn man mehrere Abscissenaxen anwendet, deren ostwestlicher Abstand etwa nur 150^{km} beträgt. Punkte von mittlerer Lage werden auf beide benachbarte Axen bezogen. (Vergl. S. 120.)

Um die genau meridionale Richtung dieser Abscissenaxen zu sichern, mufs man von der ersten, durch astronomische Messungen festgelegten Axe aus mittelst der *strengeren* Formeln rechnen bis zu denjenigen Netzpunkten, durch welche die beiden benachbarten Axen gelegt werden. Von diesen aus lassen sich dann wieder die benachbarten Axen bestimmen, u. s. f.

In Preufsen benutzt man hierbei ein anderes Verfahren: Man rechnet direkt geographische Koordinaten (die man für kartographische Zwecke ohnehin nicht entbehren kann) für die Punkte des Hauptdreiecksnetzes und geht dann nach Bedürfnis zu lokalen rechtwinkligen Koordinaten über.

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dafs man mit Leichtigkeit die Abscissenaxen in ganze Längengrade Abstand von einander bringen und überhaupt ohne weiteres irgendwo ein System lokaler rechtwinkliger Koordinaten etablieren kann.

§ 8. **Übertragung geographischer Koordinaten.** Schon bei Behandlung dieses Problems für kleine Distanzen auf der Kugel S. 123 zeigte es sich vorteilhaft, zunächst rechtwinklige Koordinaten für den Endpunkt P_2 der Linie s in Bezug auf den Meridian des Anfangspunktes P_1 zu berechnen. Im Anschlufs an Fig. 39 denken wir uns also die Koordinaten x und y für P_2 berechnet, alsdann aber mittelst des Meridiansbogens x von der geographischen Breite B_1 des Punktes P_1 übergegangen zur Breite F des Punktes F, dem Ordinatenfufspunkt. Es bleibt nun hauptsächlich noch die Aufgabe, von F aus mittelst y den geographischen Längenunterschied und die geographische Breite für P_2 zu ermitteln.

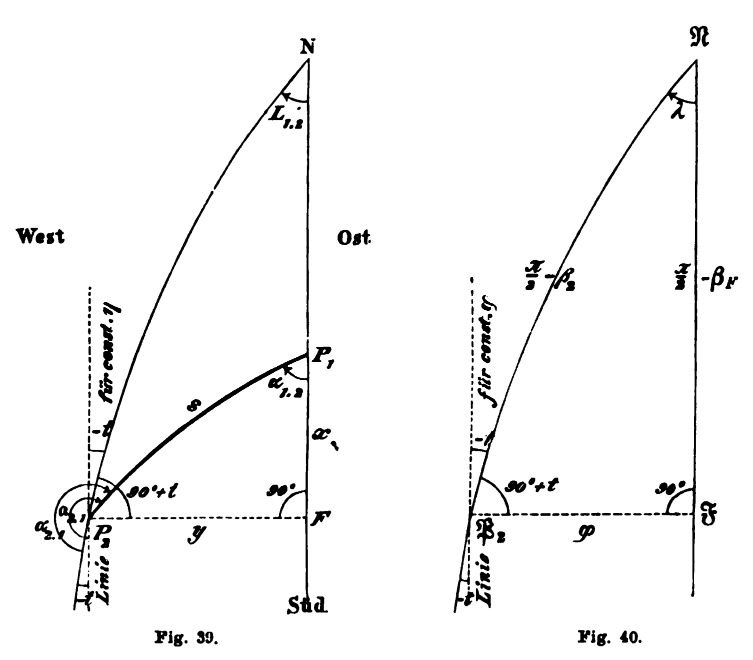


Fig. 39. Fig. 40.

Bei sehr kleinen Distanzen mufs es ausreichen, die Figur NFP_2 auf dem Ellipsoid wie ein sphärisches Dreieck, auf einer Kugel mit dem Querkrümmungsradius ϱ_n im Punkte F als Radius, zu berechnen. Denn die Normalen des Ellipsoids für die Punkte P_2 und F schneiden sich bei geringen Entfernungen sehr nahe in einem und demselben Punkt K'_F der Rotationsaxe, welcher Punkt von F um ϱ_n absteht (Fig. 1, S. 40). Die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks, das auf der um K'_F mit ϱ_n beschriebenen Kugel zwischen den Durchschnittspunkten der Linien $K'_F F$, $K'_F P_2$ und $K'_F N$ mit der Kugelfläche liegt, entsprechen nur insofern nicht genau den Winkeln der Normalen mit der Erdaxe, sowie den Winkeln 90^0, $L_{1.2}$ und $90^0 + t$

des Dreiecks NFP_2 auf dem Ellipsoid, als $K'_F P_2$ nicht genau Normale des Ellipsoids ist.

Die sphärische Rechnung bedarf daher der Korrektion, welche nun ausgemittelt werden soll. Wir setzen:

$$\frac{y}{\varrho_n} = \eta\,, \quad \varrho_n \text{ für die geographische Breite } F. \tag{1}$$

Im Anschlufs an die Formeln des 5. Kapitels, S. 218 u. ff. ordnen wir ferner der Fig. 39 eine sphärische Figur zu, Fig. 40, welche die Azimute und Komplemente der reduzierten Breiten unmittelbar enthält.

Nach Formel (9) S. 221 ist:

$$dy = a_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\; d\varphi$$

$$k = e \sin F.$$

Da nun $\varrho_n = a_0 : \sqrt{1 - e^2 \sin^2 F}$ ist, so hat man auch $\varrho_n = a_0 : \sqrt{1-k^2}$ und also

$$d\eta = \sqrt{1-e^2}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\; d\varphi\,. \tag{2}$$

Setzen wir aber η als Gröfse 1. Ordnung voraus, so wird durch Reihenentwicklung:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \left(\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi^4\right) + Gl_8\,.$$

Wird dies in dem Ausdrucke (2) eingeführt und dann von $\varphi = 0$ bis φ integriert, so wird erhalten:

$$\eta = \varphi\sqrt{1-e^2}\left(1 - \frac{1}{6}k^2\varphi^2 + \frac{1}{30}k^2\varphi^4 + Gl_8\right). \tag{3}$$

Hierzu gehört die nachfolgende Umkehrung, wie leicht zu verificieren:

$$\varphi = \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}}\left(1 + \frac{1}{6}k^2(1+e^2)\,\eta^2 - \frac{1}{30}k^2\eta^4 + Gl_8\right). \tag{4}$$

Man hat ferner aus Formel (14) S. 231, wenn $k_1 = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4 + \cdots$ und $n = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \cdots$ gesetzt, sowie beachtet wird, dafs $\cos\beta_F = \cos F : \sqrt{1-k^2}$ ist:

$$L_{1.2} = \lambda - \frac{e^2 \cos F}{2\sqrt{1-k^2}}\left\{\begin{array}{c}\left(1+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{8}k^2+\frac{1}{8}e^4-\frac{5}{64}k^4\right)\varphi - \left(\frac{1}{16}k^2+\frac{1}{32}k^4\right)\sin 2\varphi \\ + \frac{1}{256}k^4 \sin 4\varphi + Gl_7\end{array}\right\}.$$

Den Index von $L_{1.2}$ werden wir im Folgenden der Kürze wegen unterdrücken. Substituiert man nun die Reihen $\sin 2\varphi = 2\varphi - \frac{4}{3}\varphi^3 + \cdots$, $\sin 4\varphi = 4\varphi + \cdots$ und $1 : \sqrt{1-k^2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{8}k^4 + \cdots$, so folgt:

$$L = \lambda - \frac{1}{2}e^2 \cos F \left\{ \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}k^4 + \frac{1}{8}e^2k^2 + \frac{1}{8}e^4\right)\varphi \right.$$
$$\left. + \frac{1}{12}k^2\varphi^3 + Gl_7 \right\},$$

und wenn man endlich für φ mittelst (4) η einführt:

$$L = \lambda - \frac{1}{2}e^2 \cos F \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}k^4 + \frac{5}{8}e^4 + \frac{1}{4}e^2k^2\right)\eta \\ \qquad + \frac{1}{4}k^2\eta^3 + Gl_7. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Mittelst sphärischer Trigonometrie hat man weiter:

$$\tan\lambda = \tan\varphi \sec\beta_{F'} = \sqrt{1-k^2}\tan\varphi\sec F,$$

wozu wir aus (5) den Wert von λ und aus (4) den Wert von φ entnehmen. Es ergiebt sich hieraus, indem nachstehende Entwicklung nach *Taylors* Satz:

$$\tan(u+\delta) = \tan u + \delta\sec^2 u + \delta^2 \sec^2 u \tan u$$
$$+ \delta^3 \sec^2 u \left(\tan^2 u + \frac{1}{3}\right) + \cdots, \quad (6)$$

unter Vorbehalt der Beurteilung der Zulässigkeit, auf $u = L$ mit $\delta = \lambda - L$, sowie auf $u = \eta$ mit $\delta = \varphi - \eta$ angewandt wird:

$$\tan L + (\lambda - L)\sec^2 L + (\lambda - L)^2 \sec^2 L \tan L + Gl_9$$
$$= \sqrt{1-k^2}\sec F\{\tan\eta + (\varphi-\eta)\sec^2\eta + (\varphi-\eta)^2\sec^2\eta\tan\eta + Gl_9\}. \quad (7)$$

Durch Entwicklung von $1 : \sqrt{1-e^2}$ in Formel (4) wird aber erhalten:

$$\varphi - \eta = \eta\left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{1}{6}k^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\eta^2 - \frac{1}{30}k^2\eta^4 + Gl_8\right). \quad (8)$$

Die Substitution dieses Ausdrucks, sowie desjenigen für $\lambda - L$ aus (5) in (7) giebt nun mit Benutzung der Relation $\sec^2 = 1 + \tan^2$:

$$\left. \begin{array}{l} \tan L + \frac{1}{2}e^2\eta\cos F \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{5}{8}e^4 + \frac{1}{8}k^4 + \frac{1}{4}e^2k^2 \\ + \frac{1}{4}k^2\eta^2 + \tan^2 L\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}e^2\right) \end{array} \right\} \\ \qquad + \frac{1}{4}e^4\eta^2\cos^2 F\tan L + Gl_9 \end{array} \right\} = \quad (9)$$

$$=\sqrt{1-k^2}\sec F\left\{\begin{array}{c}\tan\eta+\eta\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6\right)\\ +\frac{1}{6}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)k^2\eta^3-\frac{1}{30}k^2\eta^5\\ +\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{1}{6}k^2\eta^2\right)\eta\tan^2\eta+\frac{1}{4}e^4\eta^2\tan\eta+Gl_9\end{array}\right\}.$$

Die *rechte* Seite dieser Gleichung geht durch Entwicklung von $\sqrt{1-k^2}$ in die Reihe $1-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{8}k^4-\frac{1}{16}k^6-\cdots$ und durch teilweise Substitution von $\tan\eta=\eta+\frac{1}{3}\eta^3+\frac{2}{15}\eta^5+\cdots$ über ir folgenden Ausdruck:

$$\sec F\left\{\begin{array}{l}\tan\eta+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{8}e^4-\frac{1}{8}k^4-\frac{1}{4}e^2k^2\\ +\frac{5}{16}e^6-\frac{1}{16}k^6-\frac{3}{16}e^4k^2-\frac{1}{16}e^2k^4\end{array}\right\}\eta\\ +\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{5}{8}e^4-\frac{1}{8}k^4\right)\eta^3\\ +\left(\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{15}k^2\right)\eta^5+Gl_9.\end{array}\right\}\quad(10)$$

Man erkennt nun zunächst durch Vergleichung mit der linken Seite von (9), dafs

$$\tan L=\sec F\tan\eta+\eta\sec F\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}e^2\cos^2F\right)+Gl_5,$$

d. h., da wegen $k^2=e^2\sin^2F$ die Parenthese verschwindet, dafs

$$\tan L=\sec F\tan\eta+Gl_5.\quad(11)$$

Mit dieser Relation eliminieren wir in den kleinen Gliedern von (9) $\tan^2L$ und $\tan L$. Die linke Seite von (9) geht damit über in:

$$\tan L+\eta\cos F\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{1}{8}e^2k^2+\frac{1}{16}e^2k^4+\frac{1}{8}e^4k^2+\frac{5}{16}e^6\right)$$
$$+\eta^3\cos F\left(\frac{1}{4}e^4+\frac{1}{8}e^2k^2\right)+\eta^3\sec F\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{1}{8}e^2k^2\right)$$
$$+\eta^5\sec F\cdot\frac{1}{3}e^2+Gl_9.$$

Setzt man hier noch in dem 2. und 3. Gliede für $e^2\cos F$ den Wert $e^2\cos^2F.\sec F$, d. i. $(e^2-k^2)\sec F$, so erhält man für die *linke* Seite von (9) den Ausdruck:

$$\tan L+\sec F\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{8}e^4-\frac{1}{8}k^4-\frac{1}{4}e^2k^2\\ +\frac{5}{16}e^6-\frac{1}{16}k^6-\frac{3}{16}e^4k^2-\frac{1}{16}e^2k^4\end{array}\right\}\eta\\ +\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{5}{8}e^4-\frac{1}{8}k^4\right)\eta^3+\frac{1}{3}e^2\eta^5+Gl_9.\end{array}\right\}\quad(12)$$

Vergleicht man dies endlich noch mit dem Ausdruck (10) für die rechte Seite von (9), so erhält man die einfache Formel:

$$\tan L_{1.2} = \tan \eta \sec F\left(1 + \frac{1}{15} k^2 \eta^4 + Gl_8\right). \tag{13}$$

Geht man nur bis zur 7. Ordnung, so reicht es sogar aus, $\tan L = \tan \eta \sec F$ zu setzen. Selbst für $\eta = 0{,}1$ beeinflufst das Glied $k^2\eta^4$ der Parenthese rechter Hand die 8. Decimale des $\log \tan L$ höchstens mit 2 Einheiten.

In Bezug auf die Konvergenz der in der Parenthese rechter Hand von (13) auftretenden Reihe ist nun noch nachträglich zu erörtern, inwieweit die Anwendung der Reihe (6) zulässig ist. Es können dabei indes nur Zweifel für die Anwendung auf $u = L$ entstehen und zwar hier, weil trotz der Voraussetzung über η als einer Gröfse 1. Ordnung doch L in der Nähe des Pols sehr grofs werden kann. Diese Anwendung setzt aber, wenn wir entsprechend einer Multiplikation von (13) mit $\cos F$ sogleich diesen Faktor anbringen:

$$\begin{aligned}\tan\lambda \cos F = \tan L \cos F + (\lambda - L)\cos F \sec^2 L + (\lambda - L)^2 \cos F \sec^2 L \tan L \\ + (\lambda - L)^3 \cos F \sec^2 L\left(\tan^2 L + \frac{1}{3}\right) + \cdots\end{aligned} \tag{13*}$$

Bleibt man, wie geschehen, bei $(\lambda - L)^2$ stehen, so ist der Rest gleich

$$(\lambda - L)^3 \cos F \sec^2 L' \left(\tan^2 L' + \frac{1}{3}\right), \tag{14}$$

wobei L' ein nicht näher bekannter, zwischen L und λ gelegener Wert ist (S. 25). Für $(\lambda - L)$ können wir in ausreichender Annäherung hierin $\frac{1}{2} e^2 \eta \cos F$ setzen; nehmen wir aufserdem für $\sec^2 L'$ den Wert $1 + \tan^2 L'$, so reduziert sich die Frage, ob der Rest auch in der Nähe des Pols vernachlässigt werden kann, auf die Untersuchung des Ausdrucks:

$$\frac{1}{8} e^6 \eta^3 (\tan L' \cos F)^4. \tag{14*}$$

Hierin setzen wir $L' = \lambda - \frac{1}{2} \varkappa e^2 \eta \cos F$, wobei $\varkappa$ keinesfalls die 1 wesentlich überschreitet. Daher ist

$$\tan L' \cos F = \frac{\tan\lambda \cos F - \tan\left(\frac{1}{2} \varkappa e^2 \eta \cos F\right) \cos F}{1 + \tan\lambda \tan\left(\frac{1}{2} \varkappa e^2 \eta \cos F\right)},$$

Obige Entwicklungen zeigen aber, dafs $\tan\lambda \cos F = \sqrt{1 - k^2} \tan\varphi$, also sehr nahe gleich $\tan\eta$ ist. Mithin ist nicht nur der Nenner im

vorstehenden Ausdruck rechter Hand für kleine Werte von η stets nahezu gleich 1, sondern man sieht auch leicht, dafs allgemein $\tan L' \cos F$ nahezu gleich $\tan \eta$, also eine Gröfse 1. Ordnung ist.

Hierdurch ist gezeigt, dafs das oben besonders hervorgehobene Restglied (14*) und damit ebenso der ganze Rest (14) auch am Pol eine *kleine* Gröfse innerhalb der vernachlässigten Ordnungen bleibt.

Die Formel (13) ist demnach für kleine Werte η auch in der Nähe des Poles brauchbar.

§ 9. Fortsetzung: Meridiankonvergenz. Das sphärische Hilfsdreieck giebt zur Berechnung der Meridiankonvergenz t die Formel:

$$\tan t = -\sin\varphi \tan\beta_F. \tag{1}$$

Hierin setzen wir

$$\tan\beta_F = \sqrt{1-e^2}\tan F \tag{2}$$

und

$$\sin\varphi = \sin\big(\eta + (\varphi-\eta)\big) = \sin\eta + (\varphi-\eta)\cos\eta - \frac{1}{2}(\varphi-\eta)^2\sin\eta + Gl_9.$$

Mit Rücksicht auf den Wert von $(\varphi - \eta)$ nach Formel (8) S. 423 läfst sich hieraus nach und nach ableiten:

$$\sqrt{1-e^2}\sin\varphi = \left\{\begin{array}{c} \sin\eta\left(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6\right) \\ +(\varphi-\eta)\left(1-\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{24}\eta^4\right)\left(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4\right) \\ -\frac{1}{2}\eta(\varphi-\eta)^2+Gl_9 \end{array}\right\}$$

oder

$$\sqrt{1-e^2}\sin\varphi = \sin\eta + \frac{1}{6}\eta^3(k^2-e^2)(1+e^2) + \frac{1}{60}\eta^5(e^2-7k^2) + Gl_9. \tag{3}$$

Damit ergiebt sich aus (1), wenn man noch auf die Formel $k^2 = e^2\sin^2 F$ Rücksicht nimmt:

$$\tan t = -\tan F\left(\sin\eta - \frac{1}{6}\eta^3 e^2(1+e^2)\cos^2 F + \frac{1}{60}\eta^5 e^2(1-7\sin^2 F) + Gl_9\right).$$

Zieht man hier endlich $\sin\eta$ als Faktor, wobei zu beachten, dafs $\eta : \sin\eta = 1 + \frac{1}{6}\eta^2 + Gl_4$ ist, so folgt:

$$\tan t = -\sin\eta\tan F\left\{1 - \frac{1}{6}\eta^2\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2 F + \frac{1}{90}\eta^4 e^2(8\cos^2 F - 9) + Gl_8\right\}. \tag{4}$$

Die Gültigkeit dieser Formel ist für kleine Werte von η unzweifelhaft.

§ 10. **Fortsetzung: Breitendifferenz.** Aus dem Formelsystem (9) S. 126 entnehmen wir die im sphärischen Hilfsdreieck stattfindende Gleichung:

$$\sin(\beta_F - \beta_2) = -\tan t \cos\beta_F \tan\frac{\lambda}{2}. \tag{1}$$

Um linker Hand die Differenz der geographischen Breiten zu erhalten, benutzen wir die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta_F &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-k^2}}\sin F & \cos\beta_F &= \frac{\cos F}{\sqrt{1-k^2}}\\ \sin\beta_2 &= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B_2}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} & \cos\beta_2 &= \frac{\cos B_2}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus folgt durch Bildung von $\sin\beta_F\cos\beta_2 - \cos\beta_F\sin\beta_2$ sofort:

$$\sin(\beta_F - \beta_2) = \sin(F - B_2)\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}.$$

Es ist daher:

$$\sin(F - B_2) = -\tan t\cos F\tan\frac{\lambda}{2}\,\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{3}$$

in welche Formel nunmehr für λ noch L einzuführen ist.

Es ist aber, weil identisch $\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(\lambda - L)$, mittelst der Entwicklung (6) S. 423:

$$\cos F\tan\frac{\lambda}{2} = \cos F\left\{\tan\frac{L}{2} + \frac{\lambda - L}{2}\sec^2\frac{L}{2} + \left(\frac{\lambda - L}{2}\right)^2\sec^2\frac{L}{2}\tan\frac{L}{2} + \cdots\right\}, \tag{4}$$

worin nach (5) S. 423 zu setzen ist:

$$\frac{\lambda - L}{2} = \frac{1}{4}e^2\eta\cos F\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}e^2\right) + Gl_7.$$

Man hat nun zu beachten, dafs zufolge Formel (13) S. 425 L absolut genommen 90^0 nicht übersteigen kann, $\tan\frac{L}{2}$ also höchstens gleich 1 wird. (Diese Grenzwerte treten ein, wenn Punkt F in den Pol fällt.) Damit ist ersichtlich, dafs die Entwicklung (4) auch am Pole konvergiert, denn ihre Glieder sind sämtlich kleiner als die entsprechenden Glieder der Entwicklung (13*) S. 425. Es ist insbesondere auch $\cos F\tan\frac{L}{2}$ bis zum Pole eine kleine Gröfse 1. Ordnung, weil der gröfsere Wert $\cos F\tan L$ dieses Verhalten hat.

Wir erhalten jetzt aus (4) durch Substitution des Wertes von $\frac{1}{2}(\lambda - L)$:

$$\cos F \tan\frac{\lambda}{2} = \cos F \left\{ \begin{array}{l} \tan\frac{L}{2} + \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{16}e^2k^2 + \frac{3}{16}e^4\right)\eta\cos F \\ \qquad + \frac{1}{4}e^2\eta\cos F\tan^2\frac{L}{2} + Gl_7 \end{array} \right\},$$

womit der Ausdruck (3) für $\sin(F - B_2)$ übergeht in:

$$\sin(F - B_2) = -\tan t\cos F\left\{\tan\frac{L}{2} + \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{16}e^2k^2 + \frac{3}{16}e^4\right)\eta\cos F\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}e^2\eta\cos F\tan^2\frac{L}{2} + Gl_7\right\}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (5)$$

Die Entwicklung des letzten Faktors rechter Hand giebt, wie leicht zu ersehen ist:

$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1-e^2}} = 1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 B_2 + e^4\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sin^2 B_2 - \frac{1}{8}\sin^4 B_2\right) + Gl_6, \quad (6)$$

worin wir zunächst für B_2 die Breite F einführen. Die vorhergehende Gleichung zeigt, dafs man mit Rücksicht auf Formel (4) S. 426 setzen kann:

$$B_2 - F = -\eta\sin F\tan\frac{L}{2}(1 + Gl_2).$$

Substituiert man dies in die hier stets gültige Reihenentwicklung:

$$\cos^2 B_2 = \cos^2 F - (B_2 - F)\sin 2F - (B_2 - F)^2\cos 2F$$
$$+ \frac{2}{3}(B_2 - F)^3\sin 2F + \cdots,$$

so wird mit Benutzung der Formel $\cos 2F = 2\cos^2 F - 1$ ohne Schwierigkeit erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 B_2 = \cos^2 F + \eta\sin F\sin 2F\tan\frac{L}{2} + \eta^2\sin^2 F\tan^2\frac{L}{2} + Gl_4 \\ \sin^2 B_2 = \sin^2 F + Gl_2. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Hiermit läfst sich (6) auf nachstehende Form bringen:

$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1-e^2}} = 1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 F + e^4\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sin^2 F - \frac{1}{8}\sin^4 F\right)$$
$$+ e^2\eta\sin^2 F\cos F\tan\frac{L}{2} + \frac{1}{2}e^2\eta^2\sin^2 F\tan^2\frac{L}{2} + Gl_6.$$

Dies vereinfacht sich noch, wenn wir die Relation

$$\tan\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\tan L\left(1 - \tan^2\frac{L}{2}\right)$$

benutzen und mit Rücksicht auf (13) S. 425 setzen:

$$\cos F \tan \frac{L}{2} = \frac{1}{2}\eta\left(1 - \tan^2\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{6}\eta^3\left(1 - \tan^2\frac{L}{2}\right) + Gl_5. \tag{8}$$

Man erhält dann ohne Mühe:

$$\frac{\sqrt{1 - e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1 - e^2}} = \left\{\begin{matrix} 1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 F + e^4\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sin^2 F - \frac{1}{8}\sin^4 F\right) \\ + \frac{1}{2}e^2\eta^2\sin^2 F + Gl_6. \end{matrix}\right\} \tag{9}$$

Indem wir dies in dem Ausdruck (5) substituieren, setzen wir zugleich daselbst im 2. Gliede der grofsen Parenthese:

$$\eta = \eta\left(1 - \tan^2\frac{L}{2}\right) + \eta\tan^2\frac{L}{2} = 2\cos F\tan\frac{L}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\eta^2\right) + \eta\tan^2\frac{L}{2} + Gl_5$$

und erhalten zunächst für die grofse Parenthese von (5) den Ausdruck:

$$\tan\frac{L}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^2k^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{1}{6}e^2\eta^2\right)\cos^2 F + \frac{1}{2}e^2\eta\cos F\tan\frac{L}{2} + Gl_6\right\}.$$

Hierin setzen wir endlich noch im letzten Gliede für $\cos F\tan\frac{L}{2}$ den gleichen Wert $\frac{1}{2}\eta\left(1 - \tan^2\frac{L}{2}\right) + Gl_3$ und gelangen sodann nach einfachen Reduktionen mit Rücksicht auf die Beziehung $k = e\sin F$ zu der Formel:

$$\sin(F - B_2) = -\tan t\cos F\tan\frac{L}{2}\left\{\begin{matrix} 1 + (e^2 + e^4)\cos^2 F + Gl_6 \\ + e^2\eta^2\left(\frac{3}{4}\sin^2 F + \frac{1}{12}\cos^2 F - \frac{1}{4}\tan^2\frac{L}{2}\right) \end{matrix}\right\}. \tag{10}$$

Setzt man hierin für $\tan t$ seinen Wert nach (4) S. 426, so folgt auch:

$$\sin(F - B_2) = \sin\eta\sin F\tan\frac{L}{2}\left\{\begin{matrix} 1 + (e^2 + e^4)\cos^2 F + Gl_6 \\ + e^2\eta^2\left(\frac{3}{4}\sin^2 F - \frac{1}{12}\cos^2 F - \frac{1}{4}\tan^2\frac{L}{2}\right) \end{matrix}\right\}. \tag{11}$$

Diese Formeln lassen sich noch vereinfachen, wenn man für eine vorläufig nicht näher bestimmte Breite zwischen B_2 und F das Verhältnis $\varrho_n : \varrho_m$ einführt. Sei die Breite $F + \varkappa(B_2 - F)$, so ist:

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m} = \frac{1 - e^2\sin^2(F + \varkappa(B_2 - F))}{1 - e^2} = 1 + (e^2 + e^4)\cos^2\left(F + \varkappa(B_2 - F)\right) + Gl_6.$$

Man hat aber, wobei die ähnliche Reihenentwicklung für $\cos^2 B_2$ auf Seite 428 zu beachten ist:

$$\cos^2(F+\varkappa(B_2-F))=\cos^2F-\varkappa(B_2-F)\sin 2F-\varkappa^2(B_2-F)^2\cos 2F+Gl_4$$
$$=\cos^2 F+2\varkappa\eta\sin^2 F\cos F\tan\frac{L}{2}$$
$$+\varkappa^2\eta^2\sin^2 F\tan^2\frac{L}{2}+Gl_4$$
$$=\cos^2 F+\varkappa\eta^2\sin^2 F\left(1-(1-\varkappa)\tan^2\frac{L}{2}\right)+Gl_4.$$

Es ist daher für die Breite $F+\varkappa(B_2-F)$:

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m}=1+(e^2+e^4)\cos^2 F+\varkappa e^2\eta^2\sin^2 F\left(1-(1-\varkappa)\tan^2\frac{L}{2}\right)+Gl_6. \quad (12)$$

Die Vergleichung mit (10) und (11) zeigt, dafs es vorteilhaft ist, $\varkappa=\frac{3}{4}$ zu nehmen. Dann wird:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(F-B_2)=\left\{\begin{array}{l}=-\tan t\cos F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{\varrho_n}{\varrho_m}\\ \times\left\{1+e^2\eta^2\left(+\frac{1}{12}\cos^2F+\left[\frac{3}{16}\sin^2F-\frac{1}{4}\right]\tan^2\frac{L_{1.2}}{2}\right)+Gl_6\right\}\\ =+\sin\eta\sin F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{\varrho_n}{\varrho_m}\\ \times\left\{1+e^2\eta^2\left(-\frac{1}{12}\cos^2F+\left[\frac{3}{16}\sin^2F-\frac{1}{4}\right]\tan^2\frac{L_{1.2}}{2}\right)+Gl_6\right\}\end{array}\right.\\ \frac{\varrho_n}{\varrho_m}=\frac{W^2}{1-e^2}\text{ für die geogr. Breite }F+\frac{3}{4}(B_2-F).\end{array}\right\}\quad(13)$$

Die Anwendung dieser Formeln setzt aber eine indirekte Rechnung voraus. Zieht man direkte Rechnung vor, so ist $\varkappa=$ null zu setzen. Damit findet sich:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(F-B_2)=\left\{\begin{array}{l}=-\tan t\cos F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{\varrho_n}{\varrho_m}\\ \times\left(1+e^2\eta^2\left[\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\cos^2F-\frac{1}{4}\tan^2\frac{L_{1.2}}{2}\right]+Gl_6\right)\\ =+\sin\eta\sin F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{\varrho_n}{\varrho_m}\\ \times\left(1+e^2\eta^2\left[-\frac{1}{12}+\frac{5}{6}\sin^2F-\frac{1}{4}\tan^2\frac{L_{1.2}}{2}\right]+Gl_6\right)\end{array}\right.\\ \frac{\varrho_n}{\varrho_m}=\frac{W^2}{1-e^2}\text{ für die geographische Breite }F.\end{array}\right\}\quad(14)$$

In den Formeln (13) und (14) wird man $e^2\eta^2\tan^2\frac{L}{2}$ vernachlässigen können, sobald man nicht dem Pole nahe ist, weil alsdann dieses Glied nur die 6. Ordnung hat.

§ 11. **Fortsetzung: Zusammenstellung.** Für die nachfolgende Zusammenstellung wählten wir die Formeln mit teilweise indirekter Rechnung und brachten sie in logarithmische Form. Die Formel für $B_1 - F$ ist dieselbe wie S. 51 (6).

Gegeben: Die rechtwinkligen Koordinaten x und y von P_2 bezogen auf den Meridian von P_1, gegeben ferner die geographische Breite B_1 von P_1.

Gesucht: B_2, $L_{1.2}$ und die Meridiankonvergenz t.

$$\left.\begin{aligned}
&\log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) - \beta_4\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 - \beta_6\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^4 + Gl_8 \\
&\frac{\varrho''}{\varrho_m} = \frac{\varrho'' W_m^{\,3}}{a_0(1-e^2)} = [8{,}5126900.290 - 10]\, W_m^{\,3}, \quad W_m \text{ zum Argument } \tfrac{1}{2}(B_1 + F) \\
&\beta_4 = \frac{Mn}{2\varrho''^2}\left(\cos(B_1+F) - 7n\cos^2(B_1+F) + 5n\right) \qquad \beta_6 = -\frac{1}{20\varrho''^2}\beta_4 \\
&\left.\begin{aligned}
&\beta_4 = [2{,}93171 - 10]\left(\cos(B_1+F) - [8{,}069 - 10]\cos^2(B_1+F) + 0{,}00803\right) \\
&\beta_6 = -[8{,}070 - 20]\,\beta_4
\end{aligned}\right\}\ \text{für Einh. der 7. Dec.}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{\text{in Sek.}}{\eta} = \varrho''\frac{y}{\varrho_n} = y\,W_F\,\frac{\varrho''}{a_0} = y\,W_F\,[8{,}5097816.695 - 10] \\
&W_F \text{ zum Argument } F. \text{ (Man notiere die Änderung für 1').}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\log\tan L_{1.2} = \log(\tan\eta\sec F) + \frac{Me^2}{15\varrho''^4}\eta^4\sin^2 F + Gl_8 \\
&\log\frac{Me^2}{15\varrho''^4} = 2{,}0284 - 20 \text{ für Einh. der 7. Dec.}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\log\tan t = \log(-\sin\eta\tan F) - \frac{Me^2}{6(1-e^2)\varrho''^2}\eta^2\cos^2 F + \frac{Me^2}{90\varrho''^4}\eta^4(8\cos^2 F - 9) + Gl_8 \\
&\log\frac{Me^2}{6(1-e^2)\varrho''^2} = 3{,}05810 - 10 \quad \log\frac{Me^2}{90\varrho''^4} = 1{,}250 - 20;\ \text{beide für Einh. der 7. Dec.}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\log\sin(F - B_2) = \left\{\begin{aligned}
&\log\left(\sin\eta\sin F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{W^2}{1-e^2}\right) \\
&-\frac{1}{2}\cdot\frac{Me^2}{6(1-e^2)\varrho''^2}\eta^2\cos^2 F - \frac{Me^2}{16\varrho''^2}\eta^2(1 + 3\cos^2 F)\tan^2\frac{L}{2} + Gl_6
\end{aligned}\right\} \\
&W \text{ zum Argument } F - \tfrac{3}{4}(F - B_2);\ \text{ist aus } W_F \text{ abzuleiten.} \\
&-\log(1 - e^2) = 0{,}0029083.595 \\
&\log\frac{Me^2}{16\varrho''^2} = 2{,}629 - 10 \text{ für Einh. der 7. Dec.}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

In den kleinen Gliedern ist η immer in Sekunden zu verstehen.

Vorstehende Formeln besitzen noch für Distanzen gleich $0{,}1\,a_0$ eine so beträchtliche Schärfe, daſs zu deren Ausnutzung 9ziffrige Logarithmen erforderlich sind. Überdies sind unsrerseits die höchsten Glieder nur zur Untersuchung der Genauigkeit abgekürzter Formeln angesetzt.

§ 12. Fortsetzung: Berechnung von x, y und $\alpha_{2.1}$ aus s und $\alpha_{1.2}$. In den Formeln S. 419 setzen wir y_1 = null und beziehen K_0 auf einen Punkt, der um $\frac{2}{3}\,P_1F$ von P_1 nach F zu liegt, (vergl. Fig. 39 S. 421) der also die Breite $B_0 = B_1 - \frac{2}{3}(B_1 - F)$ hat. Da P_1F näherungsweise gleich u ist, so hat man demgemäſs zu substituieren:

$$y = \frac{1}{2}\,v \qquad x_1 = -\frac{2}{3}\,u \qquad x = -\frac{1}{6}\,u\,.$$

Beachtet man nun, daſs jetzt $\mathfrak{a}_{1.2}$ und $\alpha_{1.2}$ identisch werden, daſs auſserdem nach Fig. 39 S. 421 $\alpha_{2.1} = \mathfrak{a}_{2.1} + t$ ist, so ergiebt sich aus den Formeln (1) bis (4) S. 419:

$$u = s\cos\alpha_{1.2} \qquad v = s\sin\alpha_{1.2}$$

$$x = u\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{v^2}{\varrho^2} - \frac{1}{15}\frac{u^2v^2}{\varrho^4} + \frac{2}{15}\frac{v^4}{\varrho^4} - \frac{1}{36}e^2\frac{uv^2}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6\right\}$$

$$y = v\left\{1 - \frac{1}{6}\frac{u^2}{\varrho^2} - \frac{1}{15}\frac{u^2v^2}{\varrho^4} + \frac{1}{120}\frac{u^4}{\varrho^4} + \frac{1}{18}e^2\frac{u^3}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6\right\}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = -\varrho''\frac{uv}{2\varrho^2}\left(1 + \frac{5}{12}\frac{v^2}{\varrho^2} - \frac{1}{12}\frac{u^2}{\varrho^2} + Gl_4\right)$$

x, y und $\Delta\mathfrak{a}$ verschwinden bezw. mit u, v und uv, weshalb, wie angegeben, diese letzteren Gröſsen sich als Faktoren der betreffenden Ausdrücke ziehen lassen. Dadurch aber entsteht die Möglichkeit, dieselben in logarithmische Gestalt bringen zu können, worin sie lauten:

$$u = s\cos\alpha_{1.2} \qquad v = s\sin\alpha_{1.2} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c}\varrho = \dfrac{a_0}{\sqrt{K_0}} = \dfrac{b_0}{W_0^{\,2}} = \dfrac{[6{,}8031893]}{W_0^{\,2}} \\ W_0 \text{ zum Arg. } B_0 = B_1 + \frac{2}{3}(F - B_1)\text{, wobei } (F - B_1) \text{ in Min.} = [6{,}735n{-}10]\; u\,W_0^{\,2}\,;\end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\log x = \log u + \frac{1}{3}M\frac{v^2}{\varrho^2} - \frac{1}{15}M\frac{u^2v^2}{\varrho^4} + \frac{7}{90}M\frac{v^4}{\varrho^4} - \frac{1}{36}Me^2\frac{uv^2}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6 \tag{3}$$

$$\log y = \log v - \frac{1}{6}M\frac{u^2}{\varrho^2} - \frac{1}{15}M\frac{u^2v^2}{\varrho^4} - \frac{1}{180}M\frac{u^4}{\varrho^4} + \frac{1}{18}Me^2\frac{u^3}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6 \tag{4}$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta \mathfrak{a}} = \log \left(-\frac{1}{2}\varrho'' \frac{uv}{\varrho^2}\right) + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3} M \frac{v^2}{\varrho^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} M \frac{u^2}{\varrho^2} + Gl_4 \qquad (5)$$

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \varDelta\mathfrak{a} + t.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \log\left(\frac{1}{3}M\right) = 6{,}1606630 & \log\left(\frac{1}{15}M\right) = 5{,}4617 & \log\left(\frac{7}{90}M\right) = 5{,}5286 \\ \log\left(\frac{1}{6}M\right) = 5{,}8596330 & \log\left(\frac{1}{180}M\right) = 4{,}383 & \log\left(\frac{1}{18}Me^2\right) = 3{,}207 \\ \log\left(\frac{1}{2}\varrho''\right) = 5{,}0133951 & \log\left(\frac{1}{36}Me^2\right) = 2{,}906 & \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Für} \\ \text{Einh.} \\ \text{der} \\ \text{7. Dec.}\end{array}$$

Diese Formeln besitzen eine etwas geringere Genauigkeit als die des vorigen Paragraphen. Um eine entsprechende Genauigkeit zu erzielen, müfste man noch 2. Ordnungen weiter entwickeln.

Man kann indessen das rechtwinklige Dreieck P_1FP_2 auch mittelst des erweiterten *Legendre*schen Theorems auflösen. Dieses Verfahren giebt allerdings eine durchaus indirekte Auflösung. Von den in betracht kommenden Formeln entsprechen die (1) S. 362 den obigen und man kann dieselben aus jenen durch Reihenentwicklung herstellen (wie auch zur Prüfung geschehen ist). Wendet man die genaueren Formeln des § 10 S. 370 u. ff. an, so dürfte (11) S. 374 zur Berechnung des Excesses besonders passend erscheinen, wenn b und c bezw. als x und y genommen werden.

Dabei ist zu beachten, dafs, wie Fig. 39 S. 421 unmittelbar zeigt, bei gehöriger Berücksichtigung des Vorzeichens ε nichts anderes ist, als $-\varDelta\mathfrak{a}$. Das Vorzeichen von ε ist wie dasjenige von xy zu nehmen.

Für $(A - A^*)$ u. s. f. genügt es auch jetzt noch, wie aus § 14 S. 388 u. ff. zu ersehen ist, die einfachen Relationen (1) S. 362 beizubehalten.

§ 13. **Zahlenbeispiel I.** Wir wenden die Formeln der beiden vorigen Paragraphen auf das Beispiel S. 244 u. ff. an und benutzen dabei 7ziffrige Logarithmen unter Ansatz der 8. Stelle aus den Proportionalteilen.

Gegeben:

$$B_1 = 52^0\, 30'\, 16{,}7'' \qquad \alpha_{1.2} = 239^0\, 33'\, 0{,}68921''$$
$$s = 529979{,}5784^m.$$

Die *Formeln* des § 12 S. 432 führen nun zu folgenden Zahlen:

$$\left.\begin{array}{r} \log s = 5{,}7242591.6 \\ \log\cos\alpha_{1.2} = 9{,}7048223.3_n - 10 \\ \log\sin\alpha_{1.2} = 9{,}9355442.5_n - 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \log u = 5{,}4290814.9_n \\ \log v = 5{,}6598034.1_n \end{array}$$

$$B_0 = 52^0\,30',3 + \frac{2}{3}\,[6{,}735_n - 10 + 5{,}429_n + 9{,}997 - 10]$$

$$= 52^0\,30',3 + \frac{2}{3}\cdot 145' = 54^0\,7',0$$

$$\log W_0 = 9{,}9990465 - 10 \qquad \log \varrho = 6{,}8050963$$

$$\log \frac{u}{\varrho} = 8{,}6239852_n - 10 \qquad \log \frac{v}{\varrho} = 8{,}8547071_n - 10$$

$$\log \sin 2B_0 = 9{,}978 - 10\,.$$

Formel (3):	Formel (4):	Formel (5):
$5{,}4290814.9_n$	$5{,}6598034.1_n$	$2{,}4920874_n$
$+\ 7414.4$	$-\ 1281.2$	$+\ 7414$
$-\ 2.6$	$-\ 2.6$	$+\ 1854$
$+\ 8.9$	$-\ 0.1$	$-\ 641$
$+\ 0.2$	$-\ 0.1$	$\log \Delta\mathfrak{a}_{\text{in Sek.}} = 2{,}4929501_n$
$\log x = 5{,}4298235.8_n$	$\log y = 5{,}6596750.1_n$	$\Delta\mathfrak{a} = -\ 5'11{,}136''$.

Die *Formeln* des § 11 S. 431 führen jetzt zu den Werten:

Argument für W_m:

1. Annäherung: $52^0\,30',3 + \frac{1}{2}\cdot 145' = 53^0\,42',8$

$$\frac{\varrho'' x}{\varrho_m} = -\,8703{,}2'' = -\,2^0\,25',053$$

2. Annäherung: $52^0\,30{,}278' + 1^0\,12{,}527' = 53^0\,42{,}805'$

$$B_1 + F = 107^0\,25{,}6'$$
$$\log\cos(B_1 + F) = 9{,}476_n - 10$$
$$\log \beta_4 = 2{,}408_n - 10$$

$$\log x = 5{,}4298235.8_n$$
$$8{,}5126900.3 - 10$$

$$\text{Summa} = 3{,}9425136.1_n$$
$$3\log W_m = 9{,}9971689 \quad - 10$$

$$\log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = 3{,}9396825\ _n$$
$$3\log W_m = 9{,}9971688.1 - 10$$

$$\log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = 3{,}9396824.2_n$$
$$-\,\beta_4\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 = +\quad 1.9$$

$$\log (B_1 - F)_{\text{in Sek.}} = 3{,}9396826.1_n$$

$$B_1 - F = -\,2^0\,25'\,3{,}2722'' \qquad F = 54^0\,55'\,19{,}9722''.$$

Änderung von $\log W_F$ für 1' gleich $-\,3.98$

$$\log y = 5{,}6596750.1_n$$
$$8{,}5097816.7 - 10$$
$$\log W_F = 9{,}9990271.7 - 10$$

$$\eta = -\,4^0\,5'\,39{,}537'' \qquad \log \eta_{\text{in Sek.}} = 4{,}1684838.5_n$$

$$\begin{cases} \log\tan\eta = 8{,}8547988.0_n - 10 \\ \log\sec F = 0{,}2405679.2 \end{cases}$$
$$\log\tan L_{1.2} = 9{,}0953667.2_n - 10$$
$$L_{1.2} = -\ 7^0\ 6'\ 0{,}001''$$
$$\alpha_{2.1} = 65^0\ 16'\ 9{,}368''$$

$$\begin{cases} \log\sin\eta = 8{,}8536889.9_n - 10 \\ \log\tan F = 0{,}1535189.7 \\ -[3{,}058-10]\,\eta^2\cos^2 F = \quad -8.2 \end{cases}$$
$$\log\tan t = 9{,}0072071.4 - 10$$
$$t = +\ 5^0\ 48'\ 19{,}815''.$$

$$\begin{cases} \log\sin\eta = 8{,}8536890_n - 10 \\ \log\sin F = 9{,}9129511 - 10 \\ \log\tan\frac{L_{1.2}}{2} = 8{,}7926620_n - 10 \\ 2\log W_F = 9{,}9980543 - 10 \\ -\log(1-e^2) = 0{,}0029084 \\ -\frac{1}{2}\,8.2\ (\text{s. o.}) = \quad -\ 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \log\sin(F-B_2) = 7{,}5602644 - 10 \\ S = 4{,}6855739 - 10 \end{cases}$$
$$\log(F-B_2) = 2{,}8746905 \quad \text{in Sek.}$$

Der nebenan zuerst berechnete Wert von $\log(F-B_2)$ giebt $F-B_2 = 12'\ 29{,}36''$. Damit folgt als Argument von W: $F - 9{,}31'$ und $2\log W = 2\log W_F + 75$ Einh. d. 7. Dec. Addiert man diese 75 zu dem bisher berechneten Werte von $\log(F-B_2)$, so folgt genauer:

$$\log(F-B_2) = 2{,}8746980 \quad \text{in Sek.}$$
$$F - B_2 = \quad 12'\ 29{,}3729''$$
$$B_2 = 54^0\ 42'\ 50{,}599''.$$

Resultate:			nach S. 247.
	$B_2 = 54^0\ 42'\ 50{,}599''$		50,600''
	$L_{1.2} = 7\ \ 6\ \ 0{,}001$	östlich	0,000
	$\alpha_{2.1} = 65\ \ 16\ \ 9{,}368$		9,365.

§ 14. **Fortsetzung.** Auf das Dreieck P_1FP_2 wenden wir die *Formeln* des § 10 S. 370 u. ff. an, um x, y und $\Delta\alpha$ genauer kennen zu lernen. Nach den Angaben S. 244 u. ff., sowie nach der im vorigen Paragraphen angestellten Rechnung ist, wenn wir die Punkte P_1FP_2 vorübergehend mit CAB bezeichnen:

$C = 59^0\ 33'\ 0{,}68921''$	$\log c = 5{,}6596750.1$	$B_3 = 52^0\ 30'\ 16{,}7''$
$A = 90^0$	$\log a = 5{,}7242591.353$	$B_1 = 54\ \ 55\ \ 20{,}0$
$B = 30\ \ 32\ \ 10{,}447$	$\log b = 5{,}4298235.8$	$B_2 = 54\ \ 42\ \ 50{,}6$
$\varepsilon = \quad 5'\ 11{,}136''$		

Hierzu hat man zunächst:

$$\left.\begin{aligned} K_3 &= 0{,}9982777 \\ K_1 &= 0{,}9977392 \\ K_2 &= 0{,}9977849 \end{aligned}\right\} \quad \text{Mittel: } K = 0{,}99793393, \quad \log K = 9{,}9991017.9 - 10.$$

Ferner ergiebt sich als Inhalt F^* des ebenen Dreiecks in ausreichender Annäherung nach der Formel $F^* = \frac{1}{2} bc \sin\left(90^0 - \frac{1}{3}\varepsilon\right)$, da $\log \sin\left(90^0 - \frac{1}{3}\varepsilon\right) = 9{,}9999999.4-10$ ist:

$$\log F^* = 10{,}7884685.3\,.$$

Zum Zwecke des Übergangs auf $\log F$ ist jetzt weiter:

$\log \frac{c}{a_0} = 8{,}85504$	$\frac{c^2}{a_0^2} = 0{,}0051296$	$\frac{c^4}{a_0^4} = 0{,}0000263$
$\log \frac{a}{a_0} = 8{,}91962$	$\frac{a^2}{a_0^2} = 0{,}0069062$	$\frac{a^4}{a_0^4} = 0{,}0000476$
$\log \frac{b}{a_0} = 8{,}62518$	$\frac{b^2}{a_0^2} = 0{,}0017797$	$\frac{b^4}{a_0^4} = 0{,}0000032$
	$\frac{m^2}{a_0^2} = 0{,}0046052$	$\frac{n^4}{a_0^4} = 0{,}0000257$
	$= [7{,}66325-10]$	$= [5{,}410-10]$.

Formel (16) S. 367 giebt hiermit:

$$\left\{\begin{aligned} \log F^* &= 10{,}7884685.3 \\ \frac{1}{8} M \frac{m^2 K}{a_0^2} &= +\quad 2494.8 \\ M \frac{8n^4 + 9m^4}{1920\, a_0^4} &= +\qquad 1.0 \end{aligned}\right.$$
$$\log F = 10{,}7887181.1$$

$\log \frac{1}{8} M = 5{,}73469$ f. Einh. der 7. Dec.

$$\left\{\begin{aligned} \log F &= 10{,}7887181.1 \\ \log \frac{\varrho''}{a_0^2} &= 1{,}7051382.0-10 \end{aligned}\right.$$
$$\log\left(\varrho'' \frac{F}{a_0^2}\right) = 2{,}4938563.1$$

Zu Formel (1) S. 371 hat man nunmehr:

$$\sin B_3 = 0{,}79340$$
$$\sin B_1 = 0{,}81837$$
$$\sin B_2 = 0{,}81628$$

$$(\sin B_1 - \sin B_2)^2 + (\sin B_2 - \sin B_3)^2 + (\sin B_3 - \sin B_1)^2 = 0{,}0011512$$

$$\frac{b^2+c^2}{a_0^2} \sin^2 B_1 + \frac{a^2+c^2}{a_0^2} \sin^2 B_2 + \frac{a^2+b^2}{a_0^2} \sin^2 B_3 \qquad = 0{,}01808$$

$$\left\{\begin{aligned} \varrho'' \frac{F}{a_0^2} K &= [2{,}4929581.0]\ \text{Sek.} = 5'\ 11{,}14161'' \\ \varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left(0{,}0011512 \frac{e^2}{6} - 0{,}01808 \frac{e^2}{12}\right) &= [7{,}4369_n - 10] = -\ 0{,}00273'' \end{aligned}\right.$$

$$\varepsilon = 5'\ 11{,}13888''.$$

Wendet man dagegen Formel (11) S. 374 an, so hat man:

$$\varepsilon = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} K + \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{m^4}{2 a_0^2} e^2 \sin^2 B_1 + \frac{b^2}{3 a_0^2} c^2 \cos^2 B_1 \\ + \frac{a^2 + 3 b^2 - c^2}{12 a_0^2} bc^2 \sin 2 B_1 \end{array} \right\} + \cdots$$

und findet für die 3 kleinen Glieder — 0,00321" + 0,00041" + 0,00002" also zusammen — 0,00278", d. i. wesentlich dasselbe als vorher. Den zuerst gefundenen Wert behalten wir als den vermutlich genaueren bei (S. 382).

Zur Berechnung von $A - A^*$ u. s. f. genügen die Formeln (1) S. 362, da die höheren Glieder erst in der 5. Decimalstelle der Sekunden von Einfluſs werden, wie Formel (2) S. 389 zeigt. Es folgt:

$$C - C^* = 103{,}71296'' \left(1 - \frac{1}{20} 0{,}000524\, K + \frac{1}{4K} 0{,}0003437\right)$$

$$A - A^* = 103{,}71296 \left(1 - \frac{1}{20} 0{,}002301\, K - \frac{1}{4K} 0{,}0001947\right)$$

$$B - B^* = 103{,}71296 \left(1 + \frac{1}{20} 0{,}002825\, K - \frac{1}{4K} 0{,}0001490\right)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} C - C^* = 103{,}71296'' + 0{,}00621'' = 1'\ 43{,}71917'' \\ A - A^* = 103{,}71296 - 0{,}01697 = 1\ \ 43{,}69599 \\ B - B^* = 103{,}71296 + 0{,}01076 = 1\ \ 43{,}72372 \end{array}\right\}$$

$$\varepsilon = 5'\ 11{,}13888''$$

und im ebenen Dreieck:

C^* =	59° 31′ 16,97004″	log sin = 9,9354158.096—10	log c = 5,6596749.99[illegible]
A^* =	89 58 16,30401	9,9999999.450—10	log a = 5,7242591.35[illegible]
B^* =	30 30 26,72595	9,7055643.912—10	log b = 5,4298235.81[illegible]
umma =	180 0 0,00000		

Hiernach ist:

$$\log x = 5{,}4298235.815_n \qquad \log y = 5{,}6596749.999_n\,.$$

Dazu tritt noch mittelst des oben erhaltenen Wertes ε, der sich durch Anwendung der eben gefundenen Werte von x und y nicht merklich ändern würde:

$$\varDelta\mathfrak{a} = -\ 5'\ 11{,}13888''.$$

Die Reihen des § 12 S. 432 geben bei der Berechnung von x u. y:

$$\left\{\begin{array}{rr} & 5{,}4290814.956_n \\ + & 7414.427 \\ - & 2.625 \\ + & 8.859 \\ + & 0.165 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rr} & 5{,}6598033.984_n \\ - & 1281.161 \\ - & 2.625 \\ - & 0.076 \\ - & 0.114 \end{array}\right.$$

$$\log x = 5{,}4298235.782_n \qquad \log y = 5{,}6596750.008_n$$

Die *Formeln* des § 11 S. 431 führen nunmehr zu folgenden Zahlen:

$$B_1 + F = 107^0\,25'\,36{,}672''$$

Arg. für $W_m = 53^0\,42{,}8056'$

$$\left.\begin{array}{rl} \cos(B_1+F) = & -\,0{,}29949 \\ -\,[8{,}069-10]\cos^2(B_1+F) = & -\qquad 105 \\ & +\qquad 803 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Summa:} \\ -\,0{,}29251 = \\ {[9{,}46614_n-10]} \end{array}$$

$$\log \beta_4 = 2{,}39785_n - 10 \qquad \log \beta_6 = 0{,}47-20$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log x = & 5{,}4298235.815_n \\ & 8{,}5126900.290\ -10 \\ 3\log W_m = & 9{,}9971687.926\ -10 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = & 3{,}9396824.031_n \\ -\,\beta_4\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 = & +\quad 1.893 \\ -\,\beta_6\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^4 = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log (B_1 - F)} = 3{,}9396825.924_n$$

$$B_1 - F = -\,2^0\,25'\,3{,}27273'' \qquad F = 54^0\,55'\,19{,}97273''.$$

Arg. für $W_F = 54^0\,55{,}33288'$

$$\left.\begin{array}{rl} \log y = & 5{,}6596749.999_n \\ & 8{,}5097816.695\ -10 \\ W_F = & 9{,}9990271.646\ -10 \end{array}\right\}$$

$$\eta = -\,4^0\,5'\,39{,}536740'' \qquad \underset{\text{in Sek.}}{\log \eta} = 4{,}1684838.340_n$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\tan\eta = & 8{,}8547988.144_n - 10 \\ \log\sec F = & 0{,}2405678.736 \\ {[2{,}028-20]}\,\eta^4\sin^2 F = & +\quad 0.034 \end{array}\right.$$

$$\log\tan L_{1.2} = 9{,}0953666.914_n - 10$$

$$L_{1.2} = -\,7^0\,6'\,0{,}00006''$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\sin\eta &= 8{,}8536890.221_n - 10 \\ \log\tan F &= 0{,}1535189.519 \\ -[3{,}05810-10]\,\eta^2\cos^2 F &= \quad -\quad 8.202 \\ +[1{,}250-20]\,\eta^4(8\cos^2 F - 9) &= \quad -\quad 0.037 \end{aligned}\right.$$

$$\log\tan t = 9{,}0072071.501 \;-10$$

$$\alpha_{2.1} = 65^0\,16'\,9{,}36537'' \left\{\begin{aligned} t &= \;\;5^0\,48'\,19{,}81504'' \\ \Delta\mathfrak{a} &= -\;\;5\;\;11{,}13888 \\ \alpha_{1.2} - 180^0 &= 59\;\;33\;\;\;0{,}68921 \end{aligned}\right.$$

Argument für W $= 54^0\,45{,}9657'$

$$\left\{\begin{aligned} \log\sin\eta &= 8{,}8536890.22_n - 10 \\ \log\sin F &= 9{,}9129510.78 \;-10 \\ \log\tan\frac{L_{1.2}}{2} &= 8{,}7926619.64_n - 10 \\ 2\log W &= 9{,}9980617.99 \;-10 \\ -\log(1-e^2) &= 0{,}0029083.60 \\ -\frac{1}{2}\,8.202\;(\text{s. o.}) &= \quad -\quad 4.10 \\ -[2{,}629-10]\,\eta^2(1+3\cos^2 F)\tan^2\frac{L_{1.2}}{2} &= \quad -\quad 0.07 \end{aligned}\right.$$

$$\log\sin(F - B_2) = 7{,}5602718.06 \;-10$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \log\left(\varrho''\sin(F - B_2)\right) + \frac{1}{6} M \sin^2(F - B_2) + \cdots$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \left\{\begin{aligned} &7{,}5602718.06-10 \\ &5{,}3144251.33 \\ &+\quad 9.55 \end{aligned}\right\} = 2{,}8746978.94$$

$$F - B_2 = +\,12'\,29{,}37275'' \qquad B_2 = 54^0\,42'\,50{,}59998''.$$

Die vorstehenden Rechnungen geben mithin folgende

		nach S. 244 u. ff.:	nach S. 256 u. ff.:
Resultate:	$B_2 = 54^0\,42'\,50{,}59998''$	60000	59998
	$L_{1.2} = \;7\;\;6\;\;0{,}00006$ östlich	00002	00002
	$\alpha_{2.1} = 65\;\;16\;\;9{,}36537$	36534	36530

Man erkennt hieraus die grofse Genauigkeit der Formeln des § 11 S. 431. Mehr zu zeigen, ist nicht die Absicht der letzten Rechnungen, denn es läfst sich nicht verkennen, dafs die Anwendung der

Formeln in solchen Fällen wie demjenigen des vorliegenden Paragraphen durch die Notwendigkeit der Auflösung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks eine mühsame wird.

§ 15. Rechtwinklige Koordinaten, Entfernung und Azimute aus geographischen Positionen. Wir gehen am bequemsten hierbei von den Formeln des § 11 S. 431 aus, die mit Beachtung der Formeln für die Kugel S. 129 umzuformen sind. Während wir aber die Formeln des § 11 unter der Voraussetzung, dafs $s : a_0$ eine Gröfse 1. Ordnung ist, als bis zum Pole gültig nachgewiesen haben, setzen wir der Einfachheit halber jetzt nicht nur $s : a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ als eine Gröfse 1. Ordnung voraus, sodafs am Pole η sec F die 1. Ordnung hat und die Ordinate η eine kleine Gröfse höherer Ordnung sein mufs.

Nach S. 425 (13) ist:

$$\tan\eta = \tan L_{1.2} \cos F\left(1 - \frac{1}{15} k^2\eta^4 + Gl_8\right), \tag{1}$$

woraus wir, da für die Kugel $\sin\eta = \sin L \cos B_2$ ist, zunächst herleiten:

$$\sin\eta = \sin L \cos F \,.\, \cos\eta \sec L\left(1 - \frac{1}{15} k^2\eta^4 + Gl_8\right).$$

Setzt man hierin für $\cos\eta$ und $\sec L$ die Reihenentwicklungen, so ergiebt sich:

$$\sin\eta = \sin L \cos F\left(1 + \frac{1}{2} L^2 + \frac{5}{24} L^4 + \frac{61}{720} L^6 + Gl_8\right)$$
$$\times\left(1 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{24}\eta^4 - \frac{1}{720}\eta^6 - \frac{1}{15}k^2\eta^4 + Gl_8\right). \tag{2}$$

Nun ist ferner nach S. 429 (11):

$$\sin(F - B_2) = \sin\eta \tan\frac{L}{2} \sin F\left(1 + e^2\cos^2 F + e^4\cos^2 F\right.$$
$$\left. - \frac{1}{12} e^2\eta^2 + \frac{5}{6} e^2\eta^2 \sin^2 F + Gl_6\right),$$

was wir im Hinblick auf die für die Kugel gültige Formel $\sin(F - B_2) = \sin^2\frac{L}{2} \sin 2B_2 \sec\eta$ mittelst Substitution des Ausdrucks (2) überführen in:

$$\sin(F - B_2) = \sin^2\frac{L}{2}\sin 2F\left\{\begin{matrix} 1 + \frac{L^2 - \eta^2}{2} + e^2\cos^2 F \\ + e^4\cos^2 F + \frac{\eta^4 + 5L^4}{24} \\ - \frac{1}{4}\eta^2 L^2 - \frac{1}{12}e^2\eta^2 + \frac{5}{6}e^2\eta^2\sin^2 F \\ + \frac{L^2 - \eta^2}{2} e^2\cos^2 F + Gl_6 . \end{matrix}\right\} \tag{3}$$

Entwickelt man ferner aus (1) η nach Potenzen von L, so folgt:

$$\eta = L\cos F\left(1 + \frac{1}{3} L^2 \sin^2 F + \frac{1}{15} L^4 \sin^2 F\,[3\sin^2 F - 1] + Gl_6\right). \quad (4)$$

Hiernach ist:

$$\eta^2 = L^2\cos^2 F\left(1 + \frac{2}{3} L^2 \sin^2 F + \frac{1}{45} L^4 \sin^2 F[23\sin^2 F - 6] + Gl_6\right). \quad (5)$$

Damit gehen (2) und (3) bezw. über in:

$$\sin\eta = \sin L\cos F\left\{\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2} L^2 \sin^2 F + \frac{1}{24} L^4 (5 - 9\cos^2 F)\sin^2 F \\ + \frac{1}{720} L^6 \sin^2 F(61 - 270\cos^2 F + 225\cos^4 F) \\ - \frac{1}{15} e^2 L^4 \sin^2 F\cos^4 F + Gl_8 \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\sin(F - B_2) = \sin^2\frac{L}{2}\sin 2F\left\{\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2} L^2 \sin^2 F + e^2\cos^2 F + e^4\cos^2 F \\ - \frac{1}{12} e^2 L^2 \cos^2 F + \frac{4}{3} e^2 L^2 \sin^2 F\cos^2 F \\ + \frac{1}{24} L^4 \sin^2 F(5 - 9\cos^2 F) + Gl_6. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Um rechter Hand in diesen Formeln F zu eliminieren, bilden wir zuerst in leicht ersichtlicher Weise:

$$\cos B_2 = \cos\left(F - (F - B_2)\right) = \cos F\cos(F - B_2) + \sin F\sin(F - B_2)$$
$$= \cos F\left(1 + \sin(F - B_2)\tan F - \frac{1}{2}\sin^2(F - B_2) + Gl_8\right),$$

wobei zu beachten, dafs $\sin(F - B_2)$ eine Gröfse 2. Ordnung ist. Es folgt:

$$\cos F = \cos B_2\left\{\begin{array}{c} 1 - \sin(F - B_2)\tan F + \sin^2(F - B_2)\left(\frac{1}{2} + \tan^2 F\right) \\ - \sin^3(F - B_2)\tan F\sec^2 F + Gl_8. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Mittelst (7) erhält man hieraus, wenn man zugleich für $\sin^2\frac{L}{2}$ die Reihe $\frac{1}{4} L^2\left(1 - \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{360} L^4 + Gl_6\right)$ anwendet:

$$\sin(F - B_2) = \frac{1}{4} L^2 \sin 2F\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{2} L^2 \sin^2 F + e^2\cos^2 F + e^4\cos^2 F \\ - \frac{1}{6} e^2 L^2 \cos^2 F + \frac{4}{3} e^2 L^2 \cos^2 F\sin^2 F \\ + \frac{1}{360} L^4 (61 - 195\cos^2 F + 135\cos^4 F) + Gl_6. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Setzt man dies in (8) ein, so findet sich:

$$\cos F = \cos B_2 \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} L^2 \sin^2 F + \frac{1}{24} L^4 \sin^2 F (4 - 3 \sin^2 F) \\ &- \frac{1}{2} e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F - \frac{1}{2} e^4 L^2 \sin^2 F \cos^2 F \\ &+ \frac{1}{12} e^2 L^4 \sin^2 F \cos^2 F (4 - 5 \sin^2 F) \\ &+ \frac{1}{720} L^6 \sin^2 F (-1 + 30 \cos^2 F - 45 \cos^4 F) + Gl_8 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und hiermit giebt (6):

$$\sin \eta = \sin L \cos B_2 \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F \\ &- \frac{1}{15} e^2 L^4 \sin^2 F \cos^2 F (5 - 9 \cos^2 F) \\ &- \frac{1}{2} e^4 L^2 \sin^2 F \cos^2 F + Gl_8. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Gröfse η, welche linker Hand vorkommt, setzt zur Erlangung ihrer Kenntnis F voraus. Um B_2 einzuführen, entwickeln wir:

$$\sin \eta = \sin \left(\frac{y}{a_0} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 F} \right) = \sin \left(\frac{y}{a_0} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 F}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} \right). \quad (12)$$

Man hat nun mittelst *Taylors* Satz:

$$1 - e^2 \sin^2 B_2 = 1 - e^2 \sin^2 F - e^2 \left(\sin 2F (B_2 - F) + \cos 2F (B_2 - F)^2 + Gl_6 \right)$$

und hieraus mit Benutzung von (9):

$$1 - e^2 \sin^2 B_2 = 1 - e^2 \sin^2 F + e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F \left(1 - \frac{1}{3} L^2 + L^2 \sin^2 F \right) + Gl_8.$$

Es ist daher:

$$\frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 F}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F - \frac{1}{2} e^4 L^2 \sin^2 F \cos^2 F$$
$$+ \frac{1}{2} e^2 L^4 \sin^2 F \cos^2 F \left(\frac{1}{3} - \sin^2 F \right) + Gl_8. \quad (13)$$

Wir bezeichnen nun

$$\frac{y}{a_0} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2} = \frac{y}{a_0} W_2 = \frac{y}{\varrho_n} \text{ mit } \eta'; \; W_2 \text{ bezw. } \varrho_n \text{ fürs Arg. } B_2, \quad (14)$$

und setzen für den Augenblick den Wurzelquotienten (13) gleich $1 + \zeta$, wobei ζ eine Gröfse der 4. Ordnung ist. Man hat dann nach (12):

$$\sin \eta = \sin (\eta' + \zeta \eta') = \sin \eta' \cos \zeta \eta' + \cos \eta' \sin \zeta \eta'$$
$$= \sin \eta' \left(1 + \zeta \left[1 - \frac{1}{3} \eta'^2 \right] + Gl_8 \right),$$

und unter Substitution des Wertes von ζ:

$$\sin \eta = \sin \eta' \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F - \frac{1}{2} e^4 L^2 \sin^2 F \cos^2 F \\ + e^2 L^4 \sin^2 F \cos^2 F \left(\frac{2}{3} \cos^2 F - \frac{1}{3} \right) + Gl_8. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Führt man dies linker Hand in (11) ein, reduziert alsdann auf $\sin \eta'$ und ersetzt in den Gliedern höchster Ordnung F einfach durch B_2, so folgt:

$$\sin \eta' = \sin L_{1.2} \cos B_2 \left(1 - \frac{1}{15} e^2 L^4 \sin^2 B_2 \cos^4 B_2 + Gl_8 \right). \quad (16)$$

Über die Konvergenz vorstehender Entwicklung ist kein Zweifel, sobald, wie vorausgesetzt, nicht nur $s : a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ eine kleine Gröfse 1. Ordnung ist. Die Formel scheint sogar auch am Pole ohne das Bestehen letzterer Bedingung zu genügen, da L in $\cos B_2$ multipliziert auftritt, aber dies ist nicht der Fall. Läfst man nämlich P_1 in den Pol fallen, nimmt also $B_1 = 90^0$, so wird y offenbar gleich dem Meridianbogen von B_2 bis 90^0 und es wird ferner $L = 90^0$. Man hat dann aber $\sin \eta'$ nicht gleich $\cos B_2 (1 - Gl_6)$, sondern gleich $\cos B_2 (1 - Gl_4)$, wie man aus den Formeln für einen Meridianbogen, S. 50 (3), ersehen kann.

Um nun auch in Formel (7) rechter Hand B_2 einzuführen, setzen wir nach *Taylors* Satz:

$$\sin 2B_2 = \sin 2F \left(1 + 2 (B_2 - F) \cot 2F - 2 (B_2 - F)^2 + Gl_6 \right).$$

Die Einführung von (9) giebt, wenn man schliefslich auf $\sin 2F$ reduziert:

$$\sin 2F = \sin 2B_2 \left(1 + \frac{1}{2} L^2 \cos 2F + \frac{1}{2} e^2 L^2 \cos^2 F \cos 2F \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} L^4 \left(\frac{1}{3} \sin^2 F - \frac{5}{12} \right) + Gl_6 \right). \quad (17)$$

Hiermit geht (7) über in:

$$\sin (F - B_2) = \sin^2 \frac{L}{2} \sin 2B_2 \left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2} L^2 \cos^2 F + \frac{1}{24} L^4 \cos^4 F (8 - 3 \cos^2 F) \\ + e^2 \cos^2 F + e^4 \cos^4 F \\ + e^2 L^2 \cos^2 F \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cos^2 F \right) + Gl_6 \end{array} \right\} . (18)$$

Da aber bei der entsprechenden Gleichung für die Kugel rechter Hand $\sec \eta'$ als Faktor auftritt, führen wir auch hier denselben ein. Es ist, da $\sin \eta$ und $\sin \eta'$ bis auf Glieder 5. Ordnung übereinstimmen:

$$\sec\eta' = \sqrt{1+\tan^2\eta} + Gl_6 = \sqrt{1+\tan^2 L\cos^2 F} + Gl_6$$

also:

$$\sec\eta' = 1 + \frac{1}{2}L^2\cos^2 F + \frac{1}{24}L^4\cos^2 F(8-3\cos^2 F) + Gl_6. \quad (19)$$

Hiermit kann man (18) umformen in die Gestalt:

$$\sin(F-B_2) = \sin^2\frac{L}{2}\sin 2B_2\sec\eta'\left\{\begin{matrix} 1+(e^2+e^4)\cos^2 F \\ +e^2L^2\cos^2 F\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cos^2 F\right)+Gl_6\end{matrix}\right\}. \quad (20)$$

In den Faktor rechter Hand wird am zweckmäfsigsten $\frac{\varrho_n}{\varrho_m}$ fürs Argument B_2 eingeführt. Nach S. 430 (12) ist, wenn daselbst $\varkappa = 1$ genommen wird:

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m} = 1 + (e^2+e^4)\cos^2 F + e^2L^2\sin^2 F\cos^2 F + Gl_6; \quad \text{Arg. } B_2.$$

Dieses in (20) eingesetzt, findet sich:

$$\left.\begin{array}{c} \sin(F-B_2) = \left\{\begin{matrix} \sin^2\frac{L}{2}\sin 2B_2\sec\eta'\cdot\frac{\varrho_n}{\varrho_m} \\ \times\left(1+e^2L^2\cos^2 B_2\left[-\frac{3}{4}+\frac{7}{6}\cos^2 B_2\right]+Gl_6\right)\end{matrix}\right\} \\ \frac{\varrho_n}{\varrho_m} = \frac{W_2^2}{1-e^2};\quad \text{Arg. } B_2.\end{array}\right\} \quad (21)$$

§ 16. **Fortsetzung: Meridiankonvergenz u. s. f.** Im Anschlufs an die Entwicklung S. 422 u. ff. setzen wir zunächst im sphärischen Hilfsdreieck:

$$\tan t = -\tan\lambda\sin\beta_2.$$

Nach S. 423 ist aber $\tan\lambda$ gleich der linken Seite von Gleichung (9) S. 423, also:

$$\tan\lambda = \tan L\left\{\begin{matrix} 1+\frac{1}{2}e^2\frac{\eta}{\tan L}\cos F\left[1+\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{4}k^2+\frac{5}{8}e^4+\frac{1}{8}k^4\right. \\ \left.+\frac{1}{4}e^2k^2+\frac{1}{4}k^2\eta^2+L^2\left(1+\frac{2}{3}L^2+\frac{1}{4}k^2+\frac{3}{4}e^2\right)\right] \\ +\frac{1}{4}e^4\eta^2\cos^2 F+Gl_8.\end{matrix}\right\} \quad (1)$$

Nach (1) und (5) S. 440 u. 441 hat man ferner:

$$\frac{\eta}{\tan L} = \cos F\left(1-\frac{1}{3}\eta^2-\frac{1}{45}\eta^4+Gl_6\right)$$

und

$$\eta^2 = L^2\cos^2 F\left(1+\frac{2}{3}L^2\sin^2 F+Gl_4\right).$$

Dieses in (1) behufs Elimination von η substituiert, findet sich:

$$\tan\lambda = \tan L\left\{1+\frac{1}{2}e^2\cos^2 F\left[\begin{array}{l}1+\frac{1}{4}e^2(3+\sin^2 F)+L^2\left(1-\frac{1}{3}\cos^2 F\right)\\ +e^2L^2\left(1+\frac{1}{6}\sin^2 F\cos^2 F\right)\\ +\frac{1}{45}L^4(30-10\sin^2 F\cos^2 F-\cos^4 F)\\ +\frac{1}{8}e^4(5+2\sin^2 F+\sin^4 F)\end{array}\right]+Gl_8\right\}. \quad (2)$$

Wir haben nun ferner:

$$\sin\beta_2 = \sin B_2\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} = \sin B_2\left\{\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}e^2\cos^2 B_2\Big[1+\frac{1}{4}e^2(1+3\sin^2 B_2)\\ +\frac{1}{8}e^4(1+2\sin^2 B_2+5\sin^4 B_2)\Big]+Gl_8\end{array}\right\}. \quad (3)$$

Rechter Hand eliminieren wir in der Parenthese B_2 mittelst F. Dazu giebt S. 428 (7) die Relation:

$$\cos^2 B_2 = \cos^2 F + L\eta\sin^2 F\cos F\left(1+\frac{1}{12}L^2\right)+\frac{1}{4}\eta^2L^2\sin^2 F + Gl_6,$$

welche mittelst der Formel (4) S. 441, nämlich mittelst

$$\eta = L\cos F\left(1+\frac{1}{3}L^2\sin^2 F\right)+Gl_5,$$

übergeht in:

$$\cos^2 B_2 = \cos^2 F\left\{1+L^2\sin^2 F+\frac{1}{3}L^4\sin^2 F+\frac{1}{3}L^4\sin^4 F+Gl_6\right\}. \quad (4)$$

Aufserdem ist hiernach:

$$\sin^2 B_2 = \sin^2 F\{1-L^2\cos^2 F\}+Gl_4. \quad (5)$$

Mit Benutzung dieser Substitutionen für $\cos^2 B_2$ und $\sin^2 B_2$ geht (3) über in die Gestalt:

$$\sin\beta_2 = \sin B_2\left\{1-\frac{1}{2}e^2\cos^2 F\left[\begin{array}{l}1+\frac{1}{4}e^2(1+3\sin^2 F)+L^2\sin^2 F\\ +\frac{1}{2}e^2L^2\sin^2 F(-1+3\sin^2 F)\\ +\frac{1}{3}L^4\sin^2 F+\frac{1}{3}L^4\sin^4 F\\ +\frac{1}{8}e^4(1+2\sin^2 F+5\sin^4 F)\end{array}\right]+Gl_8\right\}. \quad (6)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit (2) Seite für Seite, so ergiebt sich linker Hand $\tan\lambda\sin\beta_2$ d. i. zufolge der eingangs des Paragraphen angegebenen Gleichung gleich $-\tan t$. Wir erhalten daher:

$$\tan t = -\tan L \sin B_2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} e^2 L^2 \cos^4 F \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} e^2 (5 - 3\cos^2 F) \\ + L^2\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{5}\cos^2 F\right) \end{array} \right] + Gl_8 \right\}.$$

Hier führen wir rechter Hand mittelst (4) endlich noch B_2 ein, und gelangen so zu der Formel:

$$\tan t = -\tan L_{1.2} \sin B_2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} e^2 L^2 \cos^4 B_2 \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} e^2 (5 - 3\cos^2 B_2) \\ - L^2\left(\frac{5}{6} - \frac{9}{5}\cos^2 B_2\right) \end{array} \right] + Gl_8 \right\}. \quad (7)$$

Sind mit Hilfe der Formeln (16) und (21) des vorigen Paragraphen, sowie der letzten Formel (7) die Gröfsen η', F und t berechnet, so ist zunächst aus η' y zu ermitteln und aus $F - B_1$ x. Ersteres erfolgt nach Formel (14) S. 442 und letzteres nach Formel (3) S. 50. Aus x und y sind dann mit Hilfe der Formeln des § 6 S. 416 Entfernung und Azimute zu bestimmen.

Man hat darin $\mathfrak{a}_{1.2} = \alpha_{1.2}$, y_1 gleich null und also $\Delta y = y_2 = y$ sowie $y = \frac{1}{2} y$, ferner $\Delta x = x$ und am zweckmäfsigsten in den von e^2 abhängigen Gliedern $x_1 = -\frac{2}{3} x$, $x_2 = +\frac{1}{3} x$ und $x = -\frac{1}{6} x$ zu substituieren. Hierdurch wird K_0 bezogen auf die geographische Breite $F + \frac{1}{2}(B_1 - F)$. Man erhält:

$$\left. \begin{array}{l} s \cos \alpha_{1.2} = x \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{1}{45} \frac{y^4}{\varrho^4} - \frac{2}{45} \frac{x^2 y^2}{\varrho^4} + \frac{1}{36} \frac{x y^2}{\varrho^3} e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \right\} \\ s \sin \alpha_{1.2} = y \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{7}{360} \frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{2}{45} \frac{x^2 y^2}{\varrho^4} - \frac{1}{18} \frac{x^3}{\varrho^3} e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \right\}, \end{array} \right\} \quad (8)$$

welche Formeln sich, da x bezw. y Faktor aller Glieder ist, ohne weiteres in logarithmische Gestalt bringen lassen. Es ist aber in mehreren Beziehungen vorteilhafter, zunächst zu $s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)$ und $s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)$ mittelst nachfolgender Entwicklungen überzugehen:

$$s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right) = s \cos \alpha_{1.2} \left(1 - \frac{1}{8}\Delta\mathfrak{a}^2 + Gl_8\right)$$
$$- \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\, s \sin \alpha_{1.2} (1 + Gl_6)$$

$$s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right) = s \sin \alpha_{1.2} \left(1 - \frac{1}{8}\Delta\mathfrak{a}^2 + Gl_8\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\, s \cos \alpha_{1.2} (1 + Gl_6).$$

Nun ist

$$\varDelta \mathfrak{a} = -\frac{xy}{2\varrho^2}\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{12\varrho^2} + Gl_4\right) \tag{9}$$

und hiermit:

$$\left.\begin{aligned} s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\varDelta\mathfrak{a}\right) &= x\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{1}{12}\frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{1}{720}\frac{y^4}{\varrho^4} - \frac{19}{1440}\frac{x^2y^2}{\varrho^4} \\ &+ \frac{1}{36}\frac{xy^2}{\varrho^3}e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \end{aligned}\right\} \\ s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\varDelta\mathfrak{a}\right) &= y\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{1}{12}\frac{x^2}{\varrho^2} - \frac{1}{720}\frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{19}{1440}\frac{x^2y^2}{\varrho^4} \\ &- \frac{1}{18}\frac{x^3}{\varrho^3}e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

§ 17. **Zusammenstellung.** Gegeben: B_1, B_2 und $L_{1.2}$.

Gesucht: x, y für P_2 in Bezug auf den Meridian von P_1; gesucht ferner s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$.

Die in den vorhergehenden beiden Paragraphen entwickelten Formeln bringen wir sogleich in die logarithmische Form. L und $B_1 - F$ sind in den kleinen Gliedern stets in Sekunden zu verstehen.

$$\left.\begin{aligned} &\log \sin \eta' = \log(\sin L_{1.2} \cos B_2) - \frac{Me^2}{15\varrho''^4} L^4 \sin^2 B_2 \cos^4 B_2 + Gl_8 \\ &\log \frac{Me^2}{15\varrho''^4} = 2{,}0284 - 20 \text{ f. Einh. der 7. Dec.} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &y = \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{W_2} \cdot \frac{a_0}{\varrho''} = \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{W_2}[1{,}4902183.305] \\ &W_2 \text{ zum Argument } B_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\log \sin(F - B_2) = \log\left(\sin^2 \frac{L_{1.2}}{2} \sin B_2 \cos B_2 \sec \eta' \cdot \frac{2W_2^2}{1-e^2}\right) \\ &\qquad + \frac{Me^2}{\varrho''^2} L^2 \cos^2 B_2 \left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{6}\cos^2 B_2\right) + Gl_6 \\ &\log \frac{2}{1-e^2} = 0{,}3039383.552; \quad \log \frac{Me^2}{\varrho''^2} = 3{,}83334 - 10 \text{ f. Einh. der 7. Dec.} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\log x = \log\left(\frac{\varrho_m (B_1 - F) \text{ in Sek.}}{\varrho''}\right) + \beta_4 (B_1 - F)^2 + \beta_6 (B_1 - F)^4 + Gl_8 \\ &\frac{\varrho_m}{\varrho''} = \frac{a_0(1-e^2)}{\varrho'' W_m^3} = \frac{[1{,}4873099.710]}{W_m^3}, \quad W_m \text{ zum Arg. } \frac{1}{2}(B_1 + F) \\ &\beta_4 = \frac{M\eta}{2\varrho''^2}\left(\cos(B_1 + F) - 7\eta \cos^2(B_1 + F) + 5\eta\right) \quad \beta_6 = -\frac{1}{20\varrho''^2}\beta_4 \\ &\left.\begin{aligned} &\beta_4 = [2{,}93171 - 10]\left(\cos(B_1 + F) - [8{,}069 - 10]\cos^2(B_1 + F) + 0{,}00803\right) \\ &\beta_6 = -[8{,}070 - 20]\,\beta_4 \end{aligned}\right\} \text{f. Einh. d. 7. Dec.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\log\tan t = \log(-\tan L_{1.2}\sin B_2) + \frac{Me^2}{3\varrho''^2} L^2\cos^4 B_2 + \frac{Me^4}{6\varrho''^2} L^2\cos^4 B_2\,(5-3\cos^2 B_2) \\ - \frac{Me^2}{3\varrho''^4} L^4\cos^4 B_2\left(\frac{5}{6}-\frac{9}{5}\cos^2 B_2\right) + Gl_8 \\ \left.\begin{aligned}\log\frac{Me^2}{3\varrho''^2} = 3{,}35622 - 10 \\ \log\frac{Me^4}{6\varrho''^2} = 0{,}880 - 10 \qquad \log\frac{Me^2}{3\varrho''^4} = 2{,}727 - 20\end{aligned}\right\}\text{für Einh. der 7. Dec.}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\varrho = \frac{a_0}{\sqrt{K_0}} = \frac{b_0}{W_0^2} = \frac{[6{,}8031893]}{W_0^2} \\ W_0 \text{ zum Arg. } B_0 = F + \frac{1}{3}(B_1 - F)\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\log\left\{s\cos\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{2}\varDelta\mathfrak{a}\right)\right\} = \log x - \frac{1}{12}M\frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{7}{1440}M\frac{y^4}{\varrho^4} - \frac{19}{1440}M\frac{x^2y^2}{\varrho^4} \\ + \frac{1}{36}Me^2\frac{xy^2}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\log\left\{s\sin\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{2}\varDelta\mathfrak{a}\right)\right\} = \log y - \frac{1}{12}M\frac{x^2}{\varrho^2} - \frac{7}{1440}M\frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{19}{1440}M\frac{x^2y^2}{\varrho^4} \\ - \frac{1}{18}Me^2\frac{x^3}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\log\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\mathfrak{a}} = \log\left\{-\frac{1}{2}\varrho''\frac{xy}{\varrho^2}\right\} + \frac{1}{12}M\frac{x^2+y^2}{\varrho^2} + Gl_4 \quad (9)$$

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \varDelta\mathfrak{a} + t; \quad (10)$$

$$\log\left(\frac{1}{12}M\right) = 5{,}5586030\left\{\begin{aligned}\log\frac{7M}{1440} = 4{,}325 \qquad \log\frac{19M}{1440} = 4{,}758 \\ \log\left(\frac{1}{36}Me^2\right) = 2{,}906 \qquad \log\left(\frac{1}{18}Me^2\right) = 3{,}207\end{aligned}\right\}\text{für Einh. der 7. Dec.}$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\varrho''\right) = 5{,}0133951.$$

§ 18. Zahlenbeispiel I. $B_1 = 52^0\,30'\,16{,}7''$ $B_2 = 54^0\,42'\,50{,}6''$

$$L_{1.2} = 7^0\,6'\,0''_{\text{östlich}} = -25560''.$$

Die *Formeln* des § 17 geben der Reihe nach:

$$\left\{\begin{aligned}\log\sin L_{1.2} &= 9{,}0920236.596_n - 10 \\ \log\cos B_2 &= 9{,}7616703.379 - 10 \\ -[2{,}028-20]\,L^4\sin^2 B_2\cos^4 B_2 &= -\quad 0.034\end{aligned}\right.$$

$$\log\sin\eta' = 8{,}8536939.941_n - 10$$

$$\eta' = -4^0\,5'\,39{,}705771'' = -14739{,}705771''.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log \underset{\text{in Sek.}}{\eta'} = & 4,1684888.149_n \\ & 1,4902183.305 \\ -\log W_2 = & 0,0009678.539 \\ \hline \log y = & 5,6596749.993_n. \end{array}\right.$$

Argument für $W_2 = 54^0\,42,8433'$

$$\left\{\begin{array}{ll} 2\log\sin\frac{L_{1.2}}{2} & = 7,5836556.26-10 \\ \log\cos B_2 & = 9,7616703.38-10 \\ \log\sin B_2 & = 9,9118387.96-10 \\ \log\sec\eta' & = 0,0011098.18 \\ 2\log W_2 & = 9,9980642.92-10 \\ & \ 0,3039383.55 \\ [3,83334-10]\,L^2\cos^2 B_2\left(-\frac{3}{4}+\frac{7}{6}\cos^2 B_2\right) & = - \qquad 53.57 \\ \hline \log\sin(F-B_2) & = 7,5602718.68-10 \end{array}\right.$$

$$F = 54^0\,55'\,19,97285'' \qquad F - B_2 = +\ 12'\,29,37285''$$

$$B_1 - F = -\ 2^0\,25'\ 3,27285'' \qquad B_1 - F = -\ 8703,27285''$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\underset{\text{in Sek.}}{(B_1-F)} = & 3,9396825.990_n \\ & 1,4873099.710 \\ -3\log W_m = & 0,0028312.074 \\ \text{vergl. hierzu S. 438.} \quad - & \qquad 1.893 \\ \hline \log x = & 5,4298235.881_n. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\tan L_{1.2} = & 9,0953666.904_n - 10 \\ \log\sin B_2 = & 9,9118387.956 - 10 \\ +\,[3,35622-10]\,L^2\cos^4 B_2 = & + \qquad 16.520 \\ +\,[0,880-10]\,L^2\cos^4 B_2\,(5-3\cos^2 B_2) = & + \qquad 0.221 \\ -\,[2,727-20]\,L^4\cos^4 B_2\left(\frac{5}{6}-\frac{9}{5}\cos^2 B_2\right) = & - \qquad 0.059 \\ \hline \log\tan t = & 9,0072071.542 - 10 \end{array}\right.$$

$$t = +\ 5^0\ 48'\ 19,8152''.$$

Der hier gefundene Wert von $\log x$ zeigt mit demjenigen, welcher S. 437 ermittelt wurde, eine nicht unerhebliche Differenz. Augenscheinlich hat dies seinen Grund darin, dafs in der Formel (3) für $F - B_2$ die vernachlässigten höheren Glieder merklich werden. Gerade

diese Formel hat nicht die Schärfe, wie die entsprechende Formel (5) S. 431; darauf weist schon die relative Gröfse der Glieder 4. Ordnung beider Formeln hin. Immerhin reicht die Schärfe von (3) aus, sobald für die weitere Rechnung die folgenden Formeln des vorigen Paragraphen zur Anwendung gelangen.

Es ist nach

Formel (7):	Formel (8):	Formel (9):
5,4298235.88$_n$	5,6596749.99$_n$	2,4927011$_n$
− 1852.51	− 642.77	+ 1853
− 0.55	− 0.07	+ 643
− 0.52	− 0.52	2,4929507$_n$
− 0.17	+ 0.11	$= \log \Delta \mathfrak{a}$ in Sek.
5,4296382.13$_n$	5,6596106.74$_n$	$\Delta\mathfrak{a} = -\ 5'\,11{,}1363''$
$= \log\left\{s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\}$	$= \log\left\{s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\}$	$t = 5^0\,48'\,19{,}8152''$
$\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a} = 239^0\,30'\,25{,}1186''$		$\alpha_{1.2} = 239^0\,33'\,0{,}6868''$
$\log s = 5{,}7242591.37$		$\alpha_{2.1} = 65^0\,16'\,9{,}3657''$

		nach S. 261:
Resultat:	$\log s = 5{,}7242591.37$	.353
	$\alpha_{1.2} = 239^0\,33'\,0{,}6868''$	0,6869''
	$\alpha_{2.1} = 65\ 16\ 9{,}3657$	9,3650

Um eine schärfere Rechnung zu erzielen, könnte man sich der Formel (10) S. 429 bedienen, in welche nach (12) S. 430 der Wert von $\frac{\varrho_n}{\varrho_m}$ für $n = 1$ einzuführen wäre. Die Formel lautet nach einfacher Reduktion:

$$\log\sin(F - B_2) = \left\{ \begin{array}{c} \log\left(-\tan t \cos F \tan \frac{L_{1.2}}{2} \cdot \frac{W_2^2}{1 - e^2}\right) \\ + \frac{M e^2}{\varrho''^2} L^2 \cos^2 B_2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cos^2 B_2 - \frac{1}{4}\tan^2\frac{L}{2}\right) + Gl_6 \end{array} \right\}$$

Sie giebt unter Einführung der oben berechneten Werte von t und F:

$$\log\sin(F - B_2) = 7{,}5602718.20 - 10 \qquad F - B_2 = 12'\,29{,}37277''.$$

Mit diesem Werte nimmt der $\log x$ um 40 Einheiten der 10. Decimalstelle ab und man erhält eine weit bessere Übereinstimmung als vorher, vorausgesetzt, dafs namentlich noch $\varepsilon = -\Delta\mathfrak{a}$ nach einer der strengen Formeln des § 10 S. 370 u. ff. aus den Seiten x und y sowie dem Zwischenwinkel 90° berechnet wird.

§ 19. Übertragung geographischer Koordinaten durch Dreiecksseiten. Sobald wir annehmen, dafs $s < 0{,}02 a_0$ d. i. 127^{km}, so vereinfachen sich selbst für die schärfste Rechnung die Formeln sehr. Zunächst kürzen wir die Formeln für x, y und $\Delta\mathfrak{a}$ in § 12 S. 432 wie folgt ab:

$$\log x = \log u + \frac{1}{3}\frac{M}{b_0^2} v^2 W_0^2 + \cdots \tag{1}$$

$$\log y = \log v - \frac{1}{6}\frac{M}{b_0^2} u^2 W_0^2 + \cdots \tag{2}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho''}{b_0^2} xy W_0^2 + \cdots. \tag{3}$$

Die beträchtlichsten Vernachlässigungen der 1. Formel haben auf x einen Einflufs gleich

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{1}{90}\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5 \sin^2\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2}\,(7\sin^2\alpha_{1.2} - 6\cos^2\alpha_{1.2}) \\ &-\frac{1}{36}\varrho'' e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \sin^2\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{1.2}\sin 2B_0, \end{aligned}\right\}\text{ zu (1)}$$

ausgedrückt in Äquatorsekunden d. h. als Zentriwinkel für eine Kugel vom Radius a_0, den Fehler in x als Bogen gröfsten Kreises betrachtet. Diese Ausdrücke geben im Maximum rund

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \pm 3900''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5 \text{für} \tan\alpha_{1.2} = \pm 2{,}5 & \alpha_{1.2} \text{ im 1.Qu.} = 68\frac{1}{3}^0 & B_0 \text{ beliebig} \\ \pm\ \ 9{,}5''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \text{für} \tan\alpha_{1.2} = \pm 1 & \alpha_{1.2} \text{ im 1.Qu.} = 45^0 & B_0 = \pm 45^0. \end{array}\right\}\text{zu(1)}$$

Für y werden die hauptsächlichsten Fehlerglieder, ebenfalls auf Äquatorsekunden reduziert, gleich

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{15}\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5 \sin^3\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{1.2} \\ &+\frac{1}{18}\varrho'' e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \sin\alpha_{1.2}\cos^3\alpha_{1.2}\sin 2B_0, \end{aligned}\right\}\text{ zu (2)}$$

d. i. im Maximum rund

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \pm 2600''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5 \text{für} \tan\alpha_{1.2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} & \alpha_{1.2} \text{ im 1.Qu.} = 50\frac{2}{3}^0 & B_0 \text{ beliebig} \\ \pm\ \ 25''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \text{für} \tan\alpha_{1.2} = +\sqrt{\frac{1}{3}} & \alpha_{1.2} \text{ im 1.Qu.} = 30^0 & B_0 = \pm 45^0. \end{array}\right\}\text{zu(2)}$$

Ferner giebt die Vergleichung von (3) mit (9) S. 448 als Fehler des mittelst (3) berechneten $\Delta\mathfrak{a}$:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{24}\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2} \\ \text{d. i. im Maximum rund} \\ \pm 4300''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \text{für } \tan\alpha_{1.2} = \pm 1;\ \alpha_{1.2} \text{ im 1. Qu.} = 45^0. \end{array}\right\} \text{zu (3)}$$

Für $s = 0{,}02a_0$ werden daher x und y bis auf 0,000012 bezw. 0,000008 Äquatorsekunden genau erhalten, die Gröfse $\Delta\mathfrak{A}$ aber bis auf 0,0007″.

Für $s = 0{,}05a_0$ sind die Fehler im Maximum bezw. 0,0012″, 0,0008″ und 0,027″; sie halten sich also auch hier innerhalb von Beträgen, die wenigstens für manche Zwecke vernachlässigt werden dürfen.

Es ist noch zu erwähnen, dafs es zur Berechnung des Arguments B_0 für W_0 ausreicht, sich der Formeln

$$B_0 = B_1 + \frac{2}{3}(F - B_1), \qquad \underset{\text{in Min.}}{F - B_1} = [6{,}732_n - 10]\, u \tag{4}$$

zu bedienen. In den entsprechenden Formeln (2) S. 432 ist einfach $W_0 = 9{,}9993 - 10$, also gleich einem Mittelwert eingeführt, wodurch in $F - B_1$ nur Bruchteile Minuten Fehler entstehen können. Die Tafel der log W zeigt unmittelbar deren Geringfügigkeit.

§ 20. **Fortsetzung.** An Stelle der Formeln des § 11 S. 431 setzen wir die einfacheren:

$$\log\underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) - \frac{Me^2}{8\varrho''^2}\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2\cos(B_1 + F) + \cdots \tag{1}$$

$$\tan L_{1.2} = +\tan\eta\sec F + \cdots \tag{2}$$

$$\tan t = -\sin\eta\tan F + \cdots \tag{3}$$

$$\sin(F - B_2) = \sin\eta\sin F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{W^2}{1 - e^2} + \cdots. \tag{4}$$

Die Fehler, welche bei Anwendung dieser Formeln begangen werden, hängen aufser von F und $L_{1.2}$ nur von x *oder* y ab. Indem wir für diese letzteren Gröfsen sogleich s setzen, ergeben sich als maximale Werte der beträchtlichsten Fehlereinflüsse nachstehende Ausdrücke:

$$\text{in } B_1 - F\text{: } + \frac{1}{8}\varrho'' e^4\left(\frac{s}{a_0}\right)^3\left(6\sin^2\frac{B_1 + F}{2} - 7\sin^4\frac{B_1 + F}{2}\right)$$

$$\text{in } L_{1.2}\text{: } + \frac{1}{15}\varrho'' e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^5\tan F\sin F\cos^2 L$$

$$\text{in } t\text{: } + \frac{1}{6}\varrho'' e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^3\sin F\cos F\cos^2 t$$

$$\text{in } F - B_2: \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{12}\varrho'' e^2 \left(\frac{s}{a_0}\right)^3 \sin F \cos^2 F \tan\frac{L}{2} \\ -\frac{1}{16}\varrho'' e^2 \left(\frac{s}{a_0}\right)^3 (1 + 3\cos^2 F) \sin F \tan^3\frac{L}{2} \end{array} \right\},$$

wobei für die Fehler in $L_{1.2}$ und t berücksichtigt wurde, dafs einem Fehler δ in $\tan u$ ein Fehler $\delta \cos^2 u$ in u selbst entspricht.

Zu diesen Fehlern treten strenggenommen noch diejenigen wegen unrichtiger Berechnung von x und y aus § 19. Indem wir aber annehmen, dafs die Abkürzungen der Formeln, welche dort eingeführt wurde, zulässig sind, dürfen wir jetzt von Fehlern in x und y absehen.

Der Fehler in $B_1 - F$ wird ein Maximum für $\frac{1}{2}(B_1 + F)$ gleich rund $\pm 41^0$ d. h. also für eine mittlere Breite von rund $\pm 41^0$; und zwar ist *das Maximum des Fehlers in* $B_1 - F$ gleich

$$+ 1{,}5'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^5, \qquad \text{zu (1)}$$

was für $s = 0{,}02 a_0$ nur $0{,}000012''$, für $s = 0{,}05 a_0$ aber auch erst $0{,}0002''$ ergiebt.

Um ferner das Maximum des Faktors $\tan F \sin F \cos^2 L$ in dem Fehlerausdruck für $L_{1.2}$ zu ermitteln, beachten wir, dafs nach S. 425 (13) $\eta \sec F$ jedenfalls ein Näherungswert für $\tan L$ ist.

Hiermit erhalten wir in einer für alle Fälle zur Schätzung des Fehlerbetrags ausreichenden Annäherung:

$$\tan F \sin F \cos^2 L = \frac{\tan F \sin F}{1 + \eta^2 \sec^2 F} = \frac{\sin^2 F \cos F}{\cos^2 F + \eta^2}.$$

Die Differentiation giebt als Bedingung des Maximums des letzten Ausdrucks:

$$\cos^4 F + (1 + 3\eta^2)\cos^2 F = \eta^2$$

und hieraus folgt, abgesehen von höheren Gliedern, $\cos^2 F = \eta^2$. Der Maximalwert jenes Faktors ist also in hinreichender Annäherung gleich $1 : 2\eta$, wobei für η nun, wie überhaupt in dem betreffenden Fehlerglied, $s : a_0$ zu setzen ist. Es folgt daher *der Maximalfehler in* $L_{1.2}$ gleich

$$\pm 46'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^4, \qquad \text{zu (2)}$$

was für $s = 0{,}02 a_0$ rund $0{,}000006''$, für $s = 0{,}05 a_0$ rund $0{,}0003''$ beträgt. Schliefst man aber die Nähe des Poles aus, so ist der Fehler noch weit kleiner.

Um das Maximum des Faktors $\sin F \cos F \cos^2 t$ zu bestimmen, beachten wir, dafs nach S. 426 $-\eta \tan F$ jedenfalls ein hier brauch-

barer Näherungswert von $\tan t$ ist. Wir haben daher ausreichend genau:

$$\sin F \cos F \cos^2 t = \frac{\sin F \cos F}{1 + \eta^2 \tan^2 F}.$$

Man erkennt, dafs wegen des Faktors $\cos F$ der Nenner von unwesentlichem Einflusse auf die Lage des Maximums ist; dasselbe findet daher (wie auch die Differentiation zeigt) statt bei F gleich rund $\pm 45^0$ und es folgt der *Maximalfehler in t* gleich

$$\pm 115'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^3, \qquad \text{zu (3)}$$

was für $s = 0{,}02 a_0$ 0,0009″ beträgt und mithin vernachlässigt werden darf. Für $s = 0{,}05 a_0$ wird der Maximalfehler gleich 0,014″, also in manchen Fällen wohl auch noch genügend klein.

Jedenfalls entspricht der Fehler vollständig der Genauigkeit, mit welcher $\Delta\mathfrak{a}$ berechnet wird.

Im 1. Gliede des Fehlerausdrucks für $F - B_2$ setzen wir

$$\cos F \tan \frac{L}{2} = \frac{1}{2}\eta,$$

denn da nach S. 429 (8) $\cos F \tan \frac{L}{2} = \frac{1}{2}\eta \left(1 - \tan^2 \frac{L}{2}\right)$ ist und $\tan^2 \frac{L}{2}$ höchstens 1 werden kann, so entspricht diese Annahme einem Maximum. Wir erhalten also, für η zugleich $\frac{s}{a_0}$ substituierend und berücksichtigend, dafs $\sin F \cos F$ sein Maximum $\frac{1}{2}$ bei $F = 45^0$ hat, als *Maximalwert des Fehlers von* $F - B_2$, abgesehen von der Nähe des Pols:

$$\pm 57'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^4, \qquad \text{zu (4)}$$

was für $s = 0{,}02 a_0$ 0,000009″ beträgt, für $s = 0{,}05 a_0$ aber noch nicht ganz 0,0004″.

Hierbei ist in (4) als Argument für W angenommen $F + \frac{3}{4}(B_2 - F)$, denn der Fehler wird für F als Argument bereits für $s = 0{,}02 a_0$ in der 4. Decimalstelle der Sekunden von erheblichem Einflufs.

Das 2. Glied im Fehlerausdruck für $F - B_2$ erlangt nur in der nächsten Nähe des Poles Bedeutung. Während der Faktor $(1 + 3\cos^2 F)\sin F$ bei wachsendem F nahe dem Pole langsam abnimmt, wächst $\tan^3 \frac{L}{2}$ sehr rasch. Denn für $F = 90^0 - \eta$ ist $L = 45^0$

rund und für $F = 90^0$ ist $L = 90^0$. Das Maximum dieses Gliedes tritt also ein für $F = 90^0$ und beträgt

$$\pm 86'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^3, \qquad \text{zu (4)}$$

was für $s = 0{,}02 a_0$ 0,0007″ giebt. Von praktischer Bedeutung aber ist dieser Fehler nicht, denn schon für $F = 90^0 - \eta$ sinkt er auf 0,00005″ herab, u. s. f. Auch für $s = 0{,}05 a_0$ ist er nur in nächster Nähe des Poles von einiger Bedeutung.

§ 21. **Reihenentwicklungen für $L_{1.2}$, t und $F - B_2$.** Wenn man voraussetzt, dafs nicht nur η, sondern auch $L_{1.2}$ oder, was dasselbe, $\eta \sec F$ eine kleine Gröfse ist, so lassen sich anstatt der Formeln des vorhergehenden Paragraphen unter Umständen mit Vorteil die Reihen anwenden, welche schon § 8 S. 126 u. ff. angegeben worden sind.

Man erhält sofort:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = \left\{\begin{matrix} \log(\varrho''\eta \sec F) - \frac{1}{3} M\eta^2 \tan^2 F \\ + \frac{1}{90} M\eta^4 \tan^2 F [13 \tan^2 F + 6] + Gl_6 \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = \left\{\begin{matrix} \log(-\varrho''\eta \tan F) - \frac{1}{6} M\eta^2 [2\tan^2 F + 1] \\ + \frac{1}{180} M\eta^4 [26 \tan^4 F + 20 \tan^2 F - 1] + Gl_6 \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \left\{\begin{matrix} \log\left(\frac{1}{2}\varrho''\eta^2 \tan F \cdot \frac{W^2}{1-e^2}\right) - \frac{1}{12} M\eta^2 [3\tan^2 F + 1] \\ + \frac{1}{1440} M\eta^4 [135 \tan^4 F + 90 \tan^2 F - 1] + Gl_6 . \end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

In die Formeln (2) und (3) führen wir rechter Hand im 2. Gliede, woselbst sich $\tan^2 F + 1$ zu $\sec^2 F$ vereinigen läfst, die aus (1) und (2) leicht abzuleitenden Relationen ein:

$$\eta^2 \sec^2 F = L^2 + \frac{2}{3}\eta^4 \tan^2 F (\tan^2 F + 1) + Gl_6$$

$$\eta^2 \tan^2 F = t^2 + \frac{1}{3}\eta^4 \tan^2 F (2\tan^2 F + 1) + Gl_6 .$$

Hiermit nehmen die genannten Formeln die nachstehende vorteilhaftere Gestalt an:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = \left\{\begin{matrix} \log(-\varrho''\eta \tan F) - \frac{1}{6} M [\eta^2 \tan^2 F + L^2] \\ + \frac{1}{180} M\eta^4 [6 \tan^4 F - 1] + Gl_6 \end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \left\{ \begin{array}{l} \log\left(\frac{1}{2}\varrho''\eta^2 \tan F \cdot \frac{W^2}{1-e^2}\right) - \frac{1}{12} M [2t^2 + \eta^2 \sec^2 F] \\ - \frac{1}{1440} M\eta^4 [25 \tan^4 F - 10 \tan^2 F + 1] + Gl_6 . \end{array} \right\} (5)$$

Für $\eta = 0{,}02$ und $F = 65^0$ mit $\tan = 2{,}14$ $\tan^2 = 4{,}6$ $\sec = 2{,}37$ ist der Einfluſs der in η^4 multiplizierten Glieder der Formeln (1), (4) und (5)

auf $L_{1.2}$	gleich:	0,0054″
„ t	„ :	0,0010″
„ $F - B_2$	„ :	0,000004″.

Während hiernach für $s \leqq 0{,}02 a_0$ und $F \leqq 65^0$ die Glieder 4. Ordnung der Formeln (4) und (5) jedenfalls vernachlässigt werden dürfen, müssen sie für Formel (1) noch Berücksichtigung finden. Erst für $\eta \sec F < 0{,}012$ wird der Einfluſs des Gliedes 4. Ordnung auch in dieser Formel sicher kleiner als 0,00001″. (Dies erkennt man leicht, wenn man für dasselbe den gröſseren Wert $\frac{1}{90} M\eta^4 \sec^2 F \,.\, 13 \sec^2 F$ setzt u. s. f.) Andrerseits läſst sich unschwer nachweisen, daſs für die angegebenen Grenzwerte von η und F die in (1) vernachlässigten Glieder 6. Ordnung keinen nennenswerten Einfluſs auf die 5 ersten Decimalstellen der Sekunden in $L_{1.2}$ erlangen können.

§ 22. **Zusammenstellung.** Gegeben: B_1, s und $\alpha_{1.2}$ bezw. x und y für P_2 in Bezug auf den Meridian von P_1.

Gesucht: B_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$.

$$\left. \begin{array}{l|l} u = s \cos \alpha_{1.2} & \log x = \log u + \frac{1}{3}\frac{M}{b_0^2} v^2 W_0^4 + \cdots \\ v = s \sin \alpha_{1.2} & \log y = \log v - \frac{1}{6}\frac{M}{b_0^2} u^2 W_0^4 + \cdots \\ & \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho''}{b_0^2} xy W_0^4 + \cdots \end{array} \right\} \qquad (1)$$

$$\log\left(\frac{1}{3}\frac{M}{b_0^2}\right) = 2{,}55428-10 \quad \log\left(\frac{1}{6}\frac{M}{b_0^2}\right) = 2{,}25325-10,$$

beide für Einh. der 7. Dec.;

$$\log\left(-\frac{1}{2}\frac{\varrho''}{b_0^2}\right) = 1{,}407017_n - 10$$

W_0 zum Arg. $B_0 = B_1 + \frac{2}{3}(F - B_1)$, wobei $(F - B_1)$ in Min. $= [6{,}732_n - 10]\, u$.

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) - \frac{M e^2}{8 \varrho''^2}\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 \cos(B_1 + F) + \cdots \qquad (2)$$

$$\frac{\varrho''}{\varrho_m} = \frac{\varrho'' W_m^3}{a_0(1-e^2)} = [8{,}5126900.29-10]\, W_m^3$$

W_m zum Arg. $\frac{1}{2}(B_1 + F)$, welches in 1. Annäherung aus obigem Wert $F - B_1$ abzuleiten ist.

(Die Änderung für 1 Min. ist zu notieren.)

$$\log \frac{Me^2}{8\varrho''^2} = 2{,}930-10 \text{ f. Einh. der 7. Dec.}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\eta} = \varrho'' \frac{y}{\varrho_n} = y W_F \frac{\varrho''}{a_0} = y W_F\, [8{,}5097816.70-10] \tag{3}$$

W_F zum Arg. F. (Man notiere die Änderung für 1 Min.)

$$\left.\begin{aligned} \tan L_{1.2} &= +\tan\eta \sec F + \cdots \\ \tan t &= -\sin\eta \tan F + \cdots \\ \sin(F - B_2) &= \sin\eta \sin F \tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{W^2}{1-e^2} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

W zum Arg. $F - \frac{3}{4}(F - B_2)$; ist aus W_F abzuleiten.

$$-\log(1-e^2) = 0{,}0029083.6\,.$$

Ist der absolute Wert der Breite $< 65^0$, so können anstatt der (4) nachfolgende Formeln Anwendung finden:

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \sec F\,(\eta \text{ in Sek.}) \qquad t_0 = -\tan F\,(\eta \text{ in Sek.}) \\ \underset{\text{in Sek.}}{\log L_{1.2}} &= \log L_0 - \frac{M}{3\varrho''^2} t_0^2 + \left| \frac{7M}{90\varrho''^4} t_0^4 + \frac{M}{15\varrho''^4} t_0^2 L_0^2 + \cdots \right| \text{ bleibt weg für } \log L_0 < 3{,}40 \\ \underset{\text{in Sek.}}{\log t} &= \log t_0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{3\varrho''^2} t_0^2 - \frac{M}{6\varrho''^2} L_{1.2}^2 + \cdots \\ \underset{\text{in Sek.}}{\log(B_2 - F)} &= \log\frac{\eta t_0 W^2}{2(1-e^2)\varrho''} - \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{3\varrho''^2} t^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{6\varrho''^2} L_0^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4*}$$

W zum Argument $F + \frac{3}{4}(B_2 - F)$

$$\left.\begin{aligned} \log\frac{M}{3\varrho''^2} &= 5{,}531813-10 \qquad \log\frac{7M}{90\varrho''^4} = 4{,}271-20 \\ \log\frac{M}{6\varrho''^2} &= 5{,}23078\ -10 \qquad \log\frac{M}{15\varrho''^4} = 4{,}204-20 \end{aligned}\right\} \text{ f. Einh. der 7. Dec.}$$

$$\log\frac{1}{2(1-e^2)\varrho''} = 4{,}3874532.3-10\,.$$

Schliefslich hat man

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\alpha + t. \tag{5}$$

Diese Formeln geben für $s = 0{,}02\,a_0$ B_2 und $L_{1.2}$ auf 1 bis 2 Einheiten der 5. Decimalstelle und $\alpha_{2.1}$ auf ebensoviel der 3. Decimal-

stelle der Sekunden genau. Spezieller sind über die Genauigkeit die beiden letzten Paragraphen zu vergleichen.

Wünscht man die an zwei Stellen unserer Formeln erforderliche, übrigens bei Anwendung logarithmischer Differenzen nicht mühsame indirekte Rechnung zu vermeiden, so ist das durch einige einfache Reihenentwicklungen leicht zu erreichen. In dieser Beziehung erinnern wir insbesondere auch an die Reihen S. 298. Setzt man hierin $\alpha_{1.2} = 90^\circ$, so ergeben sich Formeln zur Übertragung der Breite, Länge und des Azimuts mittelst einer Ordinate.

Formeln dieser Art waren bei der bayerischen Landesvermessung im Gebrauche nach Entwicklungen von *Soldner* bezw. *Orff*.

Für die preufsische Landesvermessung veröffentlichte neuerdings (nachdem wir bereits zu unseren Formeln gelangt waren) *O. Schreiber* Formeln, die von den Formeln (1), (2), (3) und (4*) sich hauptsächlich dadurch unterscheiden, dafs jede indirekte Rechnung vermieden ist. Man vergl. die *Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Koordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Berlin 1878. Zu beziehen durch die Königl. Hofbuchhandlung von E. S. Mittler & Sohn.* (Es sind besondere Formeln für Dreiecke 1., 2. und 3. Ordnung.)

Unsere Formeln dürften nicht unbequemer als die *Schreiber*schen sein. Sie bieten vielleicht dadurch einen Vorteil, dafs weniger Korrektionen zu berechnen sind, wenn die geographischen Breiten bereits näherungsweise bekannt sind.

Die Anwendbarkeit der Formeln (4) bis zu Distanzen von einigen Äquatorgraden zeigte neuerdings wiederholt *Andrae* im 3. Bd. der *Dänischen Gradmessung* (Umarbeitung von Formeln aus *Astronom. Nachr.* Bd. 50 Nr. 1187 S. 161 und Bd. 53 Nr. 1272 S. 369 1859/60). Von der interessanten und ganz eigenartigen, z. T. geometrischen Methode der Entwicklung giebt Nr. 1272 der *Astronom. Nachr.* sowie *Zachariae* a. a. O. S. 198 (nur für Dreiecksseiten bis 65° Breite) am besten eine klare Vorstellung. Unsere wesentlich verschiedenen Entwicklungen führten S. 431 § 11 zu Formeln von noch gröfserer Schärfe. Aufserdem haben wir für Dreiecksseiten die indirekte Berechnung von x und y mittelst *Legendres* Satz, welche *Andrae* anwendet, vermieden und durch Herbeiziehung höherer Glieder bewirkt, dafs die Formeln (4*) genauer sind als die entsprechenden bei *Zachariae* und daher eine ausgedehntere Anwendbarkeit gestatten.

Eine Vergleichung mit *Astronom. Nachr.* Bd. 71 1868 Nr. 1690 S. 147 zeigt, dafs ebensolche Formeln wie letzterer die trigonometrische Abteilung des preufsischen Generalstabes seit *v. Müffling*, welcher 1820 deren Chef wurde († 1851), bis vor kurzem angewandt hat.

Ebenso wie *Andrae* berechnet *Börsch* x und y mittelst *Legendres* Satz in seiner *Anleitung zur Berechnung rechtwinkliger sphärischer Koordinaten* (Kassel 1868) und benutzt sonst die Formeln (4), bei der 3. derselben aber Argument F. Man vergl. auch seine *Tafeln für geodätische Berechnungen zwischen den geographischen Breiten von 35 bis 71°, nach Bessels Elementen.* (Anlage zum Programm der höheren Gewerbeschule in Kassel. 1869.)

Jordan rechnet Bd. 2 seines *Handbuches* S. 280 u. ff. nach *Bohnenberger* (1826) im allgemeinen wie *Zachariae*, nur in Bezug auf x und y

mittelst Reihen, die im wesentlichen unseren Formeln (1) entsprechen, überhaupt aber ohne die Formeln in die logarithmische Gestalt zu bringen.

Hansens Formeln unterscheiden sich von den unseren insofern, als sie noch die reduzierte Breite enthalten, dagegen benutzen sie ebenfalls die Zerlegung mittelst rechtwinkliger Koordinaten. Vergl. *Geodätische Untersuchungen* S. 38 § 31.

Die Methode der Zerlegung in rechtwinklige Koordinaten bei der Übertragung geographischer Koordinaten dürfte in erster Linie auf *Legendre* zurückzuführen sein. Nachdem er in den Memoiren der franz. Akademie der Wissenschaften von 1787 auseinandergesetzt, wie er sich die Berechnung einer Breitengradmessung denkt, giebt er in *Delambre*, *Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien. 1799* S. 1 u. ff. einige Zusätze. Insbesondere bestimmt er S. 14 u. ff. Breite, Länge und Azimut für den Endpunkt eines Perpendikels zum Meridian, für dessen Fufspunkt die Breite bereits bekannt ist. Die Entwicklung der Formeln, Reihen bis s^3 incl., ist eine sphärische mit K_1' (Fig. 8 S. 134) als Zentrum der Kugel. Dafs *Legendre* hierbei nicht untersucht hat, welchen Einflufs die Abweichung der Kugel vom Ellipsoid und die Voraussetzung kürzester Linien auf letzterem haben, erwähnt schon *Soldner* (*Baeyer. Landesvermessung* S. 533). Wenn dieser aber in gleicher Hinsicht auch *Delambre* nennt, so ist das ein Irrtum, weil der letztere mit Sehnen rechnet, wo selbst bei strenger Rechnung die kürzeste Verbindung auf der Oberfläche gar nicht in frage kommt (vergl. S. 211). Auch ist bezüglich *Legendres* auf die Abhandlung von 1806 zu verweisen (vergl. S. 300).

Wesentlich anderer Art sind die von *Gaufs* 1847 im 2. Teile der *Geodätischen Untersuchungen* S. 26 u. ff. gegebenen Formeln (vergl. S. 312). Bei denselben ist die Zerlegung nach rechtwinkligen Koordinaten nicht angewandt, dagegen wird eine indirekte Rechnung benutzt, indem in die Formeln die arithmetischen Mittel der Breiten und Azimute eingeführt sind.

Dieser Umstand mufs von vornherein der Konvergenz der Reihen günstig erscheinen, allein die Reihen für L und t enthalten aufser den, den Formeln (4*) entsprechenden Gliedern noch andere, wodurch zum Teil der Vorteil wieder aufgehoben wird. (Vergl. weiterhin das Beispiel VII.) Die Koefficienten der Reihenglieder haben aufserdem eine nicht so einfache Form, wie oben, sodafs man mit *einer* Tafel, wie wir mit derjenigen für $\log \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i}$ nicht auskommt.

Jordan giebt S. 421 Bd. 2 seines Handbuches *Gaufs'* Formeln (jedoch nicht mittelst *G.*' direkter Ableitung, sondern mittelst einer andern ebenfalls von *G.* herrührenden indirekten). Zu den Tafeln giebt er noch Hilfstafeln für veränderliche Excentricität.

§ 23. Rechtwinklige Koordinaten, Distanz und Azimute aus geographischen Koordinaten für Entfernungen von der Ordnung der Dreiecksseiten. Setzen wir im Anschlufs an § 17 S. 447 an Stelle der Formeln (1), (3) und (5) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\sin \eta' &= \sin L_{1.2} \cos B_2 + \cdots \\
\sin (F - B_2) &= \sin^2 \frac{L_{1.2}}{2} \sin B_2 \cos B_2 \cdot \frac{2 W_2^2}{1 - e^2} + \cdots \\
\tan t &= -\tan L_{1.2} \sin B_2 + \cdots,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

so sind die begangenen Fehler, wenn L als Arcus verstanden wird, im wesentlichen durch die nachstehenden Ausdrücke gegeben:

$$\text{für } \eta' : \quad -\frac{1}{15}\varrho'' e^2 L^5 \sin^2 B_2 \cos^5 B_2$$

$$\text{für } F - B_2 : \quad +\frac{1}{2}\varrho'' e^2 L^4 \sin B_2 \cos^3 B_2 \left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{6}\cos^2 B_2\right)$$

$$\text{für } t : \quad -\frac{1}{8}\varrho'' e^2 L^3 \sin B_2 \cos^4 B_2 .$$

Es ist wie früher S. 447 vorausgesetzt, dafs L eine kleine Gröfse sei, womit auch t auf kleine Werte beschränkt ist. In Bezug auf B_2 erhält man als Maximalwerte:

für η' :	$-\ 11'' L^5$ bei $\sin^2 B_2 = \frac{2}{7}$	$B_2 = \pm\, 32\frac{1}{2}{}^0$
für $F - B_2$:	$\pm\ 55'' L^4$ bei $\sin^2 B_2 = 0{,}093$	$B_2 = \pm\, 17\frac{3}{4}$
für t :	$\pm\ 130'' L^3$ bei $\sin^2 B_2 = \frac{1}{5}$	$B_2 = \pm\, 26\frac{1}{2}$.

Für $L = 0{,}02$ entsteht in $F - B_2$ 0,000009″, in t 0,0010″ Fehler; dagegen wird der Fehler in η' verschwindend klein. $L = 0{,}05$ giebt in η', $F - B_2$ und t bezw. 0,000003″, 0,00034″ und 0,016″. . .

Wir setzen nun ferner nach S. 447 (4):

$$\log x = \log\left(\frac{a_0(1-e^2)(B_1 - F)\,\text{in Sek.}}{\varrho'' W_m^3}\right) + \frac{Me^2}{8\varrho''^2}\left(\div\right)^2 \cos(B_1 + F) + \cdots \quad (2)$$

Der hiermit in x begangene Fehler beurteilt sich wie S. 453 und zwar beträgt er im Maximum in Äquatorsekunden

$$\text{für } x : \quad -\ 1{,}5''\,(B_1 - F)^3, \text{ wobei } \frac{1}{2}(B_1 + F) = \pm\, 41^0$$

und $B_1 - F$ als Arcus verstanden ist. Für $B_1 - F = 0{,}02$ giebt dies $-$ 0,000012″. Für $B_1 - F = 0{,}05$ wird der Fehler $-$ 0,0002″.

Nach S. 130 (4) haben wir nun sofort zu den (1) folgende Reihenentwicklungen, in denen L als Arcus zu verstehen ist:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{\log \eta'} &= \left\{\begin{aligned} &\log(\varrho'' L \cos B_2) - \frac{1}{6} ML^2 \sin^2 B_2 \\ &- \frac{1}{120} ML^4 \sin^2 B_2\,[12 - 11 \sin^2 B_2] + Gl_6 \end{aligned}\right\} \\
\underset{\text{in Sek.}}{\log(F - B_2)} &= \left\{\begin{aligned} &\log\left(\frac{\varrho''}{2(1-e^2)} L^2 \sin B_2 \cos B_2 \cdot W_2^{\,2}\right) + \frac{1}{12} ML^2 [5 - 6\sin^2 B_2] \\ &+ \frac{1}{1440} ML^4 [119 - 420 \sin^2 B_2 + 300 \sin^4 B_2] + Gl_6 \end{aligned}\right\} \\
\underset{\text{in Sek.}}{\log t} &= \left\{\begin{aligned} &\log(-\varrho'' L \sin B_2) + \frac{1}{3} ML^2 \cos^2 B_2 \\ &+ \frac{1}{90} ML^4 \cos^2 B_2\,[7 - 13 \sin^2 B_2] + Gl_6 \,; \end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Vernachlässigt man die in L^4 multiplizierten Glieder, so ergeben sich im Maximum für η', $F - B_2$ und t nachstehende Fehlerbeträge:

$$\begin{array}{rl|l} \text{in } \eta' : & -4000'' L^5 \text{ für } \sin^2 B_2 = 0{,}42 & B_2 = \pm 41^0 \\ \text{in } F - B_2 : & \pm 1700'' L^6 \text{ für } \sin^2 B_2 = 0{,}10 & B_2 = \pm 18^0 \\ \text{in } t : & \pm 3000'' L^5 \text{ für } \sin^2 B_2 = 0{,}14 & B_2 = \pm 21^0. \end{array}$$

Ist $L = 0{,}02$, so wird im Maximum nur η' merklich fehlerhaft, nämlich um $-0{,}000013''$. Für $L = 0{,}05$ sind die Maximalfehler in η', $F - B_2$ und t bezw. $-0{,}0013''$, $\pm 0{,}000025''$ und $\pm 0{,}0009''$.

Man erkennt hiermit leicht, dafs für die Formeln (1) immer die Formeln (3) unter Vernachlässigung der in L^4 multiplizierten Glieder gesetzt werden können, so lange L den Betrag von etwa 0,02 d. i. rund $1{,}2^0$ nicht überschreitet. Bei gröfseren Werten von L werden nicht nur die eben erwähnten Glieder der Formeln (3) merklich, sondern auch die den Formeln (1) anhaftenden Vernachlässigungen. Man wird daher im allgemeinen zu den Formeln des § 17 S. 447 zurückgreifen müssen, sobald der absolute Werte von $L > 0{,}02$ ist.

§ 24. **Fortsetzung.** Um bequeme Formeln zur Berechnung von s und $\alpha_{1.2}$ zu gewinnen, knüpfen wir jetzt nicht an die (10) S. 447 an, denn diese sind nicht mehr bequem, wenn $\Delta\mathfrak{a}$ nach der abgekürzten Formel $-\varrho'' xy : 2\varrho^2$ berechnet wird.

Wir bilden dagegen zunächst mittelst der Formeln (8) und (9) S. 446 u. 447 indem wir sie nämlich in die Entwicklungen

$$s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right) = s \cos \alpha_{1.2}\left(1 - \frac{1}{18}\Delta\mathfrak{a}^2 + Gl_8\right) - \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\, s \sin \alpha_{1.2}\,(1 + Gl_8)$$

$$s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right) = s \sin \alpha_{1.2}\left(1 - \frac{1}{18}\Delta\mathfrak{a}^2 + Gl_8\right) + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\, s \cos \alpha_{1.2}\,(1 + Gl_6)$$

einführen, nachstehende Formeln:

$$s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right) = x \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{6}\frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{1}{120}\frac{y^4}{\varrho^4} - \frac{1}{60}\frac{x^2 y^2}{\varrho^4} \\ + \frac{1}{36}\frac{xy^2}{\varrho^3} e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \end{array} \right\}$$

$$s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right) = y \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{180}\frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{1}{60}\frac{x^2 y^2}{\varrho^4} \\ - \frac{1}{18}\frac{x^3}{\varrho^3} e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \end{array} \right\}$$

oder logarithmisch:

$$\left.\begin{aligned}\log\left(s\cos\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)\right)&=\left\{\begin{aligned}&\log x-\frac{1}{6}M\frac{y^2}{\varrho^2}-\frac{1}{45}M\frac{y^4}{\varrho^4}-\frac{1}{60}M\frac{x^2y^2}{\varrho^4}\\&+\frac{1}{36}Me^2\frac{xy^2}{\varrho^3}\sin 2B_0+Gl_6\end{aligned}\right\}\\\log\left(s\sin\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)\right)&=\left\{\begin{aligned}&\log y+\frac{1}{180}M\frac{x^4}{\varrho^4}-\frac{1}{60}M\frac{x^2y^2}{\varrho^4}\\&-\frac{1}{18}Me^2\frac{x^3}{\varrho^3}\sin 2B_0+Gl_6\,.\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Dabei ist:

$$\varrho^2=b_0^2:W_0^4 \qquad (2)$$

$$\log\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\mathfrak{a}}=\log\left(-\frac{1}{2}\varrho''\frac{xy}{\varrho^2}\right)+\frac{1}{12}M\frac{e^2}{\varrho^2}+Gl_4\,. \qquad (3)$$

Läfst man nun in vorstehenden Formeln die klein gedruckten Glieder weg, so sind die begangenen Fehler für $s\cos\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)$ und $s\sin\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)$ in Äquatorsekunden (vergl. S. 451), sowie für $\varDelta\mathfrak{a}$ in Sekunden bezw. gleich

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{1}{180}\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5\sin^2\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2}\,(4\sin^2\alpha_{1.2}+3\cos^2\alpha_{1.2})\\&\qquad+\frac{1}{36}\varrho''e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^4\sin^2\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{1.2}\sin 2B_0\,;\\&+\frac{1}{180}\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5\sin\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{1.2}\,(\cos^2\alpha_{1.2}-3\sin^2\alpha_{1.2})\\&\qquad-\frac{1}{18}\varrho''e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^4\sin\alpha_{1.2}\cos^3\alpha_{1.2}\sin 2B_0\,;\end{aligned}\right\}\text{zu (1)}$$

$$-\frac{1}{24}\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2}\,. \qquad \text{zu (3)}$$

Die Maximalwerte dieser Ausdrücke sind zum Teil schon S. 451 angegeben. Man erhält als Maximalwerte der von e^2 unabhängigen Glieder:

$\pm 1600''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5$ für $\sin^2\alpha_{1.2}=0{,}7$	$\alpha_{1.2}$ im 1. Qu. $=57^0$	zu (1)
$\pm\ 520''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5$ „ $\sin^2\alpha_{1.2}=0{,}7$	„ 57^0	zu (1)
$\pm 4300''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4$ „ $\tan\alpha_{1.2}=\pm 1$	„ 45^0,	zu (3)

dagegen für die von e^2 abhängigen Glieder:

$\pm 9{,}5''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4$ für $\tan\alpha_{1.2}=\pm 1$	$\alpha_{1.2}$ im 1. Qu. $=45^0$	B_0 beliebig	zu (1)
$\pm 25\ \left(\frac{s}{a_0}\right)^4$ „ $\tan\alpha_{1.2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	„ 30	$B_0=\pm 45^0$.	zu (1)

Hiernach werden die Maximalfehler für $s : a_0 = 0{,}02$ in den Werten von $s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)$, $s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)$ und $\varDelta\mathfrak{a}$ höchstens bezw.:

$$\pm 0{,}000006'', \ \pm 0{,}000005'' \text{ und } \pm 0{,}0007'';$$

für $s : a_0 = 0{,}05$ dagegen $\pm 0{,}0005''$, $\pm 0{,}0002''$ und $\pm 0{,}027''$.

§ 25. **Zusammenstellung.** Gegeben: B_1, B_2 und $L_{1.2}$.

Gesucht: s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ bezw. x und y für P_2 in Bezug auf den Meridian von P_1.

$$\left.\begin{array}{l}
\eta'_0 = + \cos B_2 \,.\, \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} \qquad \log \underset{\text{in Sek.}}{\eta'} = \log \eta'_0 - \frac{M}{6\varrho''^2} t_0^2 + \cdots \\
t_0 = - \sin B_2 \,.\, \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} \qquad \log \underset{\text{in Sek.}}{t} = \log t_0 + \frac{M}{3\varrho''^2} \eta_0'^2 + \cdots \\
\log \frac{M}{6\varrho''^2} = 5{,}230783-10 \quad \log \frac{M}{3\varrho''^2} = 5{,}531813-10, \\
\text{beide für Einh. der 7. Dec.;} \\
\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \log \frac{-\eta'_0 t_0 W_2^2}{2(1-e^2)\varrho''} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{6\varrho''^2} t_0^2 + \frac{5}{4} \cdot \frac{M}{3\varrho''^2} \eta_0'^2 + \cdots \\
W_2 \text{ zum Argument } B_2 \\
\log \frac{-1}{2(1-e^2)\varrho''} = 4{,}3874532.3_n - 10
\end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\log x = \log\left(\frac{\varrho_m (B_1 - F) \text{ in Sek.}}{\varrho''}\right) + \frac{Me^2}{8\varrho''^2} \left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)^2 \cos(B_1 + F) + \cdots \\
\frac{\varrho_m}{\varrho''} = \frac{a_0 (1 - e^2)}{\varrho'' W_m^3} = [1{,}4873099.71]\, W_m^3; \quad W_m \text{ Arg. } \frac{1}{2}(B_1 + F) \\
\log \frac{Me^2}{8\varrho''^2} = 2{,}930-10 \text{ für Einh. der 7. Dec.}
\end{array}\right\} (2)$$

$$y = \varrho_n \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{\varrho''} = \frac{a_0}{\varrho''} \cdot \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{W_2} = \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{W_2} [1{,}4902183.30] \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\log \left\{s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)\right\} = \log x - \frac{1}{6} \frac{M}{b_0^2} y^2 W_0^4 + \cdots \\
\log \left\{s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)\right\} = \log y + \cdots \\
\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\mathfrak{a}} = - \frac{1}{2} \frac{\varrho''}{b_0^2} xy W_0^4 + \cdots \\
\log\left(-\frac{1}{2} \frac{\varrho''}{b_0^2}\right) = 1{,}407017_n - 10 \qquad W_0 \text{ zum Argument } F + \frac{1}{3}(B_1 - F) \\
\log\left(\frac{1}{6} \frac{M}{b_0^2}\right) = 2{,}25325 \quad -10 \qquad \text{für Einh. der 7. Dec.}
\end{array}\right\} (4)$$

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \varDelta\mathfrak{a} + t. \tag{5}$$

Diese Formeln reichen zur schärfsten Rechnung aus, so lange $s : a_0 \leqq 0{,}02$ und zugleich $L_{1.2} \leqq 1{,}2^0$ ist. Für Spezielleres in Bezug auf die Genauigkeit sind die beiden letzten Paragraphen zu vergleichen.

Kreis der Anwendung der Formeln. Aufser vereinzelten Anwendungen erlangen z. B. bei der preufsischen Landesvermessung die Formeln dieses Paragraphen (oder doch ähnliche) eine gröfsere Verwendung, sobald es gilt, einen kleineren Landesteil auf ein besonderes rechtwinkliges Koordinatensystem zu beziehen. Einer der Punkte, etwa P_1 mit B_1 als geographische Breite, wird dann als Koordinatenanfang genommen und aus der relativen geographischen Lage der anderen Punkte zu P_1 auf ihre Koordinaten geschlossen. (Vergl. S. 420.)

Die Aufgabe dieses Paragraphen und des § 17 S. 447 ist auf wesentlich andere Art mit Hilfe des vertikalen Schnittes namentlich von *Hansen* gelöst worden (vergl. die Bem. S. 265). Die betreffenden Formeln finden sich in § 53 und zum Teil in § 52 S. 70 u. ff. seiner *Geodätischen Untersuchungen.* Es scheint uns nun nicht zweifelhaft, namentlich auf Grund einer Berechnung des von *Hansen* § 70 S. 91 gegebenen Zahlenbeispiels, dafs die oben entwickelten Formeln den *Hansen*schen vorzuziehen sind. Zur eventuellen Vergleichung berechnen auch wir in den folgenden Paragraphen dieses Beispiel.

Oudemans bespricht in *Astronom. Nachr.* Bd. 81 Nr. 1940 S. 305 u. ff. zahlreiche ältere und unzureichende Formeln zur Lösung der Aufgabe, aus geographischen Koordinaten Entfernung und Azimute zu bestimmen. Schliefslich bleibt er bei einer Umformung der obenerwähnten *Hansen*schen Formeln stehen, welche Umformung aber die Reihenentwicklung gröfstenteils unter Anwendung der auch von uns S. 82 erwähnten Berechnungsformeln der sin und tan kleiner Winkel mittelst arc und sec vermeidet. Diese Formeln scheinen in der That recht bequem zu sein, nur ist ihr Genauigkeitsgrad vom Verfasser nicht völlig festgestellt und es besteht der Übelstand, dafs eine der Formeln (es ist diejenige für die Entfernung) für kleine Azimute versagt (wegen des Nenners sin *Azimut*), sodafs der Formelapparat hier vor der Anwendung einer Verbesserung bedarf.

Wenn es sich aber nur um Entfernung und Azimute handelt, möchten wir jedenfalls die Formeln S. 318 allen anderen vorziehen.

Modifikationen obiger Formeln für noch kleinere Distanzen siehe bei *Zachariae* a. a. O. S. 218 und *Jordan* a. a. O. Bd. 2 S. 291 u. ff.

§ 26. **Zahlenbeispiel VI.** Vergl. *Hansen*, Geodätische Untersuchungen S. 47 und 91 (§ 37 u. 70).

$$\text{Gegeben: } B_1 = 20^0 \quad s = \frac{2^0}{\varrho^0}\, a_0 \quad \alpha_{1.2} = 30^0.$$

Wir wenden die Formeln von S. 456 an und benutzen 7ziffrige Logarithmen mit Ansatz der 8. Stelle aus den Proportionalteilen,

sodafs die Genauigkeit jener Formeln, obgleich s verhältnismäfsig grofs ist, völlig genügt. (Es würden in dieser Hinsicht auch noch 8 genaue Ziffern angewandt werden können.)

Man hat zunächst für die Umwandlung von s in Metern, sowie für u und v nach den *Formeln* (1) S. 456:

$$\begin{cases}\log 2a_0 = 7{,}1056734.6 \\ \log \varrho^0 = 1{,}7581226.3\end{cases} \qquad \log\sin\alpha_{1.2} = 9{,}6989700 - 10$$
$$\log s = 5{,}3475508.3 \qquad \log\cos\alpha_{1.2} = 9{,}9375306 - 10$$
$$\log u = 5{,}2850814.3 \qquad \log v = 5{,}0465208.3\,.$$

In 1. Annäherung ist hiermit

$$F - B_1 = [6{,}732_n + 5{,}285 - 10] = -104{,}0',$$

sodafs sich findet $B_0 = 20^0 - 1^0\,9' = 18^0\,51'$ mit $\log W_0 = 9{,}999849 - 10$ und $\log W_0^4 = 9{,}99940 - 10$. Man hat jetzt:

$$\begin{cases}\log u = 5{,}2850814.3 \\ +[2{,}55428 - 10]\,v^2 W_0^4 = +\quad 443.3\end{cases}$$
$$\log x = 5{,}2851257.6$$

$$\begin{cases}\log v = 5{,}0465208.3 \\ -[2{,}25325 - 10]\,u^2 W_0^4 = -\quad 665.0\end{cases}$$
$$\log y = 5{,}0464543.3$$

$$\begin{cases}1{,}40702_n - 10 \\ \log(xy) = 10{,}33158 \\ \log W_0^4 = 9{,}99940 - 10\end{cases}$$
$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = 1{,}73800_n;\ \Delta\mathfrak{a} = -54{,}702''.$$

Formel (2) S. 456 giebt nunmehr:

In 1. Annäherung ist das Argument für W_m gleich $20^0 - 52' = 19^0 8'$, womit $3 \log W_m$ gebildet ist, dessen Zuwachs für 1' — 7.86 beträgt.

$$\begin{cases}\log x = 5{,}2851257.6 \\ \qquad 8{,}5126900.3 - 10 \\ 3\log W_m = 9{,}9995327.3 - 10\end{cases}$$

$\frac{1}{2}(B_1 - F)$ wird genauer gleich $\frac{1}{2}$ [3,79735] Sek. oder 52,26' und also der Zuwachs zu 3 log W_m gleich + 7.86 × 0,26.

$B_1 + F = 38^0\,15'$.

$$\begin{cases}\log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = 3{,}7973485.2 \\ -[2{,}930 - 10]\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 \cos(B_1 + F) = \qquad -2.6 \\ \text{Zuwachs zu } 3\log W_m = \qquad +2.0\end{cases}$$
$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = 3{,}7973484.6$$

$$B_1 - F = 1^0\,44'\,31{,}168'' \qquad F = 18^0\,15'\,28{,}832''.$$

Die *Formeln* (3) und (4*) S. 457 geben:

$$\begin{cases} 8{,}5097816.7 - 10 \\ \log y = 5{,}0464543.3 \\ \log W_F = 9{,}9998577.0 - 10 \end{cases}$$

Änderung von $\log W_F$ für 1' gleich — 2.51.

$$\begin{cases} \underset{\text{in Sek.}}{\log \eta} = 3{,}5560937.0 \\ \log \cos F = 9{,}9775660.2 - 10 \\ \log \tan F = 9{,}5183896.5 - 10 \end{cases}$$

$$\log L_0 = 3{,}5785276.8$$
$$\log t_0 = 3{,}0744833.5_n$$

$$\begin{cases} \log L_0 = 3{,}5785276.8 \\ -[5{,}53181 - 10]\, t_0^2 = -\quad 48.0 \\ +[4{,}271 - 20]\, t_0^4 = \quad 0.0 \\ +[4{,}204 - 20]\, t_0^2 L_0^2 = \quad 0.0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log L_{1.2}} = 3{,}5785228.8$$

$$L_{1.2} = 1^0\ 3'\ 8{,}985''$$

$$\begin{cases} \log t_0 = 3{,}0744833.5_n \\ -\frac{1}{2} \times 48{,}0 = -\quad 24.0 \\ -[5{,}23078 - 10]\, L_{1.2}^2 = -\quad 244.3 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log t} = 3{,}0744565.2_n$$

$$\begin{cases} t = -\quad 19'\ 47{,}016'' \\ \Delta\mathfrak{a} = -\quad 54{,}702 \\ \alpha_{2.1} = 30\ 0\ 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{2.1} = 209^0 39'\ 18{,}282''.$$

Anstatt W_F ist eigentlich das Argument $F + \frac{3}{4}(B_2 - F)$ anzuwenden. Die Änderung von 2 log W für — 0,13' ist aber verschwindend.

$$\begin{cases} 4{,}38745 - 10 \\ \log \eta = 3{,}55609 \\ \log t_0 = 3{,}07448_n \\ 2 \log W_F = 9{,}99972 - 10 \\ -\frac{1}{2} \times 48.0 = \quad 0 \\ -\frac{1}{2} \times 244.3 = \quad -1 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log (B_2 - F)} = 1{,}01773_n$$

$B_2 - F = -\ 10{,}417''$ $\quad B_2 = 18^0\ 15'\ 18{,}415''$.

Resultate:					*Hansen* a. a. O. S. 48:
	$B_2 =$	18°	15'	18,415"	18,417"
	$L_{1.2} =$	1	3	8,985	8,983
	$\alpha_{2.1} =$	209	39	18,282	18,279.

§ 27. Zahlenbeispiel VI. Umkehrung der Aufgabe des vorigen Paragraphen.

Gegeben: $B_1 = 20^0$ $B_2 = 18^0\,15'\,18{,}415''$ $L_{1.2} = 1^0\,13'\,8{,}985''$.

Die *Formeln* des § 25 S. 463 geben nach und nach die folgenden Werte, indem $L_{1.2} = 3788{,}985''$ ist:

$$\left\{\begin{aligned} \log \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} &= 3{,}5785228.8 \\ \log\cos B_2 &= 9{,}9775732.9 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \log \eta'_0 &= 3{,}5560961.7 \\ -[5{,}23078-10]\,t_0^2 &= -\quad 24.0 \end{aligned}\right.$$

Argument für $\log W_2 = 18^0\,15{,}307'$

$$\left\{\begin{aligned} \log \underset{\text{in Sek.}}{\eta'} &= 3{,}5560937.7 \\ -\log W_2 &= 0{,}0001422.6 \\ & \ 1{,}4902183.3 \end{aligned}\right.$$

$$\log y = 5{,}0464543.6$$

$$\left\{\begin{aligned} \log \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} &\quad 3{,}5785228.8 \\ \log\sin B_2 &= 9{,}4958890.8 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \log t_0 &= 3{,}0744119.6_n \\ +[5{,}53181-10]\,\eta_0'^2 &= +\quad 440.6 \end{aligned}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = 3{,}0744560.2_n$$

$$t = -\ 19'\,47{,}015''.$$

$$\left\{\begin{aligned} & \ 4{,}38745_n - 10 \\ \log \eta'_0 &= 3{,}55610 \\ \log t_0 &= 3{,}07441 \\ 2\log W_2 &= 9{,}99972 - 10 \\ -\tfrac{1}{2}\times 24.0 &= \quad 0 \\ +\tfrac{5}{4}\times 440.6 &= +\quad 6 \end{aligned}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F-B_2)} = 1{,}01774.$$

$$\begin{aligned} F - B_2 &= \quad +\ 10{,}417'' \\ F &= 18^0\,15'\ \ 28{,}832'' \\ B_1 - F &= 1^0\,44'\ \ 31{,}168'' \\ &= 6271{,}168'' \end{aligned}$$

Die Formel (2) S. 463 giebt:

$$\left\{\begin{aligned} & \ 1{,}4873099.7 \\ \log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1-F)} &= 3{,}7973484.6 \\ -3\log W_m &= 0{,}0004670.7 \\ +[2{,}930-10]\,(B_1-F)^2\cos(B_1+F) &= +\quad 2.6 \end{aligned}\right.$$

$$\log x = 5{,}2851257.6$$

Argument $\frac{1}{2}(B_1+F)$ für $\log W_m = 19^0\,7{,}740'$. $B_1 + F = 38^0\,15$.

Die Formeln (4) u. (5) S. 463 u. 464 geben mit $\log W_0 = 9{,}999849 - 10$, dieses entsprechend dem Argument $B_0 = 18^0\,51'$:

$$\begin{cases} \log x = 5{,}2851257.6 \\ -[2{,}25325-10]\,y^2 W_0^4 = -\ \ 221.6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log\left\{s\cos\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\} = 5{,}2851036.0 \\ \log\left\{s\sin\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\} = 5{,}0464543.6 \end{cases}$$

$$\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a} = 29^0 59' 41{,}780''$$

$$\log s = 5{,}3475508.3$$

$$\begin{cases} 1{,}40702_n - 10 \\ \log(xy) = 10{,}33158 \\ 4\log W_0 = 9{,}99940 - 10 \end{cases}$$

$$\log \Delta\mathfrak{a} = 1{,}73800 \quad \text{in Sek.}$$

$$\begin{cases} \Delta\mathfrak{a} = -\ \ 54{,}702'' \\ t = -\ \ 19' 47{,}015'' \\ \alpha_{1.2} = 30^0\ 0'\ 0{,}014'' \end{cases}$$

$$\alpha_{2.1} = 209^0 39' 18{,}297''.$$

Resultate:		nach vorigem Paragraphen:	nach *Hansen* S. 92 a. a. O.:
	$\log x = 5{,}2851257.6$	7.6	$\frac{s}{a_0}$ um 0,004' größer
	$\log y = 5{,}0464543.6$	3.3	als 2°, macht
	$\log s = 5{,}3475508.3$	8.3	2.5 im Logar. mehr.
	$\alpha_{1.2} = 30^0\ 0'\ 0{,}014''$	0,000''	— 0,020''
	$\alpha_{2.1} = 209\ 39\ 18{,}297''$	18,282	18,256.

§ 28. Zahlenbeispiel VII. $B_1 = 51^0\,48'\ 1{,}9294''$

$$\log s = 5{,}0252128.6 \qquad \alpha_{1.2} = 5^0\,42'\,21{,}7699''$$

für die Dreiecksseite Brocken-Inselsberg der hannoverischen Vermessung nach *Gaufs*, *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*, *2. Abth.*, S. 33.

Zu den *Formeln* (1) und (2) S. 456 hat man bei Anwendung 7ziffriger Logarithmen:

$$\log\sin\alpha_{1.2} = 8{,}9974945.7 - 10 \qquad \log\cos\alpha_{1.2} = 9{,}9978427.5 - 10$$

$$\log v = 4{,}0227074.3 \qquad \log u = 5{,}0230556.1$$

$$F - B_1 = [6{,}732_n - 10 + 5{,}023] = -\ 56{,}8'$$

$\log W_0$ wird mit dem Argument $B_0 = 51^0\,48' - \frac{2}{3}\,.\,57'$ d. i. $51^0\,10'$ gleich $9{,}999119 - 10$ und $\log W_0^4 = 9{,}99648 - 10$.

Hiermit folgt:

$$\begin{cases} \log u = 5{,}0230556.1 \\ +[2{,}5543-10]\,v^2 W_0^4 = +\ \ 4.0 \end{cases}$$

$$\log x = 5{,}0230560.1$$

$$\begin{cases} \log v = 4{,}0227074.3 \\ -[2{,}2533]\,u^2 W_0^4 = -\ \ 197.6 \end{cases}$$

$$\log y = 4{,}0226876.7$$

$$\begin{cases} & 1{,}40702_n - 10 \\ \log(xy) & = 9{,}04574 \\ 4\log W_0 & = 9{,}99648 \quad - 10 \end{cases}$$
$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta \mathfrak{a}} = 0{,}44924_n;\ \varDelta\mathfrak{a} = -2{,}8135''.$$

Formel (2) S. 456 giebt nunmehr:

In 1. Annäherung ist das Argument für W_m gleich $51^\circ\, 48{,}03' - 28' = 51^\circ\, 20'$ womit $3\log W_m$ gebildet wurde dessen Zuwachs für $1' = -12.39$ ist.

$$\begin{cases} \log x & = 5{,}0230560.1 \\ & \ 8{,}5126900.3-10 \\ 3\log W_m & = 9{,}9973438.9-10 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}(B_1 - F)$ wird genauer gleich $\frac{1}{2}$ [3,53309] Sek. d. i. 28,44′, also das Argument gleich 51° 19,59′.

$B_1 + F = 102^\circ\, 39'$.

$$\begin{cases} \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) & = 3{,}5330899.3 \\ -[2{,}930-10]\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2\cos(B_1+F) & = + \qquad 0.2 \\ \text{Zuwachs zu } 3\log W_m \text{ für } -0{,}41' & = + \qquad 5.1 \end{cases}$$
$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = 3{,}5330904.6$$

$$B_1 - F = 56'\ 52{,}6398'' \qquad F = 50^0\ 51'\ 9{,}2896''.$$

Die *Formeln* (3) und (4*) S. 457 geben:

$$\begin{cases} & 8{,}5097816.7 - 10 \\ \log y & = 4{,}0226876.7 \\ \log W_F & = 9{,}9991265.7 - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log \underset{\text{in Sek.}}{\eta} & = 2{,}5315959.1 \\ \log\cos F & = 9{,}8002480.4 - 10 \\ \log\tan F & = 0{,}0893472.5 - 10 \end{cases}$$

Änderung von $\log W_F$ für 1′ gleich − 4.0

$$\log L_0 = 2{,}7313478.7$$
$$\log t_0 = 2{,}6209431.6_n$$

$$\begin{cases} \log L_0 & = 2{,}7313478.7 \\ -[5{,}532-10]\,t_0^2 & = - \qquad 5.9 \\ \text{höhere Glieder} & = \qquad\ 0.0 \end{cases}$$
$$\log \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = 2{,}7313472.8$$
$$L_{1.2} = 8'\ 58{,}7003''$$

$$\begin{cases} \log t_0 & = 2{,}6209431.6_n \\ -\frac{1}{2}\times 5.9 & = - \qquad 3.0 \\ -[5{,}231-10]\,L_{1.2}^2 & = - \qquad 4.9 \end{cases}$$
$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = 2{,}6209423.7_n$$

$$\left.\begin{aligned} t &= -\ 6'\ 57{,}7749'' \\ \varDelta\mathfrak{a} &= -\qquad 2{,}8135 \\ \alpha_{1.2} &= 5^0 42\ 21{,}7699 \end{aligned}\right\} \alpha_{2.1} = 185^0 35' 21{,}1815''$$

Da $B_2 - F$ nur Bruchteile Sek. beträgt, so reicht W_F unmittelbar zur Berechnung aus.

$$\left\{\begin{aligned} & 4{,}38745 - 10 \\ \log\eta &= 2{,}53160 \\ \log t_0 &= 2{,}62094_n \\ 2\log W_F &= 9{,}99825 - 10 \\ \text{höhere Glieder} &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\log(B_2 - F)_{\text{in Sek.}} = 9{,}53824_n - 10$$

$$B_2 - F = -\ 0{,}3453'' \quad B_2 = 50^0\ 51'\ 8{,}9443''.$$

Resultate:		nach *Gauſs*:
	$B_2 = 50^0\ 51'\ 8{,}9443''$	8,9444″
	$L_{1.2} = 0\ \ 8\ \ 58{,}7003$	58,7002
	$\alpha_{2.1} = 185\ \ 35\ \ 21{,}1815$	21,1815.

§ 29. **Zahlenbeispiel II.** Beispiel 7 in *Formeln und Tafeln etc.* *(für Dreiecksseiten 1. Ordnung)* von *O. Schreiber.*

Gegeben: $B_1 = 57^0 \quad s = 120^{km} \quad \alpha_{1.2} = 315^0.$

Wir wenden hier Logarithmen bis zu 9 genauen Decimalstellen an.

Die *Formeln* (1) S. 456 geben:

$$\left\{\begin{aligned} \log s &= 5{,}0791812.46 \\ \log\sin\alpha_{1.2} &= 9{,}8494850.02_n - 10 \\ \log\cos\alpha_{1.2} &= 9{,}8494850.02 - 10 \end{aligned}\right. \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} \log v &= 4{,}9286662.48_n \\ \log u &= 4{,}9286662.48 \end{aligned}$$

$$F - B_1 = [6{,}732_n - 10 + 4{,}929] = -\ 45{,}8',$$

daher ist

$$B_0 = 57^0 - 30{,}6' = 56^0\ 29{,}4',$$

$$\log W_0 = 9{,}998990 - 10 \text{ und } 4\log W_0 = 9{,}995960 - 10.$$

$$\left\{\begin{aligned} \log u &= 4{,}9286662.48 \\ +\ [2{,}55428 - 10]\, v^2 W_0^4 &= +\qquad 255.61 \end{aligned}\right.$$

$$\log x = 4{,}9286918.09$$

$$\left\{\begin{aligned} \log v &= 4{,}9286662.48_n \\ -\ [2{,}25325 - 10]\, u^2 W_0^4 &= -\qquad 127.80 \end{aligned}\right.$$

$$\log y = 4{,}9286534.68_n$$

$$\begin{cases} & 1{,}407017_n \\ \log(xy) = & 9{,}857345_n \\ 4\log W_0 = & 9{,}995960 - 10 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log \Delta\mathfrak{a}} = 1{,}260322;\quad \Delta\mathfrak{a} = 18{,}2105''.$$

Formel (2) S. 456 giebt nunmehr:

In 1. Annäherung ist das Argument für W_m gleich $57^\circ - 23' = 56^\circ 37'$, womit $3\log W_m$ gebildet ist. Zuwachs desselben für 1′ gleich -11.67.

$\frac{1}{2}(B_1 - F)$ wird genauer gleich $\frac{1}{2}$ [3,43834] Sek. d. i. 22,865′ und daher der Zuwachs für $3\log W_m$ gleich $-0{,}135 \times 11{,}67$.

$B_1 + F = 113^\circ 14'$.

$$\begin{cases} \log x = 4{,}9286918.09 \\ 8{,}5126900.29 - 10 \\ 3\log W_m = 9{,}9969613.57 - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = 3{,}4383431.95 \\ -[2{,}930-10]\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 \cos(B_1+F) = + \quad 0.25 \\ \text{Zuwachs für } 3\log W_m - 0{,}135 \times 11{,}67 = - \quad 1.57 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log(F - B_1)} = 3{,}4383430.63$$

$$F - B_1 = 45'\ 43{,}74068'' \qquad F = 56^0\ 14'\ 16{,}25932''$$

Die *Formeln* (3) und (4*) S. 457 geben:

$$\begin{cases} & 8{,}5097816.70 - 10 \\ \log y = & 4{,}9286534.68_n \\ \log W_F = & 9{,}9989959.90 - 10 \end{cases}$$

Änderung von $\log W_F$ für 1′ gleich $-3{,}92$.

$$\begin{cases} \underset{\text{in Sek.}}{\log \eta} = 3{,}4374311.28_n \\ \log\cos F = 9{,}7448767.69 - 10 \\ \log\tan F = 0{,}1749080.61 \end{cases}$$

$$\log L_0 = 3{,}6925543.59_n$$
$$\log t_0 = 3{,}6123391.89$$

$$\begin{cases} \log L_0 = 3{,}6925543.59_n \\ -[5{,}531813 - 10]\, t_0^2 = - \quad 570.80 \\ +[4{,}271 - 20]\, t_0^4 = + \quad 0.05 \\ +[4{,}204 - 20]\, t_0^2 L_0^2 = + \quad 0.07 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log L_{1.2}} = 3{,}6924972.91_n$$

$$L_{1.2} = -1^0\ 22'\ 6{,}03270''$$

$$\begin{cases} \log t_0 = 3{,}6123391.89 \\ -\frac{1}{2} \times 570.80 = - \quad 285.40 \\ -[5{,}23078 - 10]\, L_{1.2}^2 = - \quad 412.84 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log t} = 3{,}6122693.65$$

$$\begin{array}{rl} t = & 1^0\ 8'\ 15{,}1458'' \\ \Delta\mathfrak{a} = & 18{,}2105 \\ \alpha_{1.2} = & 315\ \ 0\ \ 0 \\ \hline \alpha_{2.1} = & 136\ \ 8\ \ 33{,}3563'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 4{,}3874532.3 - 10 \\ \log \eta = & 3{,}4374311.3_n \\ \log t_0 = & 3{,}6123391.9 \\ 2 \log W_F = & 9{,}9979919.8 - 10 \\ \hline \log (B_2 - F) \text{ in 1. Ann.} = & 1{,}4352155.3_n \\ \text{Zuwachs für } 2 \log W = & +\ 2.7 \\ - [5{,}23078-10]\, t^2 = & -\ 285.4 \\ -\frac{1}{2} [5{,}23078-10]\, L_0^2 = & -\ 206.5 \\ \hline \log (B_2 - F)_{\text{in Sek.}} = & 1{,}4351666.1_n \end{array}$$

$B_2 - F = -27{,}24 = -0{,}454$ daher ist $\frac{3}{4}(B_2 - F) = -0{,}34$, womit sich als Zuwachs von $2 \log W_F$ ergiebt

$2 \times 0{,}34 \times 3{,}92.$

$$B_2 - F = -27{,}23746''$$
$$B_2 = 56^0\ 13'\ 49{,}02186''$$

Resultate:		nach S. 304	nach *Schreiber*, a. a. O. S. 12.
$B_2 =$	$56^0\ 13'\ 49{,}02186''$	$49{,}02182''$	$49{,}0218''$
$L_{1.2} =$	$1\ \ 22\ \ 6{,}03270$ östlich	$6{,}03263$	$6{,}0327$
$\alpha_{2.1} =$	$136\ \ 8\ \ 33{,}3563$	$33{,}3566$	$33{,}355$

Die Resultate von S. 304 sind in der 5. Decimale nicht mehr sicher.

§ 30. Fortsetzung des Zahlenbeispiels II. Umkehrung der vorigen Aufgabe.

Gegeben:

$B_1 = 57^0 \qquad B_2 = 56^0\ 13'\ 49{,}02186'' \qquad L_{1.2} = 1^0\ 22'\ 6{,}03270''$ östlich.

Die *Formeln* (1) und (3) S. 463 geben, indem $L_{1.2} = -4926{,}03270''$ ist:

$$\begin{array}{rl} \log L_{1.2} = & 3{,}6924972.91_n \\ \log \cos B_2 = & 9{,}7449625.47 - 10 \\ \hline \log \eta'_0 = & 3{,}4374598.38_n \\ - [5{,}230783 - 10]\, t_0^2 = & -\ 285.28 \\ \hline \log \eta'_{\text{in Sek.}} = & 3{,}4374313.10_n \\ - \log W_2 = & 0{,}0010038.30 \\ & 1{,}4902183.30 \\ \hline \log y = & 4{,}9286534.70_n \end{array}$$

Argument für W_2 $= 56^0\ 13{,}8170'$

$$\begin{cases} \log L_{1.2} = 3{,}6924972.91_n \\ \log \sin B_2 = 9{,}9197464.88 - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log t_0 = 3{,}6122437.79 \\ +[5{,}531813 - 10]\,\eta_0'^2 = + \quad 255.51 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log t} = 3{,}6122693.30$$

$$t = 1^0\, 8'\, 15{,}1454''$$

$$\begin{cases} \log \eta_0' = 3{,}4374598.4_n \\ \log t_0 = 3{,}6122437.8 \\ 2 \log W_2 = 9{,}9979923.4 - 10 \\ \qquad 4{,}3874532.3_n - 10 \\ -\frac{1}{2} \times 285.28 = - \quad 142.6 \\ +\frac{5}{4} \times 255.51 = + \quad 319.4 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log (F - B_2)} = 1{,}4351668.7$$

$$F - B_2 = + \quad 27{,}23748''$$

$$F = 56^0\, 14'\, 16{,}25934''$$

$$B_1 - F = + \; 45'\, 43{,}74066''$$

$$= + \quad 2743{,}74066''.$$

Die *Formel* (2) S. 463 giebt ferner:

$$\begin{cases} \qquad 1{,}4873099.71 \\ \log (B_1 - F) = 3{,}4383430.59 \\ -3 \log W_m = 0{,}0030388.00 \\ +[2{,}930 - 10](B_1 - F)^2 \cos(B_1 + F) = - \quad 0.25 \end{cases}$$

$$\log x = 4{,}9286918.05$$

Argument $\frac{1}{2}(B_1 + F)$ für $\log W_m = 56^0\, 37{,}1355'$.

$B_1 + F = 113^0\, 14'$.

Die *Formeln* (4) und (5) S. 463 u. 464 geben endlich mit

$$\log W_0 = 9{,}998990 - 10,$$

dieses entsprechend dem Argument $B_0 = 56^0\, 29{,}5'$:

$$\begin{cases} \log x = 4{,}9286918.05 \\ -[2{,}25325 - 10]\, y^2 W_0^4 = - \quad 127.80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log \left\{ s \cos \left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3} \varDelta \mathfrak{a} \right) \right\} = 4{,}9286790.25 \\ \log \left\{ s \sin \left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3} \varDelta \mathfrak{a} \right) \right\} = 4{,}9286534.70_n \end{cases}$$

$$\alpha_{1.2} + \frac{1}{3} \varDelta \mathfrak{a} = 315^0\, 0'\, 6{,}0686''$$

$$\log s = 5{,}0791812.46$$

$$\begin{cases} \qquad 1{,}407017_n - 10 \\ \log (xy) = 9{,}857345_n \\ 4 \log W_0 = 9{,}995960 - 10 \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log \varDelta \mathfrak{a}} = 1{,}260322$$

$$\begin{cases} \varDelta \mathfrak{a} = \qquad 18{,}2105'' \\ t = \quad 1^0\;\; 8'\;\; 15{,}1454'' \\ \alpha_{1.2} = 314\;\; 59\;\; 59{,}9984 \end{cases}$$

$$\alpha_{2.1} = 136^0\;\; 8'\;\; 33{,}3543''$$

		nach vorigem Paragraphen:
Resultate:	$\log x = 4{,}9286918.05$	.09
	$\log y = 4{,}9286534.70_n$	$.68_n$
	$\log s = 5{,}0791812.46$	.46
	$\alpha_{1.2} = 314^0\,59'\,59{,}9984''$	60,0000''
	$\alpha_{2.1} = 136\quad 8\;33{,}3543\,.$	33,3563.

---

10. Kapitel.

Berechnung kleiner Figuren auf dem Rotationsellipsoid mittelst Projektion auf eine Ebene.

§ 1. Verschiedene Umformungen der Formeln für rechtwinklige sphärische Koordinaten. Schon S. 420 ist angedeutet worden, dafs man bei der Vermessung eines ausgedehnten Landes, wie z. B. Preufsens, genötigt ist, auf eine gröfsere Anzahl besonderer Abscissenaxen überzugehen, um mit bequemen Formeln rechnen zu können. Insoweit es sich um die Berechnung von Koordinaten aus Entfernungen und Richtungswinkeln handelt, ist das Formelsystem

$$\left.\begin{array}{l|l} v = s \sin \alpha_{1.2} & y_2 - y_1 = v - \left(y_1 + \frac{v}{3}\right)\frac{u^2}{2\varrho^2} + \varrho\, Gl_5 \\ u = s \cos \alpha_{1.2} & x_2 - x_1 = u\left(1 + \frac{y_1^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{6\varrho^2} + Gl_4\right) \\ \multicolumn{2}{c}{\varrho^2 = \frac{a_1^2}{K_0} = \frac{b_0^2}{W_0^4}} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

völlig zureichend, so lange die Entfernungen und Ordinaten kleiner als 100^{km} bleiben und derjenige Punkt der Abscissenaxe, für welchen ϱ genommen wird, innerhalb 10 Minuten in geographischer Breite oder 20^{km} dem Argument $x_1 + \frac{1}{2}u$ entspricht. Denn alsdann ist der Einflufs der vernachlässigten Glieder noch nicht 1^{mm}.

In der 2. Formel (1) ist u als Faktor gezogen, um die nachfolgende Verwendung zu erleichtern. Da $x_2 - x_1$ mit u verschwindet, ist dieses Verfahren zulässig. (Dasselbe zeigt sich S. 414 u. ff. bei der Entwicklung der allgemeinen Formeln.)

Eine Modifikation der Formeln (1), welche *Zachariae* und andere benutzen, ist S. 121 bereits erwähnt. Sie berücksichtigt die Glieder

3. Ordnung zum Teil durch kleine Reduktionen an $\mathfrak{a}_{1.2}$ und s, die aber in beiden Formeln *verschieden* sind:

$$\left.\begin{aligned} y_2 - y_1 &= s \sin\left(\mathfrak{a}_{1.2} - (E+\varepsilon)\right) + \varrho\, Gl_5 \\ x_2 - x_1 &= s \cos\left(\mathfrak{a}_{1.2} - 2\,(E+\varepsilon)\right).\left(1 + \frac{y_1^2}{2\varrho^2}\right) + \varrho\, Gl_5 \\ E &= \frac{1}{2}\,\varrho''\,\frac{u y_1}{\varrho^2} \qquad \varepsilon = \frac{1}{6}\,\varrho''\,\frac{uv}{\varrho^2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Diese Modifikation verdankt ihren Ursprung wohl mehr der Art der Herleitung als der Absicht, die Unbequemlichkeiten der Formeln (1) zu vermindern.

Diese Absicht kann einer ersten Idee nach vielleicht eher erreicht werden, indem man setzt:

$$\left.\begin{aligned} y_2 - y_1 &= (s + \delta_s) \sin\,(\mathfrak{a}_{1.2} + \delta_a) + \cdots \\ x_2 - x_1 &= (s + \delta_s) \cos\,(\mathfrak{a}_{1.2} + \delta_a) + \cdots, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

mithin s und $\mathfrak{a}_{1.2}$ um gleiche Beträge in beiden Formeln ändert. $s + \delta_s$ ist nichts anderes, als die Entfernung zweier Punkte in einer Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2; $\mathfrak{a}_{1.2} + \delta_a$ ist der zugehörige Richtungswinkel. Ohne Zweifel sind δ_s und δ_a Funktionen der Koordinaten der Punkte.

Wenn diese Funktionen einfach genug sind, würde sich nun nicht blofs der Vorteil ergeben, nach den Formeln (3), also mittelst ebener Polygonometrie die genauen Werte der Koordinatendifferenzen rechnen zu können, sondern überhaupt auch alle Figuren zwischen den Netzpunkten, insbesondere bei der Einschaltung von Netzpunkten in das Hauptnetz, einfach nach den Formeln der ebenen Geometrie behandeln zu können, nachdem die Horizontalwinkel angemessen korrigiert sind. Da jeder Richtungswinkel $\mathfrak{a}$ die Verbesserung δ_a erhalten mufs, so ist diejenige eines Horizontalwinkels die Differenz der δ_a für beide Richtungen seiner Schenkel: δ_a rechts — δ_a links. δ_s kommt nur insoweit in frage, als eine *ebene* Entfernung $s + \delta_s$ mit der wahren zu vergleichen ist — nicht aber bei der Koordinatenberechnung, da diese sich auf die *ebene* Dreiecksberechnung, welche mittelst der reduzierten Winkel die $s + \delta_s$ unmittelbar giebt, stützen wird.

Die Anwendung der Formeln (3) selbst ist jedoch nicht zweckmäfsig, weil δ_s und δ_a unbequeme Ausdrücke erhalten. Man kann aber alle geschilderten Vorteile erreichen und diese Ausdrücke vereinfachen, wenn man eine der Koordinaten x oder y mit einem passenden Faktor multipliziert, ehe man sie als ebene Koordinaten betrachtet. Es ist leicht zu sehen, dafs es gut ist, x als im Meridian liegend, un-

geändert zu lassen. Der schickliche Faktor von y wird nun voraussichtlich von 1 nur um eine Gröfse 2. Ordnung abweichen. Wir setzen ihn versuchsweise gleich

$$1 + \frac{cy^2}{\varrho^2}, \tag{4}$$

wo c eine vorläufig unbekannte Konstante bedeutet. Bezeichnen wir ferner mit s' die ebene Entfernung $s + \delta$,

„ $\mathfrak{a}'_{1.2}$ den ebenen Richtungswinkel $\mathfrak{a}_{1.2} + \delta_a$

„ x' und y' die ebenen Koordinaten, (5)

so ist

$$\left.\begin{aligned} y'_2 - y'_1 &= y_2\left(1 + \frac{cy_2^2}{\varrho^2}\right) - y_1\left(1 + \frac{cy_1^2}{\varrho^2}\right) = s' \sin \mathfrak{a}'_{1.2} \\ x'_2 - x'_1 &= x_2 - x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = s' \cos \mathfrak{a}'_{1.2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Mit Rücksicht auf die Formeln (1) folgt hieraus ohne Schwierigkeit:

$$s' \sin \mathfrak{a}'_{1.2} = v\left(1 + c\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{\varrho^2}\right) - \left(y_1 + \frac{v}{3}\right)\frac{u^2}{2\varrho^2} + \varrho\, Gl_5$$

$$s' \cos \mathfrak{a}'_{1.2} = u\left(1 + \frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{6\varrho^2} + Gl_4\right).$$

Die Division der linken und rechten Seiten giebt, wenn man rechts für den in den Nenner tretenden Faktor von u im Zähler den Faktor

$$1 - \frac{y_2^2}{2\varrho^2} + \frac{v^2}{6\varrho^2} + Gl_4$$

einführt und zugleich auch $u^2 = s^2 - v^2 + Gl_4$ und $v^2 = (y_2 - y_1)^2 + Gl_4$ setzt:

$$\tan \mathfrak{a}'_{1.2} = \frac{1}{u}\left\{v\left[1 + \left(c - \frac{1}{6}\right)\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{\varrho^2}\right] - \frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{1}{3}v\right)\frac{s^2}{\varrho^2} + \varrho\, Gl_5\right\}.$$

Dies wird besonders einfach für die Annahme

$$c = \frac{1}{6}. \tag{7}$$

Unter dieser Voraussetzung ist mit Rücksicht auf die Relation

$$v : u = \tan \mathfrak{a}_{1.2}$$

sofort:

$$\tan \mathfrak{a}'_{1.2} = \tan \mathfrak{a}_{1.2} - \frac{1}{u}\left\{\frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{1}{3}v\right)\frac{s^2}{\varrho^2} + \varrho\, Gl_5\right\}.$$

Denkt man sich für die Tangenten die Cotangenten der Komplementwinkel geschrieben, so läfst sich unmittelbar die Entwicklung nach *Taylors* Satz S. 30 u. 31 anwenden. Sie giebt:

$$\mathfrak{a}'_{1.2} = \mathfrak{a}_{1.2} - \left\{\frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{1}{3}v\right)\frac{s^2}{\varrho^2} + \varrho\, Gl_5\right\}\frac{\cos^2 \mathfrak{a}_{1.2}}{u} \tag{8}$$

und zwar ist diese Entwicklung brauchbar, so lange die 2. Potenz von $\{\ \}\cos \mathfrak{a}_{1.2} : u$ vernachlässigt werden kann. Da $u = s \cos \mathfrak{a}_{1.2}$, so ist dieser Ausdruck eine *kleine* Gröfse 2. Ordnung, deren Quadrat gerade dieselbe Ordnung hat wie die anderen Vernachlässigungen in (8).

Die Formel (8) giebt nach einiger Reduktion, insbesondere Substitution von $u = s \cos \mathfrak{a}_{1.2}$, allgemein gültig innerhalb der eingangs gezogenen Grenzen:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\mathfrak{a}'_{1.2} - \mathfrak{a}_{1.2}} = -\frac{1}{2}\varrho''\frac{(x_2 - x_1)\left(y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1)\right)}{\varrho^2} + Gl_4, \tag{9}$$

wobei rechter Hand auch die ebenen Koordinaten substituiert werden dürfen. Beachten wir ferner (4), (7) und (6), so findet sich:

$$x' = x \qquad y' = y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho^2}\right) \tag{10}$$

und

$$s'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\left(1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3\varrho^2} + Gl_4\right). \tag{11}$$

Dagegen ist entsprechend den Formeln (1) nach (1) S. 416:

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2\left(1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3\varrho^2} + Gl_4\right) + (y_2 - y_1)^2. \tag{12}$$

Hieraus folgt durch Subtraktion und in naheliegender Zusammenfassung:

$$s'^2 = s^2\left(1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3\varrho^2} + Gl_4\right),$$

wobei die vernachlässigten Glieder in die Parenthese genommen werden durften, weil ihre Faktoren $(y_2 - y_1)^2$ und $(x_2 - x_1)^2$ in (8) und (11) echte Bruchteile von s^2 sind. Man kann nun sofort setzen:

$$s' = s\left(1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6\varrho^2} + Gl_4\right). \tag{13}$$

Hiermit sind die Relationen entwickelt, welche zwischen den Stücken eines von einer kürzesten Linie, den Ordinaten ihrer Endpunkte und der Abscissenaxe begrenzten Trapezes auf dem Ellipsoid und denjenigen seiner ebenen Übertragung stattfinden.

§ 2. **Ebene Projektionen.** Denkt man sich einen Punkt als Endpunkt verschiedener Linien, so würde nach (10) die ebene Ordinate y' streng genommen je nach der ins Auge gefafsten Linie einen anderen Wert erhalten, weil ϱ^2 sich stets annäherungsweise auf einen inmitten

der Endordinatenfufspunkte gelegenen Punkt der Abscissenaxe beziehen soll. Indessen wird der Fehler nicht erheblich, wenn man y' nach der Formel

$$y' = y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho_F^2}\right) \tag{1}$$

aus y ermittelt, wobei sich ϱ_F auf den Fufspunkt der Ordinate y selbst bezieht. Der Fehler ist gleich

$$\frac{1}{6}\,y^3\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho_F^2}\right) \tag{2}$$

und da $\varrho^2 = b_0^2 : W^4$ ist, hat man hierin zu substituieren:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho_F^2} = \frac{1}{b_0^2}\left((1 - e^2 \sin^2 B_0)^2 - (1 - e^2 \sin^2 B_F)^2\right),$$

wenn B_F die geographische Breite für den Fufspunkt der Ordinate y ist und B_0 diejenige geographische Breite bezeichnet, welche Formel (10) S. 477 als Argument voraussetzt. Betrachtet man $B_F - B_0$ als ein Differential, so erhält man als einen genügenden Näherungs wert für den letzten Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho_F^2} = \frac{2}{b_0^2}\,e^2 \sin 2B_0\,.\,(B_F - B_0),$$

womit der Fehler (2) der Ordinate y' die nachstehende Form annimmt:

$$\frac{1}{3}\,e^2\,\frac{y^3}{b_0^2} \sin 2B_0\,.\,(B_F - B_0)\,. \tag{3}$$

Setzen wir Seiten und Ordinaten im Maximum gleich 100^{km}, so kann $B_F - B_0$ den Betrag $50 : b_0^{km}$ nicht übersteigen, und es stellt sich als Maximalwert des Ordinatenfehlers nur rund $\frac{1}{2}$ Millimeter heraus.

Dieser unerhebliche lineare Fehler hat auch auf die Azimute einen ganz geringfügigen Einflufs. Zufolge (3) ist nämlich der Fehler in $y'_2 - y'_1$ gleich

$$\frac{1}{3}\,e^2 \sin 2B_0\left(\frac{y_2^3}{b_0^2}(B_2 - B_0) - \frac{y_1^3}{b_0^2}(B_1 - B_0)\right),$$

worin B_2 und B_1 die geographischen Breiten der Fufspunkte der Ordinaten y_2 und y_1 bezeichnen. Da man aber $B_0 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ zu setzen hat, so reduziert sich vorstehender Ausdruck auf

$$\frac{1}{3}\,e^2 \sin 2B_0\,\frac{y_1^3 + y_2^3}{2b_0^2}\,(B_2 - B_1)\,.$$

Der Fehler in $\tan \mathfrak{a}'_{1.2}$ ergiebt sich hieraus, indem man für $B_2 - B_1$ den nahezu gleichen Ausdruck $(x_2 - x_1) : b_0$ einführt, gleich

$$\frac{1}{3} e^2 \sin 2 B_0 \frac{y_1^3 + y_2^3}{2 b_0^3} \tag{4}$$

und dies ist zugleich das Maximum des Fehlers in $\mathfrak{a}_{1.2}$ selbst, als Arcus. Multipliziert mit ϱ'' und $B_0 = 45^0$, $y_1 = y_2 = 100^{km}$ genommen, ergiebt sich als äufserster Fehlerbetrag in Sekunden ausgedrückt noch nicht 0,002″.

Indem wir nun die ebenen Koordinaten zu den geodätischen mittelst der Relationen

$$x' = x \qquad y' = y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho_F^2}\right) \tag{5}$$

in Bezug bringen, erlangen wir eine *ebene Abbildung* (oder Projektion) eines Teiles des Rotationsellipsoids.

Denn man kann sich denken, dafs zu beiden Seiten eines Meridianes alle Punkte bis zu 100^{km} Abstand übertragen werden, ohne Rücksicht auf die besonderen Figuren, zu denen sie vereinigt sind.

Diese ebene Projektion ist innerhalb der angesetzten und zur Anwendung gelangenden Glieder identisch mit der von *Gaufs* zur Berechnung der hannoverischen Landesvermessung (richtiger: Gradmessung, vergl. *O. Schreiber, Theorie der Projektionsmethode der hannoverischen Landesvermessung.* 1866, S. 91) angewandten *conformen* Projektionsmethode. Ebenso wie diese Methode bietet sie nur dann Vorteile, wenn die zu behandelnde Messung sich blofs bis zu geringen Abständen von einem mittleren Meridian (der Abscissenaxe) entfernt, während sie entlang desselben ganz beliebig ausgedehnt sein darf.

Eine Abbildung aber heifst conform, wenn sie dem Original in dem kleinsten Teilen ähnlich ist. Unendlich kleine Rechtecke des Originals müssen daher in der Abbildung nicht nur wieder Rechtecke, sondern auch zum Original ähnliche Rechtecke sein. Wenn wir wie im vorigen Paragraphen uns zuerst die Ordinaten y einfach rechtwinklig zur Abscissenaxe in der Ebene aufgetragen denken, so giebt diese Abbildung unendlich kleine, mit einer Seite an y angrenzende Rechtecke wieder als Rechtecke, aber nicht als ähnliche Rechtecke. Nach S. 407 überstreicht nämlich die unendlich kleine Strecke dy, wenn sich der Fufspunkt der Ordinate y um dx verschiebt, ein Rechteck mit den Seiten $\mathfrak{n}dx$ und dy. In derjenigen ebenen Darstellung jedoch, welche die y einfach überträgt, ist das Bild des Rechtecks ein Rechteck mit den Seiten dx und dy.

Dagegen hat in der oben ausführlich behandelten ebenen Darstellung, welche als Ordinate $y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho_F^2}\right)$ annimmt, das Bild sehr nahe die Form eines Rechteckes mit den Seiten dx und $dy\left(1 + \frac{y^2}{2\varrho_F^2}\right)$, also dem Seitenverhältnis $\mathfrak{n}dx : dy$.

Die Abweichung von der rechteckigen Gestalt erkennt man daraus, dafs einem konstanten y bei veränderlichem x ein schwachveränderliches y' entspricht, weil ϱ^2 Funktion von x ist. Sie beträgt in Sekunden

$$\frac{1}{3}\varrho'' e^2 \sin 2B \frac{y^3}{b_0^3}, \tag{6}$$

wie eine, mit der auf S. 478 geführten Rechnung ziemlich identische Rechnung zeigt [vergl. insbesondere Formel (4)]. B bezieht sich hierbei auf den Ordinatenfufspunkt. Das Maximum des Ausdrucks (6) beträgt noch nicht 0,002″, die Abweichung ist daher unerheblich.

Ebenso unerheblich ist die Abweichung des Seitenverhältnisses in der Ebene von demjenigen auf dem Ellipsoid. Man hat als Seitenverhältnis

$$\left.\begin{array}{ll} \text{in der Ebene:} & dx : dy\left(1 + \dfrac{y^2}{2\varrho_F^2}\right) \\ \text{auf dem Ellipsoid:} & \mathfrak{n}dx : dy \text{ oder } dx : \dfrac{1}{\mathfrak{n}}dy \end{array}\right\} \tag{7}$$

Nach S. 411 (4) ist aber $\mathfrak{n} = \cos\frac{y}{\varrho_F} + Gl_6$ und daher

$$\frac{1}{\mathfrak{n}} = 1 + \frac{y^2}{2\varrho_F^2} + \frac{5y^4}{24\varrho_F^4} + \cdots. \tag{8}$$

Die Seitenverhältnisse (7) sind also bis auf den Bruchteil $5y^4 : 24\varrho_F^4$ identisch. Die Differenz erscheint noch geringer in ihrer Wirkung auf y'. Integriert man nämlich die Differentiale $\frac{1}{\mathfrak{n}}dy$ von null bis y, so erhält man diejenige Länge der Ordinate, welche dem ellipsoidischen Seitenverhältnis entspricht. Sie ist um $y^5 : 24\varrho_F^4$ gröfser, als Formel (5) sie giebt. Das macht im Maximum $\frac{1}{4}$ Millimeter.

Wir erwähnen noch, dafs *Gaufs* für Formel (9) S. 477 als Argument zu ϱ^2 nicht $x_1 + \frac{1}{2}u$ sondern $x_1 + \frac{1}{3}u$ vorschreibt. Allein die Differenz beider Argumente fällt für Seiten $< 100^{km}$ stets innerhalb der zulässigen Variation des Arguments.

§ 3. **Zusammenstellung der Formeln für die ebene Projektion.** Voraussetzungen: Seiten und Ordinaten nicht über 100^{km} lang; Abscissen beliebig lang.

Zur Reduktion vom Rotationsellipsoid auf die Ebene ist nach (5) des vorigen Paregraphen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \quad y' = y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho^2}\right) \\ \log y' &= \log y + \frac{M}{6}\frac{y^2}{\varrho^2} + Gl_4 \\ \varrho^2 &= \frac{a_0^2}{K} = \frac{b_0^2}{W^4}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Argument für K u. W: Die geographische Breite des Ordinatenfufspunktes.

Die logarithmische Formel führt kleine Vernachlässigungen ein, die linear noch nicht 0,1^{mm} und im Logarithmus erst höchstens 4 Einheiten der 10. Decimalstelle betragen.

Zur Reduktion der linearen Längen auf die Ebene ist nach (13) S. 477:

$$\left.\begin{aligned} s' &= s\left(1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6\varrho^2} + Gl_4\right) \\ \log s' &= \log s + \frac{M}{2}\left(\frac{y_2 + y_1}{2\varrho}\right)^2 + \frac{M}{24}\left(\frac{y_2 - y_1}{\varrho}\right)^2 + Gl_4, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei in der 2. Formel für $y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2$ zu gröfserer Bequemlichkeit der Rechnung $\frac{3}{4}(y_2 + y_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)^2$ gesetzt wurde. Die durch Einführung der logarithmischen Form entstehenden Fehler erreichen noch nicht 1^{mm}.

Für ϱ ist in (2) ein Argument anzuwenden, das mit dem arithmetischen Mittel der geographischen Breiten der Ordinatenfufspunkte etwa bis auf 10′ übereinstimmt.

Zur Reduktion der Richtungswinkel auf die Ebene ist nach (9) S. 477, wenn ϱ wie vorher gebildet wird:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\mathfrak{a}'_{1.2} - \mathfrak{a}_{1.2}} = -\frac{1}{2}\varrho'' \frac{(x_2 - x_1)\left(\frac{y_2 + y_1}{2} - \frac{y_2 - y_1}{6}\right)}{\varrho^2} + Gl_4. \quad (3)$$

Für einzelne Horizontalwinkel tritt als Reduktion die Differenz der Reduktionen für beide Schenkel auf. Insoweit es sich hierbei um Objekte handelt, deren Koordinaten noch unbekannt sind, müssen zuerst genäherte Werte derselben ermittelt werden. Alsdann ist es überhaupt zweckmäfsig in die Formel (3) rechter Hand die ebenen Ordinaten einzuführen, was keinen nennenswerten Fehler giebt.

Zur Reduktion von der Ebene aufs Ellipsoid findet sich, wie aus den vorigen Formeln leicht abzuleiten ist:

$$\left.\begin{aligned} \log y &= \log y' - \frac{M}{6}\frac{y'^2}{\varrho^2} + Gl_4 \\ \log s &= \log s' - \frac{M}{2}\left(\frac{y'_2 + y'_1}{2\varrho}\right)^2 - \frac{M}{24}\left(\frac{y'_2 - y'_1}{\varrho}\right)^2 + Gl_4 \\ \mathfrak{a}_{1.2} - \mathfrak{a}'_{1.2} &= +\frac{1}{2}\varrho'' \frac{(x_2 - x_1)\left(\frac{y'_2 + y'_1}{2} - \frac{y'_2 - y'_1}{6}\right)}{\varrho^2} + Gl_4, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wobei in der ersten dieser Formeln ϱ dem Ordinatenfuſspunkt, in den beiden anderen aber der Mitte zwischen beiden Fuſspunkten bis auf 10′ in geographischer Breite zu entsprechen hat.

Genauigkeit. Die Genauigkeit der obigen Formeln entspricht vollkommen derjenigen des Formelsystems (1) S. 474. Zum Teil ist dies schon nachgewiesen, noch nicht aber bezüglich der Formeln (9) und (13) S. 477. Man kann aber einen summarischen Nachweis dadurch führen, daſs man zeigt, daſs bei gegebenem y_1, s und $\mathfrak{a}_{1.2}$ die ersteren sowie die letzteren Formeln bis auf nicht in betracht kommende Gröſsen für $y_2 - y_1$ und $x_2 - x_1$ dasselbe geben. Setzt man abkürzungsweise

$$\log s' = \log s + M\delta_1 ,$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\mathfrak{a}'_{1.2} - \mathfrak{a}_{1.2}} = \varrho''\delta_2 ,$$

so ist zunächst $s' = s\left(1 + \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1^2 + \cdot\cdot\right)$ und weiter mittelst Bildung der Ausdrücke für $s' \cos \mathfrak{a}'_{1.2}$ und $s' \sin \mathfrak{a}'_{1.2}$, wenn $s \cos \mathfrak{a}_{1.2}$ mit u und $s \sin \mathfrak{a}_{1.2}$ mit v bezeichnet wird:

$$x_2 - x_1 = u + u\delta_1 - v\delta_2 + \frac{1}{2}u(\delta_1^2 - \delta_2^2) - v\delta_1\delta_2 + \cdot\cdot$$

$$y'_2 - y'_1 = v + v\delta_1 + u\delta_2 + \frac{1}{2}v(\delta_1^2 - \delta_2^2) + u\delta_1\delta_2 + \cdots. \quad (5)$$

Beachtet man noch, daſs nach S. 476 und 477 gesetzt werden kann:

$$y'_2 - y'_1 = (y_2 - y_1)\left(1 + \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1^2 + \cdot\cdot\right)$$

oder

$$y_2 - y_1 = (y'_2 - y'_1)\left(1 - \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1^2 + \cdot\cdot\right),$$

so folgt mittelst des obigen Ausdrucks für $y'_2 - y'_1$:

$$y_2 - y_1 = v + u\delta_2 - \frac{1}{2}v\,\delta_2^2 + \cdots. \quad (6)$$

Vernachlässigt man in den Formeln (5) und (6) die höchsten Glieder und setzt einfach

$$x_2 - x_1 = u + u\delta_1 - v\delta_2 + \cdot\cdot \quad (5^*)$$

$$y_2 - y_1 = v + u\delta_2 , \quad (6^*)$$

so begeht man im Maximum nur Fehler von noch nicht 1^{mm}, wie die Untersuchung der Maxima der vernachlässigten Glieder ergiebt, in welchen man

$$\delta_1 = \frac{y_2(y_2 - v) + \frac{1}{3}v^2}{2\varrho^2}$$

und

$$\delta_2 = -\frac{u\left(y_2 - \frac{2}{3}v\right)}{2\varrho^2}$$

nehmen darf. Um nun (5*) und (6*) mit den Formeln (1) S. 474 zu vergleichen, hat man für (5*) und (6*) die genauen Werte

$$\delta_1 = \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6\varrho^2}$$

$$\delta_2 = -\frac{(x_2 - x_1)\left(\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right)}{2\varrho^2}$$

anzuwenden und rechter Hand anstatt y_2, y_1 und $x_2 - x_1$ die Gröfsen y_2, y_1, v und u nach Mafsgabe jener Formeln (1) einzuführen, was durch Anwendung der (5*) und (6*) selbst leicht geschehen kann. Als Unterschiede mit den (1) S. 474 stellen sich dann abermals kleine Glieder heraus, deren Maximalbetrag 1^{mm} nicht erheblich überschreitet. Da nun diese Formeln (1) selbst nur auf 1^{mm} genau sind, so kann man in der That die Formeln (1) bis (3) der ebenen Übertragung als gleich genau mit jenen bezeichnen.

Was endlich die Formeln (4) anlangt, so zeigt der Umstand, dafs y und y' nur um höchstens $\frac{1}{60000}$ ihres Betrags von einander abweichen, mit Rücksicht auf die Maximalwerte der Glieder 2. Ordnung jener Formeln sofort, dafs sie mit den Formeln (1) bis (3) bezw. nur um ganz geringfügige Beträge differieren.

§ 4. Berechnung der ebenen Koordinaten aus geographischen Positionen und umgekehrt.

Wenn aufser der geographischen Lage des Koordinatenanfanges P_1 noch diejenige eines Punktes P_2 gegeben ist, dessen ebene Koordinaten x und y' zu ermitteln sind — eine Aufgabe, die bei dem Übergang zu den Detailkoordinatensystemen auftritt —, so kann man ohne weiteres die Formeln (1) bis (3) des § 25 S. 463 anwenden, mit der Änderung, dafs zu Formel (3) noch die Formel

$$\log y' = \log y + \frac{M}{6 b_0^2} y^3 W_F^4 \qquad (1)$$

beigefügt wird, um die ebene Ordinate y' zu erhalten. Der numerische Betrag des Koefficienten $M : 6b_0^2$ ist S. 463 angegeben; für W_F aber wird man einfach W_2, welches bereits anderweit erforderlich ist, einführen dürfen. Es entspricht dieses den anderen Vernachlässigungen

des Formelsystems auf S. 463 und giebt in y' nur Bruchteile Millimeter.

Auch für die umgekehrte Aufgabe (welche auftritt, wenn ein Dreiecksnetz in der ebenen Projektion berechnet ist), bleiben wir bei den früheren Formeln für geodätische Koordinaten, nämlich den Formeln des § 22 S. 456 stehen und denken uns nur zuerst die ebene Ordinate auf das Ellipsoid reduziert mittelst der Formel

$$\log y = \log y' - \frac{M}{6 b_0^2} y'^2 W_F^4 + \cdots. \tag{2}$$

Als gegebener Punkt P_1 wird der Koordinatenanfang vorausgesetzt und die weitere Rechnung knüpft an die Formeln (2), (3) und (4*) a. a. O. an. Die Berechnung von t unterbleibt ebenso wie überhaupt die Berechnung von s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$, welche Gröſsen zunächst nicht in frage kommen. Wünscht man aber die Richtung des Meridians in P_2 kennen zu lernen, so ist auch t zu ermitteln. Da nun nach S. 479 u. 480 die Parallelen zur Abscissenaxe auf dem Ellipsoid sich sehr nahe als solche in der Ebene abbilden und die Abbildung im wesentlichen conform ist, so schlieſst auch in dieser der Meridian mit der Parallelen zur Abscissenaxe den Winkel t ein (Fig. 39 S. 421).

§ 5. **Allgemeine Bemerkungen zur Methode der ebenen Projektion.** Eine ausführliche Theorie der *Gauſs*ischen Projektionsmethode gab *O. Schreiber* a. a. O.

Für die von uns allein für vorteilhaft gehaltene Anwendung der Methode auf schmale meridionale Bezirke behufs der Detailvermessung dürfte die oben gegebene Modifikation ausreichen, welche in weniger strenger Darstellung Verfasser bereits in der *Zeitschr. f. Verm.-Wesen* 1876 S. 238 entwickelt hat, woselbst auch ein leicht zu erstellendes logarithmisches Diagramm zur näherungsweisen (oft ausreichenden) Reduktion der Richtungswinkel auf die Ebene angegeben ist und praktische Vorzüge der Anwendung der Koordinaten in der ebenen Projektion vor der Benutzung der Koordinaten auf dem Ellipsoid namhaft gemacht sind. (In dieser Beziehung vergleiche auch bei *Jordan, Handbuch* Bd. 2, S. 293 u. ff. eine gegenteilige Ansicht.)

Der Hauptvorzug der ebenen Projektion scheint uns darin zu liegen, daſs nach erfolgter Reduktion der Richtungen auf die Ebene alle weiteren Rechnungen nur nach den Regeln der ebenen Geometrie erfolgen, also die Berücksichtigung der ellipsoidischen Gestalt der Erde in eine sehr bequeme und *anschauliche* Form gebracht ist. Die Berücksichtigung der kleinen Glieder bei den Berechnungen der Detailtriangulierungen auf dem Ellipsoid selbst ist sehr störend, so klein wie diese Glieder auch sind.

Da bei Beschränkung auf absolute Werte der Ordinaten $y \leqq 0{,}01\,a_0$, d. i. 64^{km}, das Vergröfserungsverhältnis der Dimensionen:

$$1 + \frac{y^2}{2\varrho^2} \tag{1}$$

am Rande des Vermessungsgebietes nur bis zu $\frac{1}{20000}$ die Einheit überschreitet, so können in diesem Falle für die Zwecke der Detailvermessung die ebenen Dimensionen sogar ohne weiteres als wahre Dimensionen angesehen und mit direkt gemessenen Längen bei Aufnahme von Polygonzügen verbunden werden.

Gaufs selbst hat über die conforme ebene Projektion der hannoverischen Landesvermessung nichts publiziert; was man kennt, ist aus dem Briefwechsel mit *Schumacher* entlehnt. Er hat aber in seinen *Geodätischen Untersuchungen* eine andere vorzügliche conforme Projektionsmethode entwickelt, nämlich diejenige auf die Kugel. Dieselbe ist für sehr weit ausgedehnte Vermessungen brauchbar und erfordert nur ganz kleine Reduktionen der gemessenen Richtungen. Wir verweisen bezüglich dieser Methode auf die Originalarbeit, sowie auf die von *Jordan* in seinem *Handbuch der Vermessungskunde* gegebene Bearbeitung und bemerken hier nur so viel, dafs bei dieser Methode gegenüber der direkten Rechnung auf dem Ellipsoid der Vorteil einfach sphärischer Berechnung der geographischen Positionen besteht, mit nachfolgender bequemer Übertragung der geographischen Breiten mittelst einer Hilfstafel und der geographischen Längenunterschiede mittelst Multiplikation durch eine Konstante, aufs Ellipsoid. Die direkte Rechnung auf dem Ellipsoid hat andrerseits den Vorteil, dafs es leichter ist, mit verschiedenen Elementen desselben die Rechnung zu führen — auch ist, wenigstens für kurze Distanzen, der Zusammenhang zwischen den geodätischen Ergebnissen und geographischen Koordinaten ein durchsichtigerer.

Endlich kann man vielleicht als Nachteil jener Methode erwähnen, dafs bei der Übertragung der gemessenen Winkel auf die Kugel leicht geringfügig erscheinende Korrektionen wegbleiben, welche dennoch für weit ausgedehnte Gebiete sich zu merklichen Beträgen *anhäufen*.

---

11. Kapitel.

Die Berechnungsarbeiten für eine Landesvermessung.*)

§ 1. Die Bedeutung geographischer Koordinaten. Für eine Landesvermessung wird es selbst bei bedeutender Ausdehnung immer ausreichen, die Annahme zu machen, als erfolge sie auf einem Rotationsellipsoid mit geradlinigen Lotlinien, S. 134. Zwar ist dieses

*) Von der Additamenten- und der Sehnenmethode sehen wir hier ab; für diese ist das Erforderliche schon früher an den betreffenden Stellen bemerkt.

nicht streng, aber der Einflufs auf die gegenseitige Lage der Punkte ist, wie spätere Untersuchungen zeigen werden, unerheblich. Die Elemente dieses Ellipsoids kommen dabei auch nur in geringem Mafse in betracht, insoweit es sich eben um die Entfernungen (und Flächen) handelt; vergl. S. 405. Sie haben allerdings einen wesentlichen Einflufs auf die geographischen Positionen. Die berechneten Werte derselben können aufserdem wegen der Lotabweichungen mit den wirklichen Werten recht erhebliche Differenzen zeigen, allein in erster Linie sind die geographischen Koordinaten bei grofsen Landesvermessungen nur als Mittel zur Bezeichnung der gegenseitigen Lage der Punkte aufzufassen; sie sind in dieser Beziehung viel bequemer als rechtwinklige Koordinaten, die zwar von den Elementen des Ellipsoids weit weniger abhängen, deren Anwendung praktisch aber an kleine Bezirke gebunden ist, S. 474. Der Grund der erwähnten Bequemlichkeit ist der, dafs bei der successiven Übertragung geographischer Koordinaten von Punkt zu Punkt stets nur die einfachen Formeln von § 22 S. 456 in betracht kommen, während bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten bei einiger Ausdehnung des Gebiets infolge der Abhängigkeit der Formeln vom Abstand der Punkte von der Abscissenaxe sofort die keineswegs einfachen Formeln von S. 419 und event. noch kompliziertere erforderlich werden.

Wegen jener Bedeutung der berechneten geographischen Positionen ist es durchaus korrekt, sie auf 1 Einheit der 3., 4. oder selbst 5. Decimale der Sekunden anzugeben, da sie eben der Schärfe geodätischer und nicht astronomischer Messungen zu entsprechen haben und da man die Rechnungsschärfe gern 1 bis 2 Stellen weiter als die Messungsschärfe treibt.*)

§ 2. **Vorläufige Berechnungen.** Um die genaue Berechnung zu ermöglichen, ist von der vorläufig auf das Niveau des Meeres reduzierten Basislänge aus (s. § 3) eine *vorläufige Seitenberechnung* auszuführen. Man bedient sich dabei des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie unter Abgleichung der Winkelsummen auf 180°, wobei zugleich ohne weiteres *Legendres* Satz mit berücksichtigt ist.

---

*) Es ist immerhin wünschenswert, dafs auch die berechneten geographischen Positionen den wahren möglichst entsprechen. Man wird daher thunlichst als astronomischen Ausgangspunkt einen von Störungen des Lotes durch sichtbare Massenunregelmäfsigkeiten freien Punkt wählen. Noch besser wäre es, den designierten Ausgangspunkt vor definitiver Annahme mit benachbarten Dreieckspunkten auf Lotablenkung zu vergleichen, um auch lokale Lotstörungen durch unsichtbare Massenunregelmäfsigkeiten zu erkennen.

Dieses Verfahren ist auch der Messungsfehler wegen für ausgedehnte Vermessungsgebiete zu empfehlen.

Demnächst folgt eine *beiläufige Ermittlung der geographischen Breiten* von dem nach Breite astronomisch genau festgelegten Anfangspunkt aus mit Hilfe des astronomisch bestimmten Azimutes einer von hier ausgehenden Dreiecksseite (des sogenannten ersten Azimutes), falls nicht eine ältere Karte vorliegt.

Diese Ermittlung hat nur den Zweck, für die Berechnung der Dreiecksexcesse die Krümmungsmafse des Ellipsoids genügend scharf finden zu können. Da die in betracht kommenden Excesse meist nur einige Sekunden betragen, würde in der Regel sogar ein Breitenfehler von ½ Grad noch nicht 0,001″ Excefsfehler geben, wie die Differentialformel (3) S. 403 und die daselbst angestellten Rechnungen zeigen. Selbst bei 10″ Excefs genügt stets noch eine Genauigkeit bis auf 10′ in Breite.

Hiernach (und eventuell eingehender nach der eben erwähnten Formel) kann man ermessen, wann eine ältere Karte oder eine flüchtige Berechnung der geographischen Breiten nach den Formeln S. 456 u. 457 mit Vernachlässigung der höheren Glieder und unter Annahme eines konstanten Wertes W zu genanntem Zwecke ausreicht.

§ 3. **Reduktion der Basis auf einen Normalhorizont.** Wenn bei der in § 2 vorausgesetzten Reduktion die geographische Lage der Basis nicht genügend bekannt war, so ist eine erneute *Reduktion auf das Meeresniveau* auszuführen, nachdem durch die vorläufige Berechnung ihre geographische Lage nach Breite und Azimut genügend bekannt worden ist. (Eine näherungsweise direkte Beobachtung beider Elemente reicht auch aus.) Die Reduktion erfolgt bei der Kürze der Strecke ohne Zweifel ganz ausreichend nach der Annahme, dafs die unmittelbar gemessene horizontale Entfernung als *ein* Kreisbogen in der *mittleren* Meereshöhe der Basis aufgefafst wird. Ebenso wird die Projektion als Kreisbogen anzusehen sein. Der Krümmungsradius für letzteren ist der spezielle Krümmungsradius des Ellipsoids in der mittleren geographischen Breite der Basis und in ihrem mittleren Azimut; für ersteren ist er um die mittlere Meereshöhe gröfser.

Der Kalkul kann als im Princip schon auf S. 6 gegeben übergegangen werden, um so mehr als seine Behandlung keinerlei Schwierigkeit bietet.

Die Reduktion der Basis auf einen sogenannten *mittleren Landeshorizont* ist nur für kleine Länder, wo unmittelbar von der Haupttriangulation zu einem System rechtwinkliger Koordinaten übergegangen werden kann, zu empfehlen. Für die Berechnung geographischer Positionen führt aber dieser Vorgang zu Weiterungen (wie einer der folgenden Paragraphen zeigen wird), während es andrerseits für die

Detailarbeiten und wirthschaftlichen Zwecke der Vermessungen ganz gleichgültig ist, wenn die Entfernungen von denen im mittleren Niveau einer Gegend gemessenen um Bruchteile der Ordnung $\frac{h}{\varrho}$ abweichen, da dies meist weniger als $\frac{1}{10000}$ sein wird. Eventuell ist auch eine entsprechende Reduktion leicht auszuführen.

Wir setzen daher im Folgenden zunächst die Reduktion auf einen Meereshorizont voraus.

§ 4. **Reduktion der gemessenen Winkel und Richtungen.** Die auf den Netzpunkten (Stationen) beobachteten Winkel und Richtungen können zuerst stationsweise ausgeglichen werden. Das Resultat der Stationsausgleichung wird eine Reihe Zahlen sein, deren Differenzen die Winkel darstellen, die im einzelnen aber Richtungswerte heifsen und von den Azimuten um eine Konstante verschieden sind. Diese Werte sind vor der Netzausgleichung zu verbessern in folgender Weise:

1. Nach S. 190 (6) beträgt für ein südwestliches astronomisches Azimut, das nach einem Objekt in der Meereshöhe H genommen ist, die Reduktion, um das astronomische Azimut der Projektion dieses Objekts auf das Rotationsellipsoid zu erhalten, in Sekunden:

$$+\frac{1}{2}\varrho'' e^2 \frac{H}{a_0} \cos^2 B \sin 2a + \cdots \tag{1}$$

und also mit *Bessels* Dimensionen des Ellipsoids hiernach:

$$+\,0{,}108'' \cos^2 B \sin 2a \; (H \text{ in Kilometern}) + \cdots. \tag{1*}$$

2. Ferner beträgt die Reduktion vom astronomischen aufs geodätische Azimut nach S. 332 (11) in Sekunden:

$$-\frac{1}{12}\varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \cos^2 B \sin 2a + \cdots, \tag{2}$$

oder

$$-\,0{,}028'' \cos^2 B \sin 2a \left(\frac{s \text{ in Kilometern}}{100}\right)^2 + \cdots \tag{2*}$$

Hierin bezeichnen a das gemessene Azimut, B die Polhöhe des Standpunktes und s die horizontale Entfernung des Objekts.

Nach diesen Formeln ist streng genommen jedes beobachtete Azimut und jede beobachtete bezw. auf der Station ausgeglichene Richtung des Dreiecksnetzes zu korrigieren. Für die Winkel ergiebt sich die Korrektion als Differenz der Korrektionen der Richtungen beider Schenkel von selbst.

Sind die Entfernungen sehr grofs, so können die S. 190 und 332 angegebenen höheren Glieder merklich werden; in der Regel aber reichen vorstehende Ausdrücke aus.

Was die Fehler anbelangt, die durch Unterlassung der Reduktionen (2) begangen werden, so ist darüber schon S. 400 u. ff. gehandelt worden.

Für den thatsächlichen Zustand der Erde sind vorstehende Korrektionen noch nicht genügend; indessen repräsentieren sie das Wichtigste und in erster Linie zu Berücksichtigende. Wir wollen hier die anderen weiterhin zu besprechenden Korrektionen vorläufig namhaft machen. Es sind:

3. Die Korrektion wegen Lotabweichung, welche dadurch entsteht, dafs die Lotrichtungen nicht genau Normalen eines Ellipsoids sind.

4. Die Korrektion wegen des Abstandes der Geoidfläche von der Fläche eines Rotationsellipsoids.

5. Die Korrektion wegen der Lateralrefraktion der Lichtstrahlen, d. h. wegen der Ausweichung des Lichtstrahles aus der Vertikalebene vom Standpunkt nach dem Objekt infolge ellipsoidischer Form der Niveauflächen der Luft.

In *Grunerts Archiv* von 1869, Teil 51, S. 20 u. ff., behandelt *Sonderhof* die sämtlichen Reduktionen der Horizontalwinkel unter Voraussetzung einer rotationsellipsoidischen Gestalt der mathematischen Erdoberfläche. *Villarceau* bespricht die Reduktion wegen Meereshöhe in den *Comptes rendus* von 1866, Bd. 63, S. 850. *Andrae* führt 1867 die Formeln mit teilweiser Entwicklung an in Bd. 1 der *Dänischen Gradmessung*, vergl. das Referat in der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* 1878, Bd. 13, S. 72 u. ff.

Dafs *Gaufs* und *Bessel* diese Reduktionen bereits kannten, ist nicht zu bezweifeln, wenngleich von ersterem eine bezügliche Entwicklung nicht vorliegt und *Bessel* nur die Reduktion vom astronomischen aufs geodätische Azimut entwickelt. In Bezug hierauf vergl. man eine Mitteilung von *Peters* in den *Astronom. Nachr.* von 1856, Bd. 43, Nr. 1022, S. 209.

§ 5. Berechnung der sphärischen Excesse der Dreiecke. Zum Zwecke der üblichen Ausgleichung des Netzes nach bedingten Beobachtungen ist zunächst die Berechnung der sphärischen Excesse derjenigen Dreiecke nötig, deren sämtliche Winkel beobachtet worden sind. Dazu bedarf man der Inhalte der Dreiecksflächen, welche am bequemsten aus 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkeln berechnet werden. Die Logarithmen der Seiten giebt die vorläufige Rechnung.

Die Genauigkeit dieser Angaben für die Seiten kann immer als ausreichend für die Excefsberechnung betrachtet werden, denn wenn jene auch nur bis auf $\frac{1}{10000}$ ginge, würde der Excefs bei 10″ Betrag doch nur um 0,001″ fehlerhaft. Diese Genauigkeit haben aber die Angaben der vorläufigen Rechnung selbst in grösserer Entfernung von der Basis, da man die aus den Stationsausgleichungen hervorgehenden Winkel auf mindestens $\pm$ 1″ mittleren Fehler genau voraus-

setzen darf. Andrerseits aber ist es überflüssig, mehr als drei Decimalen bei der Ausgleichung der Dreieckswinkel beizubehalten.

Was die Excefsberechnung anlangt, so ist schon S. 403 u. ff. die Zulässigkeit einer rein sphärischen Berechnung für eine mäfsig ausgedehnte Kette erörtert. Indessen ist es leicht, mittelst der Tafel auf S. 213 in *Albrechts* Tafelsammlung das spezielle mittlere Krümmungsmafs der einzelnen Dreiecke oder kleiner Komplexe solcher zu berücksichtigen. Von der nun in der Regel in betracht kommenden Formel (1) für log ε S. 362 genügt nach S. 99 in den meisten Fällen das 1. Glied, sodafs

$$\varepsilon = \varrho'' \frac{bc \sin A}{2 a_0^2} K + \cdots$$

gesetzt werden darf. In der 3. Decimalstelle kann sich ein Einflufs erst geltend machen bei Seitenlängen von mehr als 120^{km}, wie S. 99 ausführlich erörtert worden ist. Eventuell ist dann Formel (3) S. 100 zu benutzen, welche die höheren Glieder in bequemer Weise zu berücksichtigen gestattet.

§ 6. **Ausgleichung.** Um die Ausgleichung der Beobachtungsfehler bewältigen zu können, müssen die, ein möglichst weitmaschiges Netz bildenden, gröfsten Dreiecke (die Dreiecke 1. Ordnung) für sich ausgeglichen werden, um als unveränderliche Grundlage für kleinere Dreiecke zu dienen, die in Systemen 2., 3. und 4. Ordnung nach und nach eingehangen werden. Dem entsprechend erhalten die Dreiecke 1. Ordnung eine maximale Genauigkeit der Winkelmessung. [Über die beste Methode hierzu vergl. *O. Schreiber*, *Anordnung der Horizontalwinkelmessungen etc.*, Zeitschr. f. Vermessungswesen 1878, Bd. 7, S. 209 u. ff.; sowie von demselben *Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen*, ebenda Bd. 8, S. 97 u. ff.]

Sogar die Netze 1. Ordnung erlangen bei grofsen Ländern eine solche Ausdehnung, dafs schon aus dem Grunde, mit der Detailbearbeitung nicht bis zur Aufnahme und Ausgleichung des ganzen Netzes warten zu müssen, auch für sie eine zeitlich schrittweise vorgehende Ausgleichung in Teilen nötig wird.

Es müssen dann immer die Resultate der vorangehenden Ausgleichungen beibehalten werden, was allerdings den folgenden Netzteilen einen Zwang auferlegt, der aber so lange ziemlich unschädlich ist, als in jeder der, dem Anschlufs entsprechenden Bedingungsgleichungen der mittlere Wert des Aggregats der darin enthaltenen Verbesserungen der Winkel des anzuschliefsenden Netzteiles gröfser ist, als derjenige des Aggregats der darin unterdrückten Verbesserungen der Stücke des unverändert beizubehaltenden Netzteiles, oder mit

andern Worten: so lange die Figur zwischen denjenigen Punkten, welche beiden Teilen gemeinsam sind, durch den neuen Netzteil weniger gut bestimmt ist, als durch den bereits abgeschlossenen Teil.

Andernfalls kann ein erheblicher Zwang eintreten wie z. B. bei Einschaltung eines stegartigen Netzes aus wenigen Dreiecken in einen fertig ausgeglichenen Dreieckskranz.

In England, wo die Haupttriangulation seit 3 Decennien beendet ist, bedeckt das Netz 1. Ordnung gleichmäfsig das ganze Land und ist in an einander gereihten Teilen ausgeglichen.

In Preufsen aber, dessen Triangulation 1. Ordnung noch im Gange ist, wird dagegen zunächst ein weitmaschiges Netz aus Dreiecksketten gebildet. Nach Ausgleichung dieses Kettensystems, die stückweise erfolgen mufs, füllt man die freien Maschen aus, wobei aber stets ein beträchtlicher Zwang bleibt. Wenn dieses nun auch für Landesvermessungszwecke unbedenklich ist, so läfst es doch immerhin eine Benutzung der berechneten, geodätisch übertragenen Azimute für Gradmessungszwecke unthunlich erscheinen, da dieselben ohne Zweifel oftmals mehrere Sekunden fehlerhaft sind (vergl. u. A. das mährisch-schlesische Netz S. 253 u. ff. und das posensche Netz S. 88 u. ff. des Bds. 3 der *Hauptdreiecke*).

Das ebenfalls aus Dreiecksketten gebildete Netz der englischen Vermessung in Ostindien hat Rostform. (Vergl. das Referat in der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* 1873, Bd. 8, S. 14 u. ff.)

Für die gleichzeitige Verwertung von Dreiecksnetzen zu Landesvermessungs- und Gradmessungszwecken würde es vorteilhaft sein, das übliche Ausgleichungsverfahren nach bedingten Beobachtungen aufzugeben und ein solches nach vermittelnden Beobachtungen anzuwenden, wie es für sekundäre Dreiecksnetze schon seit längerer Zeit wiederholt angewandt ist. Jenes Verfahren ist allerdings wenigstens bei einfachen Ketten kürzer als das letztere (vergl. die *Ausgleichungsrechnung* S. 329), wenn es sich aber schliefslich um die Gesamtausgleichung grofser Netzkomplexe handelt, verliert es an Übersichtlichkeit, während die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen sich stets übersichtlich anordnen läfst. Wir werden dieselbe in den letzten Paragraphen dieses Kapitels behandeln, setzen aber im Folgenden zunächst die übliche Methode voraus.

Zu dieser mag hier nur noch erwähnt werden, dafs bei Aufstellungen der Seitengleichungen mittelst des Sinussatzes immer das einfache *Legendre*sche Theorem genügt, wie in § 5 S. 361 bewiesen worden ist.

Die Ausgleichung der Dreiecksnetze nach bedingten Beobachtungen ist in der *Dänischen Gradmessung* Bd. 1 von *Andrae* und mit einer inter-

essanten Modifikation unter Anwendung eines auch von *Hansen* angewandten Kunstgriffs in Bd. 2 S. 303 u. ff. der *Hauptdreiecke der preufs. Landestriangulation* ausführlich behandelt. Das Verfahren *Andraes* ist eine Vervollständigung des *Bessel*schen *Ausgleichungsverfahrens*. Das vom Verf. in seiner *Ausgleichungsrechnung* S. 240 durch ein Beispiel erläuterte Verfahren stimmt mit demselben namentlich darin überein, dafs die Netzausgleichung als zu bestimmende Unbekannte Winkelverbesserungen benutzt, während die erwähnte Modifikation durch Einführung von Richtungsverbesserungen als zu bestimmender Unbekannten sich von beiden unterscheidet.

Die *Andrae*schen Formeln hat Verf. übersichtlich entwickelt und zusammengestellt in Bd. 12 der *Vierteljahrschrift der Astronom. Ges.* 1877 S. 192 u. ff.

Um die Ausgleichung zu erleichtern, ist es wünschenswert, die Beobachtungen so anzuordnen, dafs man auf jeder Station das Ausgleichungsergebnis genau oder doch ohne grofsen Fehler als einen einzigen, vollständigen (mit grofser Genauigkeit angestellten) Satz Richtungsbeobachtungen betrachten kann (*Ausgleichungsrechnung* S. 332). Dann vereinfacht sich das Ausgleichungsverfahren im Netze sehr und nimmt die Gestalt an, welche *Gaufs* erläutert und bei der hannoverischen Gradmessung angewandt hat (vergl. sein auch auf S. 185 der *Ausgleichungsrechnung* behandeltes Beispiel). *O. Schreiber* hat hiermit bei den neueren Ketten der preufs. Landestriangulation grofse Rechnungsersparnisse erzielt (Vergl. seine oben erwähnten Mitteilungen.)

§ 7. **Berechnung geographischer Koordinaten.** Nach beendeter Ausgleichung erfolgt die definitive Seitenberechnung mittelst des Sinussatzes unter Anwendung des einfachen *Legendre*schen Theorems (§ 5 S. 361) und alsdann die Berechnung der Koordinaten. Zu dem in § 1 Bemerkten ist nur hinzuzufügen, dafs zur Ausführung der Rechnung für kurze Distanzen die Formeln von S. 456 u. 457 oder die S. 458 erwähnten, nicht wesentlich verschiedenen Formeln *O. Schreibers*, zu welchen, wie bereits bemerkt, für 47° bis 57° geogr. Breite Hilfstafeln berechnet sind, sich am besten eignen.

Kontrollen der Rechnung ergeben sich durch doppelte Berechnung für diejenigen Punkte, in denen die Seitenzüge, entlang welcher die Übertragung der Positionen ausgeführt wird, zusammenstofsen.

§ 8. **Einschaltung von Punkten in das Netz 1. Ordnung.** Die Ausgleichung erfährt hierbei leicht dadurch eine beträchtliche Komplikation, dafs eine grofse Anzahl von Bedingungsgleichungen entsteht, selbst in dem Falle, wo man successive immer nur je einen Punkt einschaltet. Deshalb ist es hier längst als vorteilhaft erkannt worden, nach vermittelnden Beobachtungen auszugleichen, denn dann erscheinen für jeden einzuschaltenden Punkt immer nur seine 2 Koordinaten oder überhaupt 2 Bestimmungsstücke als Unbekannte. So lange

die Distanzen der benachbarten Punkte noch mehrere Meilen betragen (wie im Netz 2. Ordnung), dürfte die Wahl derselben Unbekannten, wie für das Netz 1. Ordnung nicht unpassend sein. Für die Ausgleichung kann § 10 als Erläuterung dienen; denn es ändert sich das Verfahren nur insofern, als die Koordinaten der Punkte des bereits ausgeglichenen Netzes streng beibehalten werden müssen.

Für noch geringere Abstände, aber auch unter Umständen für jene ersten Einschaltungen, empfiehlt sich die Anwendung rechtwinkliger ebener Koordinaten nach den Formeln, welche im vorigen Kapitel S. 476 u. ff. entwickelt wurden. Selbst dann, wenn man für die Detailaufnahme Systeme rechtwinkliger geodätischer Koordinaten einführt, ist es zur Berücksichtigung der ellipsoidischen Gestalt der Projektionsfläche am bequemsten, für die Zwecke der Ausgleichung den Übergang zu ebenen rechtwinkligen Koordinaten vorzunehmen und nach beendeter Ausgleichung zu geodätischen rechtwinkligen Koordinaten zurückzukehren.

In Bezug auf das Detail der Ausgleichung verweisen wir auf *Ausgleichungsrechnung* S. 158 u. ff. Man wird hieraus leicht entnehmen, wie überhaupt die Einschaltung nicht nur einzelner Punkte, sondern auch ganzer Netze auszuführen ist, wenn die Beobachtungen auf den Stationen einfach als vollständige Sätze aufgefafst werden können. Für beliebige Beobachtungen hat *Andrae* im 2. Bd. der *Dänischen Gradmessung* die Formeln entwickelt (vergl. eventuell das Ref. in Bd. 13 der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* 1878, S. 65 u. ff.); abgesehen von den speziellen Koefficienten der Fehlergleichungen kann man hier überdies unmittelbar das in § 10 zu gebende, im wesentlichen identische Verfahren anwenden.

Man vergl. auch in Bezug auf den Gang der Einschaltungen und das Ausgleichungsverfahren die Abhandlung von *Mauck* über das Vermessungswesen in Mecklenburg-Schwerin in der *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1879 Bd. 8.

Was die Lage der als spezielle Abscissenaxen dienenden Meridiane anlangt, so kann man entweder, wie in Preufsen bei der Katastervermessung, sie beliebig nach lokalem Bedürfnis legen, oder systematisch auf runde Werte von geographischen Längenunterschieden, etwa von Grad zu Grad, wobei es gleichgültig ist, ob irgend ein Punkt des Hauptnetzes mit denselben zusammenfällt oder nicht. (Vergl. auch über die Anlage einer Landesvermessung *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1877, Bd. 6 S. 607 u. ff.)

§ 9. **Landeshorizont.** Wenn die Basis nicht auf die Meeresfläche reduziert wird, sondern auf eine mehr in mittlerer Höhe des Landes gelegene Niveaufläche, den mittleren Landeshorizont, so mufs man bei der Berechnung der sphärischen Excesse und der geographischen Positionen dieses berücksichtigen.

Die sphärischen Excesse werden von den Dimensionen des Ellipsoids sehr wenig beeinflufst; man kann entweder mit denen des Erdellipsoids rechnen, oder a_0 einfach um die Meereshöhe des Landeshorizonts vermehren, falls man einen Einflufs vermutet. Was nun die geographischen Positionen anlangt, so ist es praktisch am bequemsten, zu ermitteln, um wieviel sich der Logarithmus der Grundlinie durch die Reduktion auf die Meeresfläche ändert, diese Änderung den Logarithmen aller Seiten beizufügen und sodann geographische Positionen mit denjenigen Dimensionen des Erdellipsoids zu rechnen, für welche Tafeln existieren. Dieses Verfahren entspricht der Annahme, dafs der Landeshorizont und das Geoïd als ähnliche Ellipsoide aufgefafst werden können. Selbstverständlich ist dies nicht streng, denn der Voraussetzung eines Rotationsellipsoids als Geoid und geradliniger (oder auch selbst den thatsächlichen Verhältnissen entsprechend gekrümmter) Lotlinien entsprechen Niveauflächen, die nicht genau mehr die Form eines Rotationsellipsoids haben.

Strenger würde es sein, zwar die Form eines solchen zu adoptieren, aber die Halbaxen a_0 und b_0 beide um die Meereshöhe des Landeshorizonts zu vermehren (also e^2 nicht beizubehalten). Oder noch besser: Werte von a_0 und e^2 für das Ellipsoid des Landeshorizonts aus den um die Meereshöhe desselben vermehrten Werten der beiden, dem Erdellipsoid in der mittleren geographischen Breite des Landes entsprechenden Werte von ϱ_m und ϱ_n zu bestimmen.

Allein hierbei entbehrt man der Bequemlichkeit der Benutzung vorhandener Tafeln und erzielt schliefslich nur die Berücksichtigung kleiner Einflüsse, die man bei anderer Gelegenheit meist vernachlässigt. Wenn man nämlich die Reduktion wegen der Höhe der Objekte über dem Meere (bezw. dem Landeshorizont) bei den gemessenen Winkeln unterläfst, so hat man auch das Recht, die Projektionen des Netzes auf den Landeshorizont und auf den Meereshorizont als ähnliche Figuren anzusehen, was nur eine konsequente Vernachlässigung giebt, und damit rechtfertigt sich dann das praktisch bequeme Verfahren.

Allen Bedenken bezüglich konsequenter mathematischer Behandlung geht man aber aus dem Wege durch sofortige Projektion der Grundlinien auf den Meereshorizont, wie es auch bei ausgedehnten Vermessungen üblich ist. Man kann ja schliefslich für Detail-

vermessungen nach der hierbei sicher ausreichenden Kugelhypothese zu höher gelegenen Horizonten übergehen, wenn es einmal erwünscht sein sollte.

§ 10. **Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.** Als Unbekannte führt man am besten bei gröfseren Ländern die geographischen Breiten und Längenunterschiede (gegen einen beliebigen 1. Meridian) ein, bei kleineren Ländern direkt geodätische oder ebene, rechtwinklige Koordinaten. Wir behandeln aber nur den ersteren Fall.

In diesem ist es nun erforderlich, auf Grund der vorläufigen Seitenberechnung eine vorläufige Berechnung der Breiten und Längen von dem astronomischen Anfangspunkte aus in möglichster Schärfe durchzuführen, damit die Ausgleichung nur sehr kleine Verbesserungen ergeben kann, deren Quadrate zu vernachlässigen sind, sodafs auch einfache Differentialformeln zur Berechnung der Änderungen der Azimute aus den Änderungen der geographischen Positionen ausreichen.

Diese Differentialformeln sind schon abgeleitet. Die 2. oder 3. Formel (4) S. 282 geben sofort die Änderung $d\alpha_{ik}$ des Azimuts im Punkte P_i nach dem Punkte P_k, welche zu den Änderungen dB_i und dB_k der geographischen Breiten und zu den Änderungen dL_i und dL_k der geographischen Längen der beiden Punkte P_i und P_k gehöret, und zwar hat man:

$$d\alpha_{ik} = \frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} \sin\alpha_{ik}\, dB_i - \frac{1-e^2}{W_k^3} \sin\alpha_{ki}\, dB_k \\ +\,(dL_i - dL_k)\,\frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Die Berechnung der Gröfsen $\mathfrak{m}$ und ihrer Differentialquotienten ist bereits S. 283 u. ff. erledigt.

Denken wir uns also in aller Schärfe zu vorläufigen Werten $\bar{B}$ und $\bar{L}$ der geographischen Positionen die Azimute derjenigen geodätischen Linien berechnet, welche den Seiten des Dreiecksnetzes entsprechen, und ist $\bar{\alpha}_{ik}$ eines dieser berechneten Azimute, α_{ik} der beobachtete (und gehörig nach § 4 S. 488 reduzierte) Wert, sowie λ_{ik} eine seinem Beobachtungsfehler entsprechende plausible Verbesserung, so wird man dB_i, dB_k, dL_i und dL_k dergestalt wählen, dafs nach Mafsgabe obiger Gleichung $d\alpha_{ik}$ dem Wert

$$\alpha_{ik} + \lambda_{ik} - \bar{\alpha}_{ik} \quad (2)$$

gleich ist.*) Die Beobachtung des Azimutes α_{ik} würde also die **Fehlergleichung** geben:

$$\lambda_{ik} = \bar{\alpha}_{ik} - \alpha_{ik} + \frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} \sin\alpha_{ik}\, dB_i - \frac{1-e^2}{W_k^3}\sin\alpha_{ki}\, dB_k \\ + (dL_i - dL_k)\frac{\cos B}{W_k}\cos\alpha_{ki} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Hierbei genügt es natürlich die Koefficienten rechts mit den Näherungswerten von α und B zu berechnen.

Es wird aber im allgemeinen nicht das Azimut gemessen, sondern ein Satz von 2 oder mehr Richtungen. Durch Beifügung eines angemessenen Wertes wird man zwar (und wir setzen es voraus) diese Angaben eines Satzes annähernd auf Azimute bringen; es wird aber immer noch eine unbekannte Korrektion $-u$ bleiben (u Orientierungsfehler des Satzes), die wir allen Angaben α eines Satzes beigefügt zu denken haben (*Ausgleichungsrechnung* S. 160).

Rechter Hand zu obiger Gleichung tritt also nun noch die Unbekannte $+u$, die allen Gleichungen *eines* Satzes von Richtungen gemeinsam ist, für jeden neuen Satz aber sich ändert. Die *Fehlergleichungen* für einen Satz, der alle vorkommenden Richtungen enthält, erlangen somit die Form:

$$\left.\begin{array}{llr} \lambda_1 = -l_1 + u + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots & \text{Gew.} & g_1 \\ \lambda_2 = -l_2 + u + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots & \text{"} & g_2 \\ \lambda_3 = -l_3 + u + a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots & \text{"} & g_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \end{array}\right\}, \quad (4)$$

worin nach Mafsgabe von Gleichung (3) l die Differenz *beob. Azimut — ber. Azimut* bedeutet und $x, y, z \cdots$ die unbekannten (differentialen) Verbesserungen der geographischen Koordinaten aller Punkte, $a, b, c \cdots$ aber ihre Koefficienten in abgekürzter Bezeichnung vorstellen. Die Gewichte g setzen wir gleich 1, so lange wirklich die Richtungen beobachtet sind, dagegen gleich null, sobald sie nicht beobachtet sind.

Ein 2. Satz auf demselben Standpunkt giebt ein System derselben Form, etwa:

$$\left.\begin{array}{llr} \lambda_1' = -l_1' + u' + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots & \text{Gew.} & g_1' \\ \lambda_2' = -l_2' + u' + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots & \text{"} & g_2' \\ \lambda_3' = -l_3' + u' + a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots & \text{"} & g_3' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \end{array}\right\}, \quad (5)$$

*) Zur Berechnung der $\bar{\alpha}$ können die Formeln des § 23, S. 313, dienen. Auch die Formeln des § 11, S. 157, dürften sich eignen, und es fallen hier natürlich die Reduktionen vom astronomischen aufs geodätische Azimut weg.

ebenso jeder andere Satz auf demselben Standpunkt und schliefslich auch auf anderen Standpunkten.

Nur *der* Unterschied besteht für verschiedene Standpunkte, dafs immer neue Aggregate von je 4 Unbekannten auftreten, während bei den Gleichungsystemen *eines* Standes die Aggregate $ax + by + cz + \cdots$ in den Gleichungen mit demselben unteren Index (die also zu derselben Richtung gehören) identisch sind.

Aufserdem tritt eine Modifikation ein auf der 1. Station, der astronomischen Station. Für diese sind dB und dL gleich null. Ferner ist hier *ein* Azimut wirklich gegeben.

Wir sehen indessen vorläufig davon, dafs ein Azimut gemessen ist, ab und geben erst weiterhin gleichzeitig mit der Berücksichtigung der Grundlinie an, wie es einzuführen ist. Ganz von selbst wird man zu der Erkenntnis gelangen, dafs die Rechnung dieselbe bleibt, falls Breite und Azimut nicht auf ein und derselben Station gemessen sind.

Um nun die Quadratsumme aller $\lambda\lambda g$ zu einem Minimum zu machen, hat man nur das gewöhnliche Verfahren der Bildung der Normalgleichungen zu beachten (*Ausgleichungsrechnung* S. 116). In Bezug auf die Unbekannten ergiebt sich dabei ein Unterschied, weil die $u, u' \ldots$ immer nur in *einem* System Fehlergleichungen auftreten, $x, y, z \ldots$ aber in verschiedenen Systemen. Jene lokalen Unbekannten wird man vor allem eliminieren, ehe noch die vollständigen Normalgleichungen für $x, y, z \ldots$ gebildet sind. Man kann überhaupt, da die einzelne Station $x, y, z \ldots$ *nicht* einzeln bestimmt, sondern nur Aggregate derselben, diese Aggregate zunächst als Unbekannte einführen.

Nennen wir also diese unbekannten Aggregate auf derjenigen Station, für welche obige Gleichungen angeschrieben sind, $A, B, C \ldots$, so lauten die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll|ll|l}
\lambda_1 = -l_1 + u + A & \text{Gew. } g_1 & \lambda'_1 = -l'_1 + u' + A & \text{Gew. } g'_1 & \cdot\cdot \\
\lambda_2 = -l_2 + u + B & \text{,,} \quad g_2 & \lambda'_2 = -l'_2 + u' + B & \text{,,} \quad g'_2 & \cdot\cdot \\
\lambda_3 = -l_3 + u + C & \text{,,} \quad g_3 & \lambda'_3 = -l'_3 + u' + C & \text{,,} \quad g'_3 & \cdot\cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot\cdot
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Hierzu gehören die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
0 = -[gl] + [g]\, u + Ag_1 + Bg_2 + Cg_3 + \cdots \text{ für } u \\
0 = -[g'l'] + [g']\, u' + Ag'_1 + Bg'_2 + Cg'_3 + \cdots \text{ ,, } u' \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}\right\} \quad (7)$$

und:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = -[g_1 l_1] + u g_1 + u' g'_1 + \cdots + A\,[g_1] & \text{für } A \\ 0 = -[g_2 l_2] + u g_2 + u' g'_2 + \cdots + B\,[g_2] & \text{„ } B \\ 0 = -[g_3 l_3] + u g_3 + u' g'_3 + \cdots + C\,[g_3] & \text{„ } C \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Eliminiert man aus letzteren die Unbekannten u, u' ... mittelst der ersteren, so nehmen sie die nachstehende Form an:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = -(\mathfrak{al}) + A(\mathfrak{aa}) + B(\mathfrak{ab}) + C(\mathfrak{ac}) + \cdots & \text{für } A \\ 0 = -(\mathfrak{bl}) + A(\mathfrak{ab}) + B(\mathfrak{bb}) + C(\mathfrak{bc}) + \cdots & \text{„ } B \\ 0 = -(\mathfrak{cl}) + A(\mathfrak{ac}) + B(\mathfrak{bc}) + C(\mathfrak{cc}) + \cdots & \text{„ } C \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Um nun zu erkennen, wie man diese Ergebnisse für die einzelnen Stationen weiter zu behandeln hat, denken wir uns die Normalgleichung für x gebildet. Hierzu giebt die Station, deren Fehlergleichungen (4) und (5) speziell notiert sind, einen *Beitrag* rechter Hand, den man mit Benutzung der Abkürzungen A, B, C ... wie folgt schreiben kann:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\left\{-[g_1 l_1] + u g_1 + u' g'_1 + \cdots + A[g_1]\right\} \\ + a_2\left\{-[g_2 l_2] + u g_2 + u' g'_2 + \cdots + B[g_2]\right\} \\ + a_3\left\{-[g_3 l_3] + u g_3 + u' g'_3 + \cdots + C[g_3]\right\} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right\} \tag{10}$$

oder auch:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\left\{\text{rechte Seite der Normalgl. (8) für } A\right\} \\ + a_2\left\{\text{„ „ „ „ „ „ } B\right\} \\ + a_3\left\{\text{„ „ „ „ „ „ } C\right\} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right\} \tag{11}$$

Da die Normalgleichungen (7) für u, u' ... dieselben bleiben, man mag A, B, C.. als Unbekannte betrachten, oder direkt auf x, y, z.. operieren (in welchem Falle A, B, C.. eben nur vorübergehende Abkürzungen bezeichnen), so darf man im Ausdruck (11) die Normalgleichungen (8) für A, B, C.. gleich in der von u, u' ... befreiten Form (9) nehmen.

Man erhält also den Beitrag einer Station zur Normalgleichung für x, wenn man nach Mafsgabe von (11) die rechten Seiten der Stationsnormalgleichungen (9) der Reihe nach mit dem Koefficienten

von x in A, B, C.. multipliziert und addiert — und schliefslich für A, B, C.. noch die Ausdrücke in x, y, z.. einsetzt.

Dies dürfte das Ausgleichungsgeschäft genügend erläutern. Man sieht, dafs jede Station für sich wie üblich bis zur Bildung der Normalgleichungen zu behandeln ist, dafs eine stationsweise Auflösung der letzteren aber nicht nötig wird.

§ 11. **Gleichungen für Azimut- und Basismessungen.** Jede solche Messung giebt eine Gleichung zwischen den 4 Verbesserungen der Koordinaten der Endpunkte der betreffenden Linien.

Der *Azimutmessung* entspricht als Bedingungsgleichung die Gleichung (3) S. 496, wenn λ_{ik} = null gesetzt wird.

Der *Basismessung* entspricht die Bedingungsgleichung $s_{ik} = \bar{s}_{ik} + ds_{ik}$, wobei s_{ik} die gemessene Länge, $\bar{s}_{ik}$ die aus den genäherten Koordinatenwerten scharf berechnete Basislänge und ds_{ik} den Zuwachs von $\bar{s}_{ik}$ durch Änderung der geographischen Koordinaten der Endpunkte bedeutet.

Nach der 1. Gleichung (4) S. 282 ist daher diese Bedingungsgleichung die folgende:

$$0 = \bar{s}_{ik} - s_{ik} + a_0 \left\{ \begin{array}{c} \frac{1-e^2}{W_i^3} \cos \alpha_{ik}\, dB_i + \frac{1-e^2}{W_k^3} \cos \alpha_{ki}\, dB_k \\ + (dL_i - dL_k) \frac{\cos B_k}{W_k} \sin \alpha_{ki} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Sind mehrere Grundlinien gemessen, so stellt man für jede eine solche Bedingungsgleichung her, befriedigt also jede Basismessung streng. Verbesserungen anzubringen erscheint schon darum überflüssig, weil das Verhältnis zweier benachbarter Basislängen aus ihren direkten Messungen weit schärfer hervorgeht als aus den Winkelmessungen des zwischenliegenden Netzteiles. Einen anderen, wichtigeren Grund, der die Behandlung der (1) als Fehlergleichungen geradezu als fehlerhaft erscheinen läfst, werden wir in § 18 des folgenden Kapitels erkennen (vergl. auch die Anm. unten daselbst).

Um die Bedingungsgleichungen für das Azimut und die Grundlinien zu berücksichtigen, hat man (nach *Ausgleichungsrechnung* S. 195, Verfahren I) mittelst derselben je eine Unbekannte *vor* Bildung der allgemeinen Normalgleichungen zu eliminieren. Diese Elimination erfolgt, wie man unmittelbar erkennt, einfach in den Ausdrücken für A, B, C.., sodafs (wie auch von vornherein klar) die Bildung der Stationsnormalgleichungen (9) S. 498 davon gar nicht berührt wird.

Hat man aber bereits die allgemeinen Normalgleichungen aus den Beiträgen (11) S. 498 ermittelt, ohne jene Bedingungen zu berücksichtigen, so geschieht dieses nachträglich mittelst der Koefficienten jener Normalgleichungen in der Weise, wie es nachfolgendes Beispiel angiebt.

Seien x und y zwei zur Elimination bestimmte Unbekannte, dann kann man die Bedingungsgleichungen auf die Form bringen:

$$\left.\begin{array}{l} x = i_0 + i_3 z + i_4 t + \cdots \\ y = k_0 + k_3 z + k_4 t + \cdots . \end{array}\right\} \tag{2}$$

Irgend eine Fehlergleichung, deren ursprüngliche Form

$$\lambda = -l + ax + by + cz + dt + \cdots \quad \text{Gew. } g \tag{3}$$

ist, würde nun durch Elimination von x und y die neue Form erhalten haben:

$$\lambda = -(l - ai_0 - bk_0) + (c + ai_3 + bk_3) z + (d + ai_4 + bk_4) t + \cdots \text{Gew.} g. \tag{4}$$

In unentwickelter Form [*Ausgleichungsrechnung* S. 80 (6)] sind die Normalgleichungen in Bezug auf (3):

$$\underset{\text{für } x}{[a\lambda g] = 0} \qquad \underset{\text{für } y}{[b\lambda g] = 0} \qquad \underset{\text{für } z}{[c\lambda g] = 0} \quad \ldots; \tag{5}$$

dagegen ist in Bezug auf (4) die Normalgleichung für z in unentwickelter Form:

$$[(c + ai_3 + bk_3)\lambda g] = 0. \tag{6}$$

Hieraus erkennt man, dafs die Normalgleichung für z sich mittelst der, in Bezug auf die Fehlergleichungen (3) gebildeten Normalgleichungen (5) wie folgt zusammensetzt:

$$(Z) + (X)i_3 + (Y)k_3 = 0, \tag{7}$$

wenn (X), (Y) und (Z) diese letzteren Normalgleichungen der Reihe nach in entwickelter Form bezeichnen, in welchen Gleichungen man sich natürlich x und y mittelst der (2) durch $z, t \ldots$ dargestellt zu denken hat.

An Stelle der (5) treten im allgemeinen die (9) S. 498.

Wendet man das Verfahren II von S. 196 der *Ausgleichungsrechnung* auf vorstehendes Beispiel an, so werden bei der successiven Elimination der Unbekannten aus den Normalgleichungen nach *Gaufs'* Algorithmus zuletzt einige quadratische Koefficienten von Unbekannten null werden, weil sich ohne Azimut- und Basismessung nicht alle bestimmen lassen. Nichtsdestoweniger läfst sich die Rechnung ganz ohne Schwierigkeit fortsetzen, wenn man, sobald keine Unbekannten mit quadratischen Koefficienten mehr vorkommen, vorerst die folgenden Normalgleichungen für die Korrelaten k zu deren Elimination verwendet. (Vergl. auch *Ausgleichungsrechnung* S. 212 *D*.)

§ 12. **Von Einzelheiten** mag erwähnt werden, dafs es überflüssig ist, schon vor der Stationsausgleichung die Reduktionen des § 4 S. 488 anzubringen, wie auch daselbst bereits bemerkt wurde. Da immer dieselben Reduktionen auftreten, wo A oder B oder $C \ldots$ vorkommt, kann man sie sich zu diesen Gröfsen einstweilen geschlagen denken und mufs bei Bildung der allgemeinen Normalgleichungen schliefslich setzen (§ 10 S. 496 u. 497):

$$\left.\begin{array}{ll} A = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - & \text{Reduktion für das Azimut der 1. Richtung} \\ B = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - & \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \;\; 2. \quad " \\ C = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots - & \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \;\; 3. \quad " \\ \cdots\cdots\cdots & \end{array}\right\}, \quad (1)$$

indem die Reduktion das Vorzeichen des beobachteten Azimuts α in den Fehlergleichungen hat.

In ganz gleicher Weise kann man bei Bildung der Fehlergleichungen zunächst für $\bar{\alpha}$ irgend einen andern vorläufigen Wert $\bar{\alpha}'$ setzen und hat nur zum Schlufs bei Substitution der Ausdrücke für $A, B, C \ldots$ zu vorstehenden Ausdrücken rechter Hand noch beizufügen bezw.:

$$\left.\begin{array}{ll} - \bar{\alpha}_1' + \bar{\alpha}_1 & \text{für die 1. Richtung} \\ - \bar{\alpha}_2' + \bar{\alpha}_2 & \;\; " \quad " \;\; 2. \quad " \\ - \bar{\alpha}_3' + \bar{\alpha}_3 & \;\; " \quad " \;\; 3. \quad " \\ \cdots\cdots\cdots & \end{array}\right\}. \quad (2)$$

Kommen *lokale Richtungen* vor, d. h. solche, die nach Punkten gehen, die nicht in die Netzausgleichung Eingang finden, so fallen vorstehende Substitutionen fort, da die Netzausgleichung für diese Richtungen nur dazu dient, sie selbst noch weiter zu verbessern. Ist also die 3. Richtung z. B. eine solche, so führt man einfach das Symbol C in der allgemeinen Ausgleichung weiter.

Man wird aber leicht bemerken, dafs es zulässig und vorteilhaft ist, vor Bildung der allgemeinen Normalgleichungen dieses C aus den Stationsnormalgleichungen zu eliminieren. Die Normalgleichung für C, in welche nachträglich die Substitutionen für $A, B, D, \ldots$ zu machen sind, dient nach Beendigung der allgemeinen Ausgleichung nur noch dazu, C zu finden und aufserdem bei der summarischen Bildung von $[\lambda\lambda g]$ einen Beitrag zu liefern (*Ausgleichungsrechnung* S. 107).

Wünscht man die Resultate der Stationsausgleichungen gesondert kennen zu lernen, so mufs man eine der Gröfsen $A, B, C \ldots$ (entsprechend *Bessels* Verfahren) null setzen oder irgend wie annehmen

und die Normalgleichung derselben weglassen; denn die einzelne Station bestimmt selbstverständlich diese Gröfsen nicht völlig, sondern nur ihre Differenzen. Man erkennt dies überdies daran, dafs stets die Summe der Stationsnormalgleichungen (9) S. 498 identisch null ist. Die Resultate der Stationsausgleichungen sind im allgemeinen von der Form

$$\bar{\alpha}'_1 + A_0, \quad \bar{\alpha}'_2 + B_0, \quad \bar{\alpha}'_3 + C_0, \ldots, \tag{3}$$

wo A_0, B_0, $C_0 \ldots$ die für diese Symbole erhaltenen bezw. angenommenen Zahlwerte bedeuten.

Setzen wir umgedreht voraus, dafs *die Stationsausgleichungen nach Besselschem oder verwandtem Verfahren beendet* vorliegen, so sind die Normalgleichungen so umzuwandeln, dafs sie die hier vorausgesetzte Form (9) S. 498 erhalten. Denkt man sich aber in diesem System der Normalgleichungen entsprechend dem *Bessel*schen Verfahren etwa A und die 1. Gleichung weg, so ist es eine sehr einfache Sache, die Ergänzung zu bewirken, da die Summe der Koefficienten derselben Unbekannten in dem System (9) S. 498 immer null ist. Man braucht also für die Unbekannten B', $C' \ldots$ in den *Bessel*schen Normalgleichungen nur $B - A$, $C - A, \ldots$ zu setzen, die Glieder mit A in jeder Gleichung zu vereinigen und dann die negative Summengleichung zu bilden, in welcher man die Normalgleichung für A vor sich hat. Das gesamte Gleichungssystem ist das System (9) S. 498. Bei dieser Umformung fallen, indem man die Resultate der Stationsausgleichung acceptiert, die $(\mathfrak{a}\mathfrak{l})$, $(\mathfrak{b}\mathfrak{l})$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{l}) \ldots$ weg; man mufs aber nun in den, den Ausdrücken für $A, B, C \ldots$ beizufügenden Gliedern $\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}$ [siehe oben das System (2)] den $\bar{\alpha}'$ solche Werte geben, dafs die Differenzen derselben den Ergebnissen der Stationsausgleichungen entsprechen.

Bei dem Verfahren der preufsischen Landestriangulation werden in einem gewissen Fall von haus aus, wie wir es oben vorausgesetzt haben, für *alle* Richtungen einer Station Unbekannte $A, B, C \ldots$ eingeführt. Die entstehenden Normalgleichungen sind ohne weiteres beizubehalten und zwar in der ursprünglichen Form. Denn die, wie dort üblich, durch Beifügung einer Bedingungsgleichung zwischen den $A, B, C \ldots$ modificierte Form ist jetzt für die Gesamtausgleichung unbrauchbar und sie dient im vorliegenden Falle nur noch dazu, um rasch die Stationsergebnisse allein zu erhalten. Zum Zwecke der Erläuterung betrachten wir den Fall, dafs alle Winkel (Kombinationen von je 2 Richtungen) gleich oft gemessen seien (*Schreibers* Beobachtungsverfahren, s. o.). Es ist dies zugleich der einzige Fall, in welchem die Landestriangulation das erwähnte Verfahren benutzt,

sonst wendet sie das *Bessel*sche an. Dann also erhalten die Stationsnormalgleichungen die Form:

$$\left.\begin{array}{l}
0 = -(\mathfrak{al}) + (\mathfrak{aa})A + (\mathfrak{ab})B + (\mathfrak{ab})C + \cdots \\
0 = -(\mathfrak{bl}) + (\mathfrak{ab})A + (\mathfrak{aa})B + (\mathfrak{ab})C + \cdots \\
0 = -(\mathfrak{cl}) + (\mathfrak{ab})A + (\mathfrak{ab})B + (\mathfrak{aa})C + \cdots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

d. h. alle quadratischen Koefficienten sind einander gleich, ebenso alle nichtquadratischen; dabei ist für n Richtungen wegen des identischen Verschwindens der Summe aller Gleichungen

$$(\mathfrak{aa}) = -(n-1)(\mathfrak{ab}). \qquad (5)$$

Die Landestriangulation fügt nun die Bedingungsgleichung

$$0 = A + B + C + \cdots \qquad (6)$$

bei. Wird dieselbe mit $(\mathfrak{ab})$ multipliziert und von den (4) abgezogen, so erhält man das modificierte System:

$$\left.\begin{array}{l}
0 = -(\mathfrak{al}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{aa})A \\
0 = -(\mathfrak{bl}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{aa})B \\
0 = -(\mathfrak{cl}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{aa})C \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}\right\}. \qquad (7)$$

Ein ganz direkter Versuch führt aber leicht zu der Überzeugung, dafs bei der Gesamtausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen dieses System zur Bildung der Normalgleichungen *nicht* benutzt werden darf.

Man kann dies auch wie folgt erkennen, womit zugleich eine anschauliche Darstellung jenes Verfahrens gewonnen wird (die in anderen komplizierteren Fällen ebenfalls angewandt werden kann).

Wir ziehen im ursprünglichen System (4) den Ausdruck

$$(\mathfrak{ab})(A + B + C + \cdots)$$

in $(\mathfrak{ab})\,nu$ zusammen und schreiben also mit Rücksicht auf (5):

$$\left.\begin{array}{l}
0 = -(\mathfrak{al}) - u\,.\,\frac{n}{n-1}(\mathfrak{aa}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{aa})A \\
0 = -(\mathfrak{bl}) - u\,.\,\frac{n}{n-1}(\mathfrak{aa}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{aa})B \\
0 = -(\mathfrak{cl}) - u\,.\,\frac{n}{n-1}(\mathfrak{aa}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{aa})C \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\qquad u = \frac{1}{n}(A + B + C + \cdots).
\end{array}\right\} \qquad (8)$$

Stellt man sich aber vor, dafs nur *ein* vollständiger Satz aller Richtungen mit dem Gewicht $\frac{n}{n-1}$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{a})$ beobachtet sei, so erhält man direkt ganz dieselbe *Form* der Gleichungen, wie der übliche Rechnungsgang zeigt [S. 497 u. 498 (6) bis (9)]. Man kann also den Komplex der Winkelbeobachtungen wie einen vollständigen Satz auffassen mit dem Gewicht $\frac{n}{n-1}$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{a})$: *äquivalenter Satz* (vergl. *Ausgleichungsrechnung* S. 164).

Da nun die Stationsnormalgleichungen die Form (8) annehmen und bei dem Verfahren des § 10 die Annahme (6) unzulässig ist, so müssen wir (8) d. h. nach Restitution des Ausdrucks für u: das System (4) und nicht (7) für die Netzausgleichung beibehalten.

Die modificierte Form (7) giebt jedoch die Winkel bei der Stationsausgleichung (und nur um diese handelt es sich in dem Falle) ganz korrekt, da $A, B, C \ldots$ nach (7) und (8) nur um eine Konstante, u selbst, verschieden erhalten werden.

Man sieht nun auch, beiläufig bemerkt, weshalb es zulässig ist, bei der Ausgleichung des Netzes nach *bedingten* Beobachtungen mit den Gleichungen (7) zu rechnen, ohne die Bedingungsgleichung $0 = A + B + C + \cdots$, weiter aufzuführen, wie es bei der Landestriangulation in der That üblich ist. Denn denkt man sich im vorliegenden Falle den (8) entsprechend anstatt $A, B, C \cdots A-u, B-u, C-u \cdots$ geschrieben, so fällt doch u stets aus den Bedingungsgleichungen heraus, da die Gröfsen $A-u$, $B-u$, $C-u, \cdots$ nicht einzeln, sondern immer paarweise auftreten.

§ 13. Summarische Berechnung von $[\lambda\lambda g]$. Die allgemeinen Normalgleichungen für $x, y, z \ldots$ nehmen die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -(al) + (aa)x + (ab)y + (ac)z + \cdots \\ 0 = -(bl) + (ab)x + (bb)y + (bc)z + \cdots \\ 0 = -(cl) + (ac)x + (bc)y + (cc)z + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}, \tag{1}$$

wobei es ganz gleichgültig sein mufs, ob man hierzu durch die Stationsnormalgleichungen gelangt, oder direkt. Jedenfalls sind die $u, u' \ldots$ eliminiert zu denken.

Man hat nun nach allgemeinen Formeln in *Gauss*ischer Ausdrucksweise [*Ausgleichungsrechnung* S. 107 (9) bezw. S. 121 (8)]:

$$[\lambda\lambda g] = \mathrm{I} - \mathrm{II} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I} = \left\{[llg] - \frac{[gl]^2}{[g]} - \frac{[g'l']^2}{[g']} - \cdots\right\} \\ \mathrm{II} = \left\{\frac{(al)^2}{(aa)} + \frac{(bl.1)^2}{(bb.1)} + \frac{(cl.2)^2}{(cc.2)} - \cdots\right\} \end{array}\right\}, \tag{3}$$

wobei in $[\lambda\lambda g]$ und $[llg]$ die Summierung über untere und obere Indices und über alle Stationen erstreckt ist, bei den andern eckigen Klammern aber nur über untere Indices, d. h. über jeden einzelnen Satz.

Während Teil II vorstehenden Ausdruckes für $[\lambda\lambda g]$ sich mittelst der allgemeinen Normalgleichungen (1) berechnen läfst und auch in die Gestalt:

$$\text{II} = \{(ai)\,x + (bl)\,y + (cl)\,z + \cdots\} \tag{4}$$

gebracht werden kann, ist es für den ersten nötig, weiter zurückzugehen. Es werden aber bereits bei den Stationsausgleichungen die Summen zur Berechnung des Beitrags jeder Station für den Teil I ermittelt (vgl. die (7) S. 497), vorausgesetzt, dafs man bereits hierbei die definitiven, mittelst der aus den vorläufigen Werten der geographischen Koordinaten berechneten Azimute $\bar{\alpha}$ abgeleiteten l angewandt hat. Sind dazu indes, wie schon oben vorausgesetzt, andere Werte $\bar{\alpha}'$ verwandt, und sind auch anfangs die Reduktionen weggeblieben, so ist nun eine neue Formel nötig, welche, die Stationsrechnungen benutzend, eine möglichst einfache Bildung des Teiles I gestattet. Wir gehen zur Entwicklung derselben über.

Die Stationsausgleichungen geben anstatt der λ andere Verbesserungen e; auch $u, u' \ldots$, sowie $A, B, C \ldots$ haben hier nicht die Werte, wie sie der allgemeinen Ausgleichung entsprechen, sondern andere Werte, die wir durch den untern Index 0 auszeichnen. Da auch die l nicht notwendig schon diejenigen der allgemeinen Ausgleichung sind, mufs dafür ein andres Symbol $\mathfrak{l}$ gesetzt werden. Für die Richtungssätze einer Station hat man also zunächst mit Rücksicht auf die Stationsausgleichung allein nachstehende Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll|ll|l}
e_1 = -\mathfrak{l}_1 + u_0 + A_0 & \text{Gew. } g_1 & e_1' = -\mathfrak{l}_1' + u_0' + A_0 & \text{Gew. } g_1' & \ldots \\
e_2 = -\mathfrak{l}_2 + u_0 + B_0 & \;\;\text{„}\;\; g_2 & e_2' = -\mathfrak{l}_2' + u_0' + B_0 & \;\;\text{„}\;\; g_2' & \ldots \\
e_3 = -\mathfrak{l}_3 + u_0 + C_0 & \;\;\text{„}\;\; g_3 & e_3' = -\mathfrak{l}_3' + u_0' + C_0 & \;\;\text{„}\;\; g_3' & \ldots \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \ldots
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Die Beziehung der $\mathfrak{l}$ zu den l ergiebt sich daraus, dafs für irgend eine Richtung (entsprechend dem in § 12 S. 501 vorausgesetzten Gange) zu setzen ist:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{l} = \alpha - \bar{\alpha}' \qquad l = \alpha - \bar{\alpha} + \text{Red. f. diese Richtung} \\
\text{Man hat also allgemein:} \\
l = \mathfrak{l} + \bar{\alpha}' - \bar{\alpha} + \text{Red. f. diese Richtung.}
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Die Stationsfehlergleichungen geben nun in Verbindung mit der letzten Beziehung die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l|l||l|l||l} l_1 = -e_1 + u_0 + (1) & g_1 & l'_1 = -e'_1 + u'_0 + (1) & g'_1 & \ldots \\ l_2 = -e_2 + u_0 + (2) & g_2 & l'_2 = -e'_2 + u'_0 + (2) & g'_2 & \ldots \\ l_3 = -e_3 + u_0 + (3) & g_3 & l'_3 = -e'_3 + u'_0 + (3) & g'_3 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\}, \quad (7)$$

wenn man die nachstehenden Abkürzungen benutzt:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) = (\bar{\alpha}'_1 + A_0) + Red_1 - \bar{\alpha}_1 & \text{f. d. 1. Richtung} \\ (2) = (\bar{\alpha}'_2 + B_0) + Red_2 - \bar{\alpha}_2 & \text{„ „ 2. „} \\ (3) = (\bar{\alpha}'_3 + C_0) + Red_3 - \bar{\alpha}_3 & \text{„ „ 3. „} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right\}, \quad (8)$$

in denen $\bar{\alpha}'_1 + A_0$, $\bar{\alpha}'_2 + B_0$, $\bar{\alpha}'_3 + C_0$, ... die Ergebnisse der Stationsausgleichungen für die Richtungen bedeuten (§ 12 S. 502).

Bildet man nun nach den Relationen (7) zunächst für *eine* Station durch Quadrieren und Addieren $[llg]$, so folgt, wenn bei llg und eeg nach oberen und unteren Indices summiert wird:

$$\left.\begin{array}{l} [llg] = [eeg] + \{u_0 + (1)\}^2 g_1 + \{u_0 + (2)\}^2 g_2 + \{u_0 + (3)\}^2 g_3 + \cdots \\ \qquad + \{u'_0 + (1)\}^2 g'_1 + \{u'_0 + (2)\}^2 g'_2 + \{u'_0 + (3)\}^2 g'_3 + \cdots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (9)$$

Alle doppelten Produkte fallen hierbei weg, da zufolge der Stationsnormalgleichungen deren Faktoren

$$[e_1 g_1] = [e_2 g_2] = [e_3 g_3] = \ldots$$

sowie

$$[eg] = [e'g'] = [e''g''] = \ldots$$

gleich null sind.

Andrerseits finden für die einzelnen Reihen (also Summierung nach unterem Index allein), die Beziehungen statt:

$$\left.\begin{array}{l} [lg] = u_0 [g] + (1) g_1 + (2) g_2 + (3) g_3 + \cdots \\ [l'g'] = u_0 [g'] + (1) g'_1 + (2) g'_2 + (3) g'_3 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}. \quad (10)$$

Man erhält hieraus leicht die Werte von $[lg]^2 : [g]$, $[l'g']^2 : [g']$, ... und damit für die einzelne Station die Gleichung:

$$[llg] - \frac{[lg]^2}{[g]} - \frac{[l'g']^2}{[g']} - \cdots = \left\{\begin{array}{l} [eeg] + (1)^2 [g_1] + (2)^2 [g_2] + (3)^2 [g_3] + \cdots \\ - \dfrac{\{(1) g_1 + (2) g_2 + (3) g_3 + \cdots\}^2}{[g]} \\ - \dfrac{\{(1) g'_1 + (2) g'_2 + (3) g'_3 + \cdots\}^2}{[g']} - \ldots \end{array}\right\} (11)$$

Dieselbe gilt für jede Station und man hat daher für Teil I, um nicht die l der einzelnen Beobachtungen herstellen zu müssen, die Rechnung wie folgt zu führen. Es ist zu setzen:

$$\mathrm{I}=\left\{\begin{array}{l}\text{Summe aller } [eeg] \text{ für alle Stationen nach Maßgabe aller Stationsausgleichungen}\\ +\left\{\begin{array}{l}\text{Summe aller } (i)^2[g_i] \text{ für alle im Netze beobachteten Richtungen, wobei } [g_i]\\ \text{die Summe der Gewichte aller Einstellungen } der\ i.\ Richtung \text{ bedeutet}\end{array}\right\}\\ -\left\{\begin{array}{l}\text{Summe aller } \dfrac{\{(1)g_1+(2)g_2+(3)g_3+\cdots\}^2}{[g]} \text{ für alle Sätze, wobei } [g]\\ \text{die Summe der Gewichte aller Richtungen } eines\ Satzes \text{ bedeutet.}\end{array}\right\}\end{array}\right\} \quad (12)$$

Sind die Teile I und II und damit $[\lambda\lambda g]$ nach den vorigen Formeln ermittelt, so erhält man damit also $[\lambda\lambda g]$ durch summarische Berechnung; wir denken uns hierbei die $[eeg]$ für die Stationen konsequentermaßen ebenfalls nach den bekannten Summenformeln abgeleitet.

Zur Kontrolle kann man nunmehr, ebenso wie man die $[eeg]$ aus den numerisch im einzelnen ermittelten e berechnen kann, auch $[\lambda\lambda g]$ aus den einzeln berechneten λ ermitteln — oder man kann, um nicht wie bei den e auf die einzelnen Beobachtungen nochmals zurückgehen zu müssen, sich der weiterhin folgenden Kontrollformel bedienen.

Zieht man von jeder Fehlergleichung für λ die entsprechende für e ab, vergl. (6) S. 497 und (7) S. 506, und beachtet die Beziehung von l zu $\mathfrak{l}$, so erhält man für die Richtungssätze irgend einer Station:

$$\left.\begin{array}{l|l||l|l||l}\lambda_1 = e_1 + \delta - (1') & g_1 & \lambda'_1 = e'_1 + \delta' - (1') & g'_1 & \cdots\\ \lambda_2 = e_2 + \delta - (2') & g_2 & \lambda'_2 = e'_2 + \delta' - (2') & g'_2 & \cdots\\ \lambda_3 = e_3 + \delta - (3') & g_3 & \lambda'_3 = e'_3 + \delta' - (3') & g'_3 & \cdots\\ \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots\end{array}\right\}, \quad (13)$$

worin gesetzt ist:

$$\delta = u - u_0; \quad \delta' = u' - u'_0; \cdots \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1') = (1) - (a_1x + b_1y + c_1z + \cdots)\\ (2') = (2) - (a_2x + b_2y + c_2z + \cdots)\\ (3') = (3) - (a_3x + b_3y + c_3z + \cdots)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}. \quad (15)$$

Man erhält nun mittelst der vorigen Gleichungen durch Bildung aller $\lambda\lambda g$ für eine Station, so daſs also die Summen $[\lambda\lambda g]$ und $[eeg]$ sich auf oberen und unteren Index innerhalb einer Station beziehen:

$$[\lambda\lambda g] = \left\{\begin{array}{c}[eeg] + (1')^2[g_1] + (2')^2[g_2] + (3')^2[g_3] + \cdots\\ + \delta^2[g] + \delta'^2[g'] + \cdots\\ - 2(1')[\delta g_1] - 2(2')[\delta g_2] - 2(3')[\delta g_3] - \cdots.\end{array}\right\} \quad (16)$$

Nun ist aber aus den Normalgleichungen für u_0 und u sofort abzuleiten, vergl. (7) S. 497:

$$u_0 = \frac{[gl] - A_0 g_1 - B_0 g_2 - C_0 g_3 - \cdots}{[g]}$$

$$u = \frac{[gl] - (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots) g_1 - (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots) g_2 - (a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots) g_3 - \cdots}{[g]}$$

und hieraus mit Rücksicht auf die (6) und (8):

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{(1')g_1 + (2')g_2 + (3')g_3 + \cdots}{[g]} \\ \text{Ebenso ist:}\quad \delta' &= \frac{(1')g'_1 + (2')g'_2 + (3')g'_3 + \cdots}{[g']} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

u. s. f. für alle anderen Sätze. Mittelst dieser Relationen folgt aber, indem man die Gleichung für δ mit $[g]\delta$, diejenige für δ' mit $[g']\delta'$ multipliziert, u. s. f. und dann addiert:

$$\delta^2[g] + \delta'^2[g'] + \cdots = (1')[\delta g_1] + (2')[\delta g_2] + (3')[\delta g_3] + \cdots. \tag{18}$$

Man erhält sonach für die einzelne Station:

$$[\lambda\lambda g] = \left\{\begin{matrix} [eeg] + (1')^2[g_1] + (2')^2[g_2] + (3')^2[g_3] + \cdots \\ - \dfrac{\{(1')g_1 + (2')g_2 + (3')g_3 + \cdots\}^2}{[g]} - \dfrac{\{(1')g'_1 + (2')g'_2 + (3')g'_3 + \cdots\}^2}{[g']} - \cdots \end{matrix}\right\} \tag{19}$$

Durch Bildung der Summe $[\lambda\lambda g]$ für das ganze Netz ergiebt sich endlich die *Kontrollformel*:

$$[\lambda\lambda g] = \left\{\begin{matrix} \{\text{Summe aller } [eeg] \text{ für alle Stationen; aus den einzelnen } e \text{ zu berechnen}\} \\ + \left\{\begin{matrix}\text{Summe aller } (i')^2[g_i] \text{ für alle Richtungen des Netzes, wobei } [g_i] \\ \text{die Gewichtssumme aller Einstellungen der } i.\text{ Richtung bedeutet}\end{matrix}\right\} \\ - \left\{\begin{matrix}\text{Summe aller } \dfrac{\{(1')g_1 + (2')g_2 + (3')g_3 + \cdots\}^2}{[g]} \text{ für alle Sätze,} \\ \text{wobei } [g] \text{ die Gewichtssumme aller Richtungen eines Satzes ist.}\end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\} \tag{20}$$

§ 14. **Fortsetzung.** Die Funktion von (1), (2), (3) ... in dem Ausdrucke für I nach Formel (12) S. 507) und die ganz ebenso gebildete Funktion von (1'), (2'), (3') .. in dem Ausdrucke für $[\lambda\lambda g]$ nach (20) oben kann man in vielen Fällen mit Nutzen unter Anwendung der *Koefficienten der Stationsnormalgleichungen* bilden.

Setzt man in die nachstehenden Aggregate

$$\left.\begin{matrix} ug_1 + u'g'_1 + \ldots & + A[g_1] \\ ug_2 + u'g'_2 + \ldots & + B[g_2] \\ ug_3 + u'g'_3 + \ldots & + C[g_3] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \end{matrix}\right\}, \tag{1}$$

die Gewichte g, g' .. entsprechend den Richtungssätzen einer Station genommen und unter u, u' .. sowie A, B, C.. vorläufig ganz beliebige Werte verstanden, für u, u' ... die Werte:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{Ag_1 + Bg_2 + Cg_3 + \dots}{[g]} \\ u' &= -\frac{Ag'_1 + Bg'_2 + Cg'_3 + \dots}{[g']} \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

so gehen sie, wie der Vergleich mit (7) bis (9) S. 497 u. 498 zeigt, in nachstehende Aggregate über:

$$\left.\begin{matrix} (\mathfrak{a}\mathfrak{a})\,A + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,B + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,C + \dots \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,A + (\mathfrak{b}\mathfrak{b})\,B + (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,C + \dots \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,A + (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,B + (\mathfrak{c}\mathfrak{c})\,C + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right\}, \qquad (3)$$

deren Koefficienten völlig mit denen der Stationsnormalgleichungen übereinstimmen. Multipliziert man nun die Aggregate in beiden Formen mit $A, B, C \dots$ der Reihe nach, addiert sie dann und eliminiert aus der 1. Form $u, u' \dots$ mittelst der (2), so wird erhalten:

$$\left.\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} A^2[g_1] + B^2[g_2] + C^2[g_3] + \dots \\ -\dfrac{\{Ag_1 + Bg_2 + Cg_3 + \dots\}^2}{[g]} \\ -\dfrac{\{Ag'_1 + Bg'_2 + Cg'_3 + \dots\}^2}{[g']} \\ - \dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right\} = \\ = \left\{\begin{matrix} A\{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})\,A + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,B + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,C + \dots\} \\ +B\{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,A + (\mathfrak{b}\mathfrak{b})\,B + (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,C + \dots\} \\ +C\{(\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,A + (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,B + (\mathfrak{c}\mathfrak{c})\,C + \dots\} \\ + \dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}. \qquad (4)$$

Hierin kann man für die noch willkürlichen Werte $A, B, C \dots$ setzen:

$$A = (1) \quad B = (2) \quad C = (3) \dots \qquad (5)$$

oder

$$A = (1') \quad B = (2') \quad C = (3') \dots \qquad (6)$$

und erhält damit Formeln zur stationsweisen Berechnung der betreffenden Glieder der Formeln (12) S. 507 und (20) S. 508. Die Stationsnormalgleichungen sind hierbei in der Form (9) S. 498 vorausgesetzt, wie es für die Bildung der zur gesamten Netzausgleichung gehörigen allgemeinen Normalgleichungen nach § 10 nötig ist.

An diese Form ist man aber nicht gebunden, sondern kann auch die *Bessel*sche Form anwenden. Zieht man, um dies nachzuweisen, von dem Ausdrucke rechter Hand in (4) den Ausdruck ab:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad A\{(\mathfrak{aa})A+(\mathfrak{ab})A+(\mathfrak{ac})A+\dots\} \\ +B\{(\mathfrak{ab})A+(\mathfrak{bb})A+(\mathfrak{bc})A+\dots\} \\ +C\{(\mathfrak{ac})A+(\mathfrak{bc})A+(\mathfrak{cc})A+\dots\} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

d. h. null, und setzt man dann $B-A=B'$, $C-A=C'\dots$, so folgt der gleichwertige Ausdruck:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad B'\{(\mathfrak{bb})B'+(\mathfrak{bc})C'+\dots\} \\ +C'\{(\mathfrak{bc})B'+(\mathfrak{cc})C'+\dots\} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}, \tag{7}$$

wie man successive mit Rücksicht auf die Beziehungen $(\mathfrak{aa})+(\mathfrak{ab})+(\mathfrak{ac})+\dots=0$, $(\mathfrak{ab})+(\mathfrak{bb})+(\mathfrak{bc})+\dots=0$, u. s. f., ohne Mühe findet.

Dieses zeigt, dafs man auch mit den Koefficienten der *Bessel*schen Stationsnormalgleichungen rechnen kann, wenn man in (4) rechter Hand den gleichwertigen Ausdruck (7) einführt und darin setzt:

$$\left.\begin{array}{lll} B'=(2)-(1) & C'=(3)-(1)\dots & \text{für die Anwendung auf (12) S. 507} \\ B'=(2')-(1') & C'=(3')-(1')\dots & \text{„ „ „ „ (20) S. 508.} \end{array}\right\} \tag{8}$$

Nunmehr ergiebt sich mittelst der Koefficienten der reducierten Normalgleichungen endlich noch eine 3. Form der rechten Seite in (4) (*Ausgleichungsrechnung* S. 101). Man kann nämlich anstatt (7) schreiben:

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{bb})\left\{B'+\frac{(\mathfrak{bc})}{(\mathfrak{bb})}C'+\frac{(\mathfrak{bd})}{(\mathfrak{bb})}D'+\cdots\right\}^2 \\ \qquad +(\mathfrak{cc}.1)\left\{C'+\frac{(\mathfrak{bd}.1)}{(\mathfrak{cc}.1)}D'+\cdots\right\}^2 \\ \qquad\qquad +(\mathfrak{dd}.2)\{D'+\cdots\}^2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \end{array}\right\}, \tag{7*}$$

für welche, durch successive Elimination aus (7) in bekannter Weise abzuleitende Umformung wir den Nachweis übergehen.

Mit dem letzten Ausdruck sind wir bei dem, *den einzelnen Stationsmessungen äquivalenten System von Winkelfunktionen* angelangt. Ein Vergleich mit *Ausgleichungsrechnung* S. 166 (5) wird zeigen, dafs die geschlungenen Parenthesen der einzelnen Zeilen des Ausdrucks (7*), wenn man für B', C', $D'\dots$ die Zahlwerte zufolge einer Stationsausgleichung setzt, ein dem Komplex der Stationsmessung äquivalentes System von Funktionen der Winkel zwischen der 1. und den anderen Richtungen vorstellen. Wendet man aber die 1. Reihe der Substitutionen (8) an, so erhält man die negativen Änderungen dieser Funktionen durch Einführung der Näherungswerte $\bar{\alpha}$ und der Reduktionen beim Übergang zur Netzausgleichung. Setzt man dagegen

die 2. Substitutionen (8), so erhält man die negativen Verbesserungen derselben Funktionen zufolge der Netzausgleichung. Der Ausdruck (7*) stellt dann die in ihre Gewichte multiplizierte Quadratsumme dieser Verbesserungen vor.

§ 15. Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit; allgemeine Bemerkungen. Das angegebene Ausgleichungsverfahren gilt nicht nur, wenn die $g = 1$ oder null sind, sondern allgemein; es setzt aber voraus, dafs erhebliche Fehlerquellen bei der Netzausgleichung nicht hervortreten, dafs also die Beobachtungsfehler nicht zum Teil durch konstant oder systematisch wirkende Ursachen erzeugt werden. Wir gehen hier auf die in dieser Beziehung bemerkenswerten Fragen: wie im letzteren Falle die Ausgleichung zu modificieren wäre, ob und wann für einzelne Richtungen oder Messungen überhaupt ungleiche Gewichte einzuführen sind und welches die Bedeutung der aus der Ausgleichung folgenden mittleren Fehler ist, nicht ein.*) Wir erwähnen nur die rein formelle Beziehung, dafs der m. F. der Gewichtseinheit für die einzelne Station zufolge der Stationsausgleichung sich mittelst des zugehörigen $[eeg]$ nach der bekannten Formel ergiebt:

$$\pm\sqrt{\frac{[eeg]}{R - S - m + 1}}, \tag{1}$$

worin R die Anzahl der Richtungsbeobachtungen, S die Anzahl der Sätze und m die Anzahl der Richtungen bedeutet.

Die Widersprüche der Netzausgleichung allein geben als m. F. der Gewichtseinheit:

$$\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g] - [eeg]}{M - 3N + F + G + 3}}, \tag{2}$$

worin M die Anzahl der Richtungen von den $N - F$ Standpunkten nach den N Netzpunkten überhaupt und G die Anzahl der Grundlinien bedeutet. Aus (1) und (2) zusammen folgt endlich durch Addition der Zähler und Nenner:

$$\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{[R] - [S] - 2N + M - [m] + G + 3}}. \tag{3}$$

Die Nenner entsprechen in jedem Falle der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen (*Ausgleichungsrechnung* S. 208 und 325**)).

*) Über diese Fragen vergl. die erwähnten *Abhandlungen* von *Schreiber* und das mehrgenannte Referat über die *Dänische Gradmessung,* sowie diese selbst.

**) Bezüglich unserer Formel für die Anzahl der Winkelgleichungen ebenda S. 326 sei hier beiläufig ergänzend bemerkt, dafs sie zufolge ihrer Ableitung nur für den Fall gilt, wo jeder Standpunkt wenigstens mit 2 anderen solchen durch gegenseitige Richtungen verbunden ist. Dies ist allerdings in guten Dreiecksnetzen immer der Fall.

Bei ihrer Bildung ist natürlich angenommen, dafs solche Punkte nicht als Netzpunkte gezählt sind, welche nicht in die Netzausgleichung aufgenommen wurden resp. werden konnten, gleichwohl aber in den Stationsausgleichungen vorkommen. Wenn dergleichen überhaupt nicht vorhanden sind, so ist $M - [m] = 0$.

Die in den letzten Paragraphen angegebene Ausgleichungsmethode wird zwar bei einfachen Ketten komplizierter als die übliche nach bedingten Beobachtungen, aber sie gestattet mit Leichtigkeit den *Zusammenschlufs verschiedener Netze*, welche in gemeinsamen Punkten zusammentreffen, nicht blos in der Weise, dafs die Resultate der Einzelausgleichungen einiger Netze ganz oder teilweise beibehalten werden, sondern auch so, dafs der Gesamtkomplex eine Ausgleichung aus einem Gusse erfährt.

Zu letzterem Zwecke ist aus den Normalgleichungen der verschiedenen Netzteile durch Addition derjenigen Gleichungen, welche derselben Unbekannten angehören, ein *Hauptsystem* zu bilden. Der Übersichtlichkeit wegen wird man jene Addition erst vornehmen, nachdem bereits die Unbekannten, welche nicht in mehreren Netzteilen erscheinen, eliminiert sind: ein Verfahren, welches ganz streng ist.

Wie sich die Ausgleichung gestaltet, wenn die Resultate der Ausgleichung der Einzelnetze teilweise beibehalten werden sollen, bedarf ebenso wenig der Besprechung, wie die bereits erwähnte Einschaltung von Punkten in ein fertiges Netz, da hier das allgemeine Verfahren keine weitere Änderung erleidet, als dafs einzelne Unbekannte *gegebene* Werte annehmen.

---

12. Kapitel.

Messungen auf der physischen Erdoberfläche und näherungsweise Bestimmung einzelner Teile des Geoids.

§ 1. **Referenzellipsoid und Lotabweichung.** Bei allen Betrachtungen seit S. 134 ist angenommen worden, dafs die Lotrichtungen der geodätischen Operationspunkte auf der physischen Erdoberfläche die geradlinigen Lotlinien einer mathematischen Erdoberfläche seien, welche die Gestalt eines schwachabgeplatteten Rotationsellipsoids hat. Indes schon Kapitel 1 u. 2 der Einleitung setzen aus einander, inwiefern dies irrig ist. Darnach besitzen weder die mathematische Erdoberfläche, noch überhaupt Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche jene Form in Strenge, sondern nur angenähert. Auch

haben diese Niveauflächen nicht genau parallele Lage zu einander, weshalb die Lotlinien schwach gekrümmt sind und von Lotrichtungen bei mathematischen Auseinandersetzungen unterschieden werden müssen.

Wenn nun also bisher für die Reduktion der geodätischen Messungen ein solches Rotationsellipsoid vorausgesetzt wurde, so ist das keinesfalls streng. Aber die Unbekanntschaft mit der genaueren Gestaltung der Niveauflächen nötigt vorerst dazu, auch in der Praxis jene Voraussetzung zu machen: es ist eine 1. Annäherung.

Nehmen wir indessen einmal an, dafs die Figur der Niveauflächen und demgemäfs auch der Verlauf der Lotlinien bekannt seien. Wie würde man alsdann die geodätischen Messungen auf der physischen Erdoberfläche reduzieren? Würde man insbesondere auf eine der Niveauflächen reduzieren?

Hier lautet die Antwort: Nein. Wie schon in der Einleitung erwähnt, besitzen das Geoid und ebenso alle der physischen Erdoberfläche benachbarten Niveauflächen aufser kontinentalen rasch wechselnde lokale Unregelmäfsigkeiten. Diese letzteren äufsern sich namentlich als beträchtliche Variationen der Gröfse der Krümmungsradien, wobei Diskontinuitäten oder kontinuirliche Variationen, die praktisch solchen gleich zu achten, nicht ausgeschlossen sind. Die lokale Veränderlichkeit ist der Geschwindigkeit nach dieselbe, wie bei einem Hügelland, ohne dafs es indes zur Bildung von Thälern (Konkavitäten) kommt, weil der Krümmungsradius voraussichtlich doch stets nach innen gerichtet bleibt.

Solche unregelmäfsige Flächen eignen sich nicht zur bequemen mathematischen Behandlung. Namentlich würden Reihenentwicklungen, wie bereits S. 22 bemerkt wurde, schon für kurze geodätische Linien von der Länge der Dreiecksseiten 1. Ordnung ganz unpraktikabel, ja zum Teil unmöglich werden, da auf solche Strecken bereits zahlreiche Variationen der Krümmung stattfinden.

Man hat allerdings die Formeln der Geodäsie zum Teil für beliebige Flächen entwickelt, u. a. diejenigen für geodätische Dreiecke und für die Abweichung des vertikalen Schnitts von der geodätischen Linie. Allein für wirkliche Niveauflächen sind diese Entwicklungen gänzlich wertlos, da sie viel zu wenig Glieder haben und oftmals nicht konvergieren würden. (Ebenso wertlos sind natürlich die Schlüsse, welche aus jenen Entwicklungen für die Allgemeingültigkeit der üblichen geodätischen Methoden gezogen worden sind.)

Die mathematische Behandlung verlangt eine einfache Fläche und, wie früher bemerkt, genügt das schwach abgeplattete Rotationsellipsoid nicht nur, sondern ist auch trefflich geeignet wegen seiner be-

quemen Formeln. Der Einwand, welcher sich gegen seine Anwendung erheben läfst, dafs ein nichthomogener, flüssiger Körper keine rotationsellipsoidischen Niveauflächen hat, also selbst in diesem Idealfalle gerade durch die Einführung des Ellipsoids Lotabweichungen rechnungsmäfsig entstehen, kommt dagegen gar nicht in betracht, weil die thatsächlichen Verhältnisse der Massenlagerung weit gröfsere Lotabweichungen erzeugen.

Das Ellipsoid nun, welches an Stelle der mathematischen Erdoberfläche als Projektionsfläche dient, nennen wir im allgemeinen ein *Referenzellipsoid.* Es ist nämlich keineswegs zu verwechseln mit einem sich dem Geoid überhaupt möglichst anschmiegenden *günstigsten Rotationsellipsoid*, dessen Axe in die Erdaxe, dessen Mittelpunkt in den Erdschwerpunkt fällt: dem *Erdellipsoid.* Es ist vielmehr, was später klar werden wird, nur ein solches, dessen Axe bei unbestimmtem Abstand von der Erdaxe parallele Lage zu dieser hat, und welches ferner in der Gegend der betreffenden geodätischen Operationen (in weiter zu erörternder Weise) dem Geoid nahe liegt und es schneidet.

Die Lotrichtung eines geodätischen Punktes weicht nun von der Lotlinie des Referenzellipsoids, welche durch ihn hindurchführt, ab um die *Lotabweichung.* Diese Lotabweichungen sind selbstverständlich verschieden je nach der Wahl der Dimensionen des Ellipsoids, sowie seiner Lage und sie dürfen nicht mit den Lotabweichungen gegen die Lotlinien des am besten anschliefsenden obengenannten Ellipsoids (des Erdellipsoids) verwechselt werden, die wir als *absolute* Lotabweichungen oder auch als *Lotablenkungen* bezeichnen dürfen, wenn es gilt, sie von jenen zu unterscheiden, die nur *relative* sind.

Im allgemeinen halten wir die Bezeichnung Lotabweichung für die zutreffendste, weil sie die Meinung ausschliefst, als habe man es nur mit der Wirkung lokaler Massenunregelmäfsigkeiten zu thun.

§ 2. **Reduktion der Horizontalwinkel.** Indem wir jetzt voraussetzen, dafs die Lotabweichungen der geodätischen Operationspunkte auf der physischen Erdoberfläche gegen ein Referenzellipsoid bekannt seien, lassen sich die Gröfsen ermitteln, welche an den gemessenen Horizontalwinkeln angebracht werden müssen, um sie auf die Vertikalschnitte beziehen zu können, die ihre durch die ellipsoidischen Lotlinien auf dem Ellipsoid entstehend Projektionen verbinden.

Um den Standpunkt P_1 auf der physischen Erdoberfläche legen wir eine Hilfskugel von beliebigem Radius, der als Einheit der Längen dient und verschieben alle in betracht kommenden Geraden parallel durch P_1. Fig. 41 zeigt die Durchschnitte dieser Parallelen mit der Oberfläche der Hilfskugel; die Bögen gröfsten Kreises zwischen den-

selben geben die Winkel zwischen den Linien, und die Winkel zwischen den größten Kreisen geben die Flächenwinkel an. Insbesondere stellt Z den Durchschnitt der Lotlinie des Ellipsoids, welche durch P_1 führt, vor und Z' den Durchschnitt der wirklichen Lotrichtung in P_1. Ersteres ist das *ellipsoidische Zenith*, letzteres das *wirkliche Zenith* von P_1 an der Hilfskugel (Himmelskugel).

N sei ferner der Nordpol, als Durchschnitt des *nördlichen* Endes einer Parallelen durch P_1 zur Axe des Referenzellipsoids, die wir der Erdaxe parallel voraussetzen, mit der Hilfskugel, und P_2 bezeichne den Durchschnitt der scheinbaren Richtung (d. i. der letzten Tangente des Lichtstrahls) von P_1 nach P_2 mit der Hilfskugel.

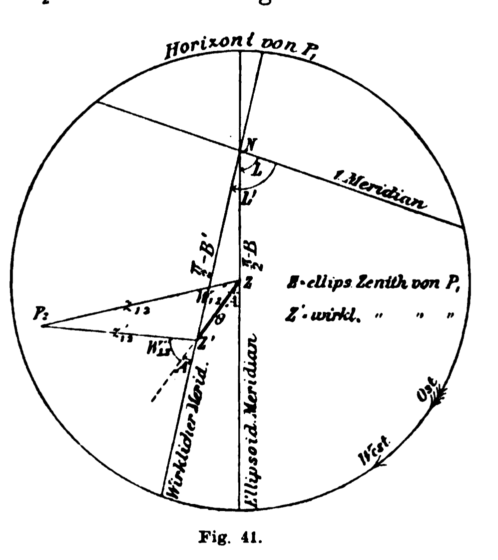


Fig. 41.

Im übrigen werden die Bezeichnungen an den Linien von Fig. 41 verständlich sein.

$ZZ' = \Theta$ bezeichnet die Lotabweichung; sie hat das ellipsoidische Azimut A und das wirkliche Azimut $180^0 + A'$.

$A + W_{1.2}$ ist das ellipsoidische Azimut der scheinbaren Richtung nach dem Objekt P_2 und $A' + W'_{1.2}$ ist das entsprechende wirkliche Azimut.

$z_{1.2}$ ist die ellipsoidische Zenithdistanz, $z'_{1.2}$ ist die wirkliche Zenithdistanz der scheinbaren Richtung nach P_2. Denkt man sich in Fig. 41 noch die scheinbare Richtung nach einem andern Objekt P_3 angegeben, so wird $A + W_{1.3}$ das ellipsoidische, $A' + W'_{1.3}$ das wirkliche Azimut der scheinbaren Richtung nach dem Objekt P_3. Es ist daher die Reduktion des gemessenen Horizontalwinkels $\binom{P_2 P_3}{P_1}$ auf die ellipsoidische Lotlinie gleich

$$(W_{1.3} - W_{1.2}) - (W'_{1.3} - W'_{1.2}) \text{ oder } (W_{1.3} - W'_{1.3}) - (W_{1.2} - W'_{1.2}). \quad (1)$$

Das sphärische Dreieck $ZZ'P_2$ giebt nun ohne weiteres nach der 1. *Neper*schen Analogie S. 78 (6) folgende Gleichung zur Bestimmung von $W_{1.2} - W'_{1.2}$:

$$\tan\frac{z_{1.2} + z'_{1.2}}{2} = \frac{\sin\dfrac{W''_{1.2} + W'_{1.2}}{2}}{\sin\dfrac{W'_{1.2} - W'_{1.2}}{2}} \tan\frac{\Theta}{2}. \quad (1)$$

Hieraus folgt:

$$\sin\frac{W'_{1.2}-W_{1.2}}{2}=\tan\frac{\Theta}{2}\sin\frac{W'_{1.2}+W_{1.2}}{2}\cot\frac{z'_{1.2}+z_{1.2}}{2} \tag{2}$$

oder in stets ausreichender Annäherung:

$$W_{1.2}-W'_{1.2}=-\Theta\cot z'_{1.2}\sin W'_{1.2}+\cdots. \tag{3}$$

Wenn man das wirkliche Azimut von P_2 in P_1 mit $a'_{1.2}$ bezeichnet, so kann man noch schreiben:

$$W_{1.2}-W'_{1.2}=-\Theta\cot z'_{1.2}\sin(a'_{1.2}-A')+\cdots. \tag{4}$$

Zur *Reduktion des Horizontalwinkels* $\left(\begin{smallmatrix}P_2 P_3\\ P_1\end{smallmatrix}\right)$ auf die ellipsoidische Lotlinie hat man hiernach den Ausdruck:

$$\Theta\left(\cot z'_{1.2}\sin(a'_{1.2}-A')-\cot z'_{1.3}\sin(a'_{1.3}-A')\right)+\cdots, \tag{5}$$

wobei man Θ in Sekunden nehmen mufs, um die Reduktion in Sekunden zu erhalten.

Die Auflösung der Sinus in (5) giebt für die Reduktion anstatt (5) den Ausdruck:

$$\left\{\begin{array}{l}\quad\xi(\cot z'_{1.2}\sin a'_{1.2}-\cot z'_{1.3}\sin a'_{1.3})\\ -\eta(\cot z'_{1.2}\cos a'_{1.2}-\cot z'_{1.3}\cos a'_{1.3})+\cdots\end{array}\right\}, \tag{6}$$

wobei gesetzt sind:

$$\Theta\cos A'=\xi \qquad \Theta\sin A'=\eta. \tag{7}$$

Nachdem vorstehende Reduktion (6) am Horizontalwinkel angebracht ist, bezieht sich derselbe auf die Voraussetzung, dafs in P_1 die Vertikalaxe des Theodolits der ellipsoidischen Lotrichtung folgt, und es ist strenggenommen noch wegen Lateralrefraktion zu korrigieren (S. 489).

Damit aber der Winkel dem Flächenwinkel zwischen den Vertikalschnitten entspricht, welche von der durch die ellipsoidische Lotlinie bewirkten Projektion des Punktes P_1 nach den entsprechenden Projektionen der Punkte P_2 und P_3 gehen, mufs noch weiter korrigiert werden, wie früher fürs Ellipsoid schon angegeben ist, wegen der Höhe der Objekte P_2 und P_3 über dem Ellipsoid (die Reduktion darf also nicht mittelst der Meereshöhe der Objekte erfolgen). Die Höhe des Standpunkts P_1 aber ist gleichgültig.

Aufserdem ist, wie früher angegeben, eventuell der Übergang von den Vertikalschnitten zu den geodätischen Linien zu bewirken.

Dies ist der Theorie nach die Reihe der Reduktionen. In der Praxis treten aber erhebliche Vernachlässigungen ein, worüber weiterhin mehr.*)

§ 3. Reduktion der Azimute, geographischen Breiten und Längen. Das sphärische Dreieck NZZ' giebt zunächst zur Entwicklung der Differenz $A - A'$ mittelst der 1. *Neper*schen Analogie S. 78 (6):

$$\cot \frac{B' + B}{2} = \frac{\sin \frac{A + A'}{2}}{\sin \frac{A - A'}{2}} \tan \frac{\Theta}{2} \tag{1}$$

oder

$$\sin \frac{A - A'}{2} = \tan \frac{\Theta}{2} \tan \frac{B' + B}{2} \sin \frac{A' + A}{2}. \tag{2}$$

Hieraus folgt stets ausreichend genau, insofern starke Annäherungen an die Pole in Wirklichkeit gegenwärtig ausgeschlossen sind und bei dem geringen Betrage von Θ daher $\sin(A - A')$ stets sehr klein bleiben wird:

$$A - A' = \Theta \tan B' \sin A' + \cdots. \tag{3}$$

Nun ist aber das wirkliche Azimut von P_2 in P_1, d. h. $a'_{1.2}$, gleich $A' + W'_{1.2}$ und das entsprechende ellipsoidische Azimut $a_{1.2}$ gleich $A + W_{1.2}$. Man hat daher als *Reduktion des wirklichen aufs ellipsoidische Azimut* den Wert

$$a_{1.2} - a'_{1.2}, \text{ d. i. } (A - A') + (W_{1.2} - W'_{1.2})$$

oder

$$\Theta\,(\tan B' \sin A' - \cot z' \sin(a'_{1.2} - A')) + \cdots. \tag{4}$$

Dafür kann man mit Rücksicht auf die (7) oben auch schreiben:

$$-\,\xi \cot z' \sin a'_{1.2} + \eta\,(\tan B' + \cot z' \cos a'_{1.2}) + \cdots. \tag{5}$$

Es mag hierbei noch bemerkt werden, dafs die Azimute ebenso wie die Horizontalwinkel strenggenommen wegen Lateralrefraktion zu korrigieren sind, und dafs ferner, insoweit es sich um irdische Objekte handelt, wegen der Höhe derselben über dem Referenzellipsoid und eventuell wegen des Übergangs von dem Vertikalschnitt zur geodätischen Linie zu reduzieren ist.

---

*) Es kann gleich hier bemerkt werden, dafs eigentlich die Korrektion wegen Lateralrefraktion zu *beginnen* hätte. Da man sie aber doch nur nach der Voraussetzung einer ellipsoidischen Gestalt der Geoidfläche in Rechnung ziehen kann, so geht die Reduktion wegen Lotabweichung ganz passend voran

In Bezug auf die geographische Breite giebt Fig. 41 Dreieck NZZ' unter Anwendung der 2. *Neper*schen Analogie S. 78 (6) die Gleichung:

$$\tan\frac{B'-B}{2} = -\frac{\cos\frac{A+A'}{2}}{\cos\frac{A-A'}{2}}\tan\frac{\Theta}{2}. \tag{6}$$

Hieraus folgt, abgesehen von der Nähe der Pole, in völlig ausreichender Annäherung, als *Reduktion der wirklichen geographischen Breite auf die ellipsoidische Breite:*

$$B - B' = +\Theta\cos A' + \cdots = +\xi + \cdots. \tag{7}$$

Für den Längenunterschied, abgerechnet von irgend einem 1. Meridian, erhält man aus dem Dreieck NZZ':

$$\sin(L' - L) = \sin\Theta\frac{\sin A}{\cos B'}. \tag{8}$$

Es ist daher in stets ausreichender Näherung, wobei nur wieder die nächste Nähe der Pole ausgeschlossen ist, die *Reduktion der wirklichen geographischen Länge auf die ellipsoidische:*

$$L - L' = -\Theta\sin A\sec B' + \cdots = -\eta\sec B' + \cdots. \tag{9}$$

Man wird bemerken, dafs die Reduktionen in Azimut und in geographischer Länge wesentlich bezw. ausschliefslich von η, der westlichen Komponente der Lotabweichung Θ, dagegen sehr wenig oder gar nicht von ξ, der südlichen, abhängen. Hierdurch ist ein wertvoller Zusammenhang beider Reduktionen gegeben, der sich weiterhin fruchtbar erweisen wird.

§ 4. Reduktion der Zenithdistanzen; trigonometrische Höhenmessung.

Das sphärische Dreieck $ZZ'P_2$ in Fig. 41 giebt:

$$\cos z_{1.2} = \cos z'_{1.2}\cos\Theta - \sin z'_{1.2}\sin\Theta\cos W'_{1.2}. \tag{1}$$

Hieraus folgt:

$$\cos z_{1.2} - \cos z'_{1.2} = -\sin\Theta\sin z'_{1.2}\cos W'_{1.2} - 2\sin^2\frac{\Theta}{2}\cos z'_{1.2};$$

so lange nun als z' sich auf irdische Objekte bezieht, also keinesfalls klein ist, kann man in ausreichender Näherung hiernach zur Reduktion der wirklichen auf die ellipsoidische Zenithdistanz setzen:

$$z_{1.2} - z'_{1.2} = +\Theta\cos W'_{1.2} + \cdots = \Theta\cos(a'_{1.2} - A') + \cdots,$$

oder

$$z_{1.2} - z'_{1.2} = \xi\cos a'_{1.2} + \eta\sin a'_{1.2} + \cdots. \tag{2}$$

Indem aber $z'_{1.2}$ die beobachtete Zenithdistanz bezeichnet, ist dieselbe behufs Anwendung auf eine trigonometrische Höhenmessung erstens wegen Höhenrefraktion, zweitens nach Formel (2) zu verbessern. Die erstere Korrektion wird man wie gewöhnlich auf die Form $\frac{1}{2}\, k_1 \gamma'$ bringen können, worin k_1 den Refraktionskoefficienten in P_1 und γ' den Konvergenzwinkel zwischen den Lotrichtungen in P_1 und P_2 bezeichnet. Den Koefficienten k_1 nehmen wir vorläufig als bekannt an.

Um nun zunächst zu einer Figur zu gelangen, erinnern wir uns, dafs die ellipsoidischen Lotlinien sich im allgemeinen nicht schneiden und zwischen P_1 und P_2 keine gemeinsame Vertikalebene existiert. Als Bildfläche benutzen wir daher eine Ebene, die parallel zu beiden ellipsoidischen Lotlinien inmitten zwischen ihnen liegt und projicieren darauf die Lotlinien.

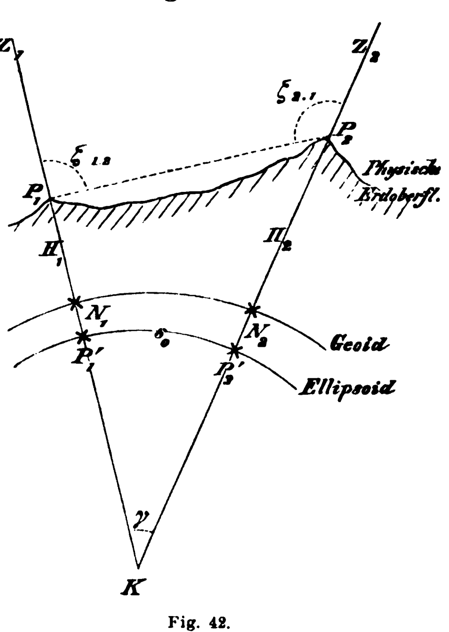


Fig. 42.

Die auf diesen Lotlinien abgemessenen Strecken H und N (Fig. 42) projicieren sich natürlich richtig, ebenso γ, der Winkel zwischen denselben; nicht ganz korrekt ist es dagegen, den Bogen s_0 der Fig. 42 als Länge der geodätischen Linie zwischen P'_1 und P'_2 zu nehmen, und ebenso wenig ist der mit $\zeta_{1.2}$ bezeichnete Winkel genau gleich $\zeta_{1.2}$, der von Refraktion befreiten ellipsoidischen Zenithdistanz. Da aber die Entfernung der Punkte $P_1 P_2$ im vorliegenden Falle stets eine im Vergleiche zu a_0 kleine sein wird, so wird auch der kleinste Abstand der ellipsoidischen Lotlinien klein sein im Verhältnis zu $P'_1 P'_2$.*) Da sie also verhältnismäfsig sehr dicht an der Projektionsebene gelegen sind, ergiebt sich leicht weiter, dafs man ohne merkbaren Fehler in Fig. 42

*) Mit Rücksicht auf S. 137 (9) und Fig. 10, sowie nach S. 41 (9) folgt näherungsweise als kleinster Abstand der Lotlinien, abgesehen vom Zeichen:

$$\mathfrak{a} \cos^2 B \sin 2a \,.\, s_0 \,,$$

worin B und a mittlere geographische Breite und mittleres Azimut sind, $\mathfrak{a}$ aber die Abplattung bezeichnet. Der Abstand ist sonach sicher kleiner als $\frac{1}{300}$ der Distanz und der Neigungswinkel der Linien $P_1 P_2$ und s_0 zur Projektionsebene beträgt im Maximum kaum $\frac{1}{5}''$.

s_0 in der That als geodätischen Abstand $P_1'P_2'$ auf dem Referenzellipsoid und Winkel $Z_1P_1P_2$ als $\zeta_{1.2}$ bezeichnen darf.

Das Dreieck P_1P_2K giebt nun nach dem Tangentensatz der ebenen Trigonometrie:

$$(P_2K - P_1K) : (P_2K + P_1K)$$
$$= \tan\frac{1}{2}(\zeta_{2.1} - \zeta_{1.2}) : \tan\left(180^0 - \frac{1}{2}(\zeta_{2.1} + \zeta_{1.2})\right), \tag{3}$$

oder mit Rücksicht darauf, dafs $\zeta_{2.1} = \gamma + 180^0 - \zeta_{1.2}$ ist:

$$(H_2 - H_1) + (N_2 - N_1)$$
$$= 2\left(\varrho_{1.2} + \frac{1}{2}(H_2 + H_1 + N_2 + N_1)\right)\tan\frac{1}{2}\gamma\tan\frac{1}{2}(\zeta_{2.1} - \zeta_{1.2}) - E_{2.1}. \tag{4}$$

Hierin bezeichnet das Glied $E_{2.1}$ die Differenz $P_2'K - P_1'K$, welche von den Autoren gewöhnlich gleich null angesetzt wird.

$\varrho_{1.2}$ ist für das arithmetische Mittel von $P_2'K$ und $P_1'K$ eingeführt; man kann offenbar in grofser Annäherung setzen:

$$s_0 = \gamma\varrho_{1.2}\,.$$

Setzen wir noch für $\tan\frac{1}{2}\gamma$ die Reihenentwicklung und eliminieren auch im letzten Faktor $\zeta_{2.1}$, so folgt als Formel für sogenannte einseitige Zenithdistanzen:

$$\left.\begin{aligned}
&(H_2 - H_1) + (N_2 - N_1) = s_m\left(1 + \frac{1}{12}\frac{s_0^2}{\varrho_{1.2}^2}\right)\cot\left(\zeta_{1.2} - \frac{1}{2}\gamma\right) - E_{2.1} + \cdots\\
&\text{wobei}\\
&\qquad s_m = s_0\left(1 + \frac{H_1 + H_2 + N_1 + N_2}{2\varrho_{1.2}}\right)\\
&\qquad \underset{\text{in Sek.}}{\gamma} = \varrho''\,\frac{s_0}{\varrho_{1.2}},\\
&\qquad \zeta_{1.2} = z_{1.2}' + \frac{1}{2}k_1\gamma' + \xi_1\cos a_{1.2}' + \eta_1\sin a_{1.2}' + \cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

An ξ und η sind hier die Indices 1 angebracht, um anzudeuten, dafs sie die Komponenten der Lotabweichung im Standpunkte P_1 bezeichnen.

Man erhält ferner als Formel für gegenseitige Zenithdistanzen:

$$\left.\begin{aligned}
&(H_2 - H_1) + (N_2 - N_1) = s_m\left(1 + \frac{1}{12}\frac{s_0^2}{\varrho_{1.2}^2}\right)\tan\frac{1}{2}(\zeta_{2.1} - \zeta_{1.2}) - E_{2.1}\\
&\text{mit}\\
&\qquad s_m = s_0\left(1 + \frac{H_1 + H_2 + N_1 + N_2}{2\varrho_{1.2}}\right)\\
&\zeta_{2.1} - \zeta_{1.2} = z_{2.1}' - z_{1.2}' + \left\{\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(k_2 - k_1)\gamma'\\ &+ \xi_2\cos a_{2.1}' + \eta_2\sin a_{2.1}'\\ &- \xi_1\cos a_{1.2}' - \eta_1\sin a_{1.2}' + \cdots\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Um noch γ' zu erhalten, beachten wir die der Gleichung $\zeta_{1.2} + \zeta_{2.1} - 180^0 = \gamma$ entsprechende Gleichung $\zeta'_{1.2} + \zeta'_{2.1} - 180^0 = \gamma'$. Darnach hat man:

$$\gamma' = \gamma - \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \cos \alpha'_{1.2} + \eta_1 \sin \alpha'_{1.2} \\ + \xi_2 \cos \alpha'_{2.1} + \eta_2 \sin \alpha'_{2.1} \end{array} \right\} + \cdots. \tag{7}$$

In (6) und (7) bezeichnen ξ_2 und η_2 die Komponenten der Lotabweichung in P_2. s_m aber, welche Gröfse in (5) und (6) zur Abkürzung eingeführt ist, entspricht offenbar sehr nahe der horizontalen Entfernung von P_1 und P_2, gemessen in einer in mittlerer Höhe zwischen beiden Punkten gelegenen Niveaufläche.

Die Formeln (5) und (6) zeigen, dafs auf eine trigonometrische Höhenmessung nicht nur die Lotabweichungen, sondern auch die Abstände des Referenzellipsoids vom Geoid Einflufs haben. Betrachtet man aufser den Lotabweichungen die H, welche von den Meereshöhen (S. 8) nicht merklich verschieden sein werden, als bekannt, so würden nach (5) und (6) Zenithdistanzmessungen dazu dienen können, die Abstände N des Referenzellipsoids vom Geoid (bis auf eine Konstante) zu bestimmen, wenn eine ausreichende Kenntnis der Refraktionskoefficienten zu erlangen wäre, woran es jedoch gerade fehlt. Es soll dieses hier aber nicht weiter ausgeführt werden, vielmehr versparen wir die weitere Ausführung auf Teil II dieses Buches, weil insbesondere die Theorie der Refraktion wesentlich physikalischer Natur ist.

Wir werden dann auch das kleine Ergänzungsglied $E_{2.1}$ behandeln.

§ 5. **Die Reduktion der Basis eines Dreiecksnetzes.** Die Grundlinie hat in der Regel nur eine im Verhältnis zu a_0 sehr kleine Länge, meist kaum 10^{km}. Da aufserdem aus praktischen Gründen die physische Erdoberfläche wenigstens in roher Annäherung in der Richtung der Basis eben sein mufs, so kann man ohne weiteres annehmen, dafs die Messung in einer der beiden *ellipsoidischen* Vertikalebenen durch die Punkte $P_1 P_2$ erfolge, welche überdies für den vorliegenden Zweck als zusammenfallend angesehen werden können.

Denkt man sich nämlich von P_1 oder P_2 aus die Mefsstangen eingerichtet, so erfolgt die Messung strenggenommen in einer der beiden *wirklichen* Vertikalebenen entlang der physischen Erdoberfläche; eine der Lotabweichung entsprechende Drehung der Vertikalebene um die Gerade $P_1 P_2$ giebt aber keine merklich andere Profillinie auf der physischen Erdoberfläche, da dieselbe wegen der vorausgesetzten annähernden Ebenheit von der mathematischen Geraden $P_1 P_2$ nicht erheblich genug absteht.

Dieselbe Annahme kann man machen, wenn von einem mittleren

Punkt C aus aligniert wird, wenn C so liegt, dafs der Horizontalwinkel nach P_1 und P_2 gerade 180^0 beträgt. In diesem Falle erfolgt die Messung auch in einer Ebene durch $P_1 P_2$, welche aber für C Vertikalebene ist. Dieselbe bildet wegen der vorausgesetzten Kürze der Distanz mit den anderen genannten Vertikalebenen kleine Winkel, die hauptsächlich nur noch von der Lotabweichung abhängig sind.*) Der maximale Abstand der unter den verschiedenen Umständen gemessenen Linien auf dem Terrain ist daher näherungsweise gleich einem Kreisbogen, dessen Radius der gröfste Vertikalabstand der Profillinie von der mathematischen Geraden $P_1 P_2$ und dessen Zentriwinkel höchstens vom Betrage der Lotabweichungen ist — also gewifs in praktischen Fällen eine sehr kleine Gröfse.

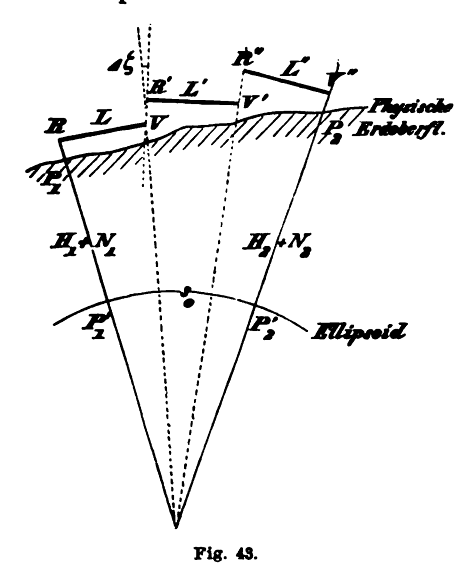


Fig. 43.

In Fig. 43 ist als Projektionsebene wie bei Fig. 42 eine Ebene parallel zu den ellipsoidischen Lotlinien $P_1 P_1'$ und $P_2 P_2'$ benutzt. Man erkennt sofort, dafs in dieser Figur das Verhältnis der Länge der Profillinie zu der (mit den beiden Vertikalschnitten im wesentlichen identischen) Kürzesten zwischen P_1' und P_2' bis auf unmerkliche Gröfsen dasselbe ist wie in Wirklichkeit, weil beide Linien zur Projektionsebene offenbar sehr nahe gleiche Neigung haben, durch die Projektion aber überhaupt obendrein die Dimensionen nur in geringem Betrage sich ändern.

Wir setzen daher in Fig. 43 sogleich die Bezeichnungen der wirklichen Längen ein.

Es handelt sich nun darum, aus dem Resultat der Messung im Profil auf die kürzeste Entfernung s_0 von P_1' und P_2' zu schliefsen.

Die Messung ist aber wesentlich eine staffelförmige. Zur Ver-

*) Nach S. 189 ist der Abstand der ellipsoidischen Vertikalschnitte, die von P_1 nach P_2 und umgekehrt führen, für die vorausgesetzte Distanz kleiner als $0{,}01^{mm}$. Der Schnitt der in C vertikalen Ebene mit dem Terrain hat aber jedenfalls von jenen beiden im allgemeinen einen noch kleineren Abstand. Dies erkennt man, wenn man sich C beweglich und alle Lagen von P_1 bis P_2 einnehmen denkt. Insofern dabei die geographische Breite im allgemeinen immer zu oder abnimmt, dreht sich die Vertikalebene kontinuierlich nur nach derselben Seite.

deutlichung zeigt Fig. 43 drei horizontale Strecken L, L' und L'' (anstatt der in der Praxis vorhandenen zahlreichen Lagen der Mefsstangen). Würde nun thatsächlich mit den Lotlinien des Ellipsoids gearbeitet, so könnte man sofort setzen, indem jede Strecke als Kreisbogen, konzentrisch mit ihrer Projektion aufs Ellipsoid, betrachtet werden darf:

$$s_0 = L\frac{\varrho}{\varrho + H + N} + L'\frac{\varrho}{\varrho + H' + N'} + \cdots, \tag{1}$$

worin $H + N$, $H' + N'$, u. s. f. die Höhen der Strecken über dem Ellipsoid bedeuten und für ϱ in allen Gliedern völlig ausreichend der Krümmungsradius des Ellipsoids im mittleren Azimut der Basis genommen werden darf. Durch Reihenentwicklung erhält man aus dem Vorigen die stets ausreichende Näherungsformel:

$$s_0 = L\left(1 - \frac{H + N}{\varrho}\right) + L'\left(1 - \frac{H' + N'}{\varrho}\right) + \cdots, \tag{2}$$

welche sich noch dadurch, dafs bei Berechnung der kleinen Glieder $L\frac{H + N}{\varrho}$ u. s. f. für die bis auf Kleinigkeiten mit einander übereinstimmenden Faktoren L, L' u. s. f. ein Durchschnittswert eingeführt wird, vereinfachen läfst in:

$$s_0 = (L + L' + \cdots)\left(1 - \frac{H_m + N_m}{\varrho} + \cdots\right). \tag{3}$$

Hierin bezeichnen H_m und N_m die Summen der H, $H' \cdots$ bezw. N, $N' \cdots$ für die sämtlichen Strecken dividiert durch ihre Anzahl. Man kann H_m als durchschnittliche Höhe des gemessenen Profils über dem Geoid ansehen, dagegen ist N_m die durchschnittliche Höhe des Geoids über dem Referenzellipsoid unterhalb der Basis.

Vorstehende Formel setzt voraus, dafs bei der Messung die Stangen normal zu den Lotlinien des Ellipsoids liegen oder doch ihr Neigungswinkel gegen dieselben ermittelt wird und dafs mit diesen Lotlinien gelotet wird. Da dieses nun nicht der Fall ist, so betrachten wir beispielsweise die Messung der Strecke L', Fig. 43, und nehmen wie bisher der Einfachheit halber an, dafs L' horizontal sei und das Ende R' lotrecht über dem Ende V von L liege; dann weichen diese horizontale und lotrechte Richtung von der entsprechenden ellipsoidischen um die in Richtung der Basis fallende Komponente der Lotabweichung ab. Heifst diese $\Delta\zeta$, so ist strenggenommen anstatt L' in (3) einzuführen:

$$L' \cos \Delta\zeta + (H' - H) \sin \Delta\zeta. \tag{4}$$

Dafs dieses selbst bei beträchtlichen Werten von $\Delta\zeta$ eine gegen L' ganz verschwindende Abweichung zeigt, die auch bei ihrer Summierung

über die ganze Basis weg in der Regel nichts Erhebliches giebt, ist leicht zu erkennen. Man darf daher Formel (3) als hinreichend streng betrachten; in der Regel auch dann noch, wenn die Messungsoperation von dem oben angenommenen idealen Vorgange etwas abweicht.

In *Grunerts Archiv* von 1869, Teil 51, S. 28 vergleicht *Sonderhof* die geodätische Linie auf einer zum Rotationsellipsoid *parallelen* Niveaufläche mit derjenigen auf dem Rotationsellipsoid, wenn beide zwischen denselben Lotlinien liegen. Das Ergebnis stimmt mit dem oben bei der Reduktion befolgten Vorgange überein.

§ 6. Erste Annäherung bei der Berechnung eines Dreiecksnetzes. Wenn über die Beziehung des Geoids zu einem Referenzellipsoid noch nichts bekannt ist, so wird man in 1. Annäherung das Geoid als mit irgend einem plausiblen Referenzellipsoid (die Annahme der Dimensionen nach *Bessel* ist ganz angemessen) identisch ansehen müssen, sodafs nun von Lotabweichung und Höhen N nicht weiter die Rede sein kann. Bei der Reduktion der Basismessung nach Formel (3) auf voriger Seite wird also auch ein N_m nicht berücksichtigt werden können.

Dadurch allein entsteht indessen noch kein Fehler.

Macht man nämlich, wie bisher immer geschehen, die Annahme, dafs die Axe des Referenzellipsoids parallel zur Erdaxe sein soll, ohne indessen mit ihr zu koincidieren, so wird die Annahme N_m = null nur heifsen, dafs das Referenzellipsoid und das Geoid unterhalb der Mitte der Basis sich schneiden.

Anders freilich ist die Sache, sobald mehrere Basismessungen in betracht kommen, da die Annahme N_m = null nur für *eine* Basis ohne weiteres zulässig ist, wie im folgenden § 10 sich zeigen wird. Wenn man also für alle Grundlinien N_m = null annimmt, so giebt dies notwendig in den reduzierten Längen derselben Fehler. Die Gröfse dieser Fehler wird im allgemeinen vom gegenseitigen Abstande der Grundlinien abhängen; man bemerkt leicht, dafs bereits Werte N_m von nur wenigen Metern genügen, um eine Unsicherheit zu erzeugen, die weit gröfser ist, als diejenige infolge der eigentlichen Messungsfehler, selbst wenn man diese zu $\frac{1}{500000}$ der Länge annimmt. Immerhin gestaltet sich diese Unsicherheit nicht sehr bedenklich, weil die mittelst Dreiecksketten aus den Grundlinien abgeleiteten linearen Längen der geodätischen Linien wegen der Winkelbeobachtungsfehler eine weit geringere Genauigkeit besitzen.*)

*) Nach vorliegenden Erfahrungen steigert sich bereits im Basisnetz der m. F. der Dreiecksseiten auf $\frac{1}{150000}$ bis $\frac{1}{250000}$ und wächst leicht weiter nach Mafsgabe der in § 8 demnächst anzugebenden Formel bis auf $\frac{1}{100000}$ und mehr. Man vergl. das Referat über die *Dänische Gradmessung*, S. 68, Bd. 18 der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.*

Indem wir vorläufig diese Angelegenheit nicht weiter verfolgen, ist nun nächst dem Fehler bei Reduktion der Grundlinien auf die Fehler bei Reduktion der Winkel hinzuweisen. Streng genommen ist jeder Horizontalwinkel nach S. 516 (6) zu reduzieren, um fürs Referenzellipsoid gültig zu werden. Wegen der bei der 1. Annäherung mangelnden Kenntnis der Lotabweichungskomponenten ξ und η mufs diese Reduktion unterbleiben. Die Fehler, welche dadurch entstehen, sind allerdings in der Regel höchstens vom Betrage weniger Zehntelsekunden. Nur im Hochgebirge, wo die Lotabweichungen und zugleich die $\cot z'$ im allgemeinen die gröfsten Werte erreichen, können die Fehler wohl auf 1″ und mehr anwachsen. Jedoch wird bei Dreiecken 1. Ordnung die Gefahr, dafs dies geschieht, dadurch vermindert, dafs stark geneigte Visuren, d. h. grofse Werte von $\cot z'$, selten vorkommen und meistens vermieden werden können. Nehmen wir also an, dafs im allgemeinen diese Einflüsse etwas kleiner sind, als diejenigen der Beobachtungsfehler, so ist bei der Beurteilung ihres Einflusses auf die schliefslichen Ergebnisse des Dreiecksnetzes zu beachten, ob sie wie diese als zufällige Fehler wahrscheinlich einer teilweisen Kompensation unterliegen, oder ob ein konstanter, systematischer Charakter derselben eine Anhäufung ihres Einflusses bewirken kann.

Man sieht leicht ein, dafs beides stattfinden wird. Die Lotabweichungen haben zum Teil einen systematischen Charakter, der von der Wahl des Referenzellipsoids und den kontinentalen Unregelmäfsigkeiten des Geoids abhängt, zum Teil einen rasch veränderlichen, der von den lokalen Unregelmäfsigkeiten des Geoids bedingt ist. Die Veränderlichkeit der Reduktionen der Horizontalwinkel wird aber nicht nur durch letztere, sondern auch durch die Schwankungen in den $\cot z'$ bedingt, die für Dreiecke 1. Ordnung in der Regel indes kleine *negative* Werte annehmen werden.*)

Wir gehen nun dazu über, einige Betrachtungen über die Wirkungen der Vernachlässigung dieser teils systematisch, teils zufällig veränderlichen Reduktionen anzustellen.

---

*) Aus der bekannten Näherungsformel für trigonometrische Höhenmessung:

$$H_2 - H_1 = s \cot z'_{1.2} + \frac{s^2}{2\varrho}(1-k),$$

die sich auch aus (5) S. 520 ableiten läfst, folgt

$$\cot z'_{1.2} = \frac{H_2 - H_1}{s} - \frac{s}{2\varrho}(1-k).$$

§ 7. **Einflufs der Lotabweichungen auf die Ergebnisse für ein Dreiecksnetz.** Setzen wir voraus, dafs $\cot z'$ für die 3 Seiten eines gleichseitigen Dreiecks denselben Wert hat, wozu Gleichheit der Höhen der 3 Punkte gehört, und nehmen wir ferner an, dafs die Lotablenkung in den letzteren ebenfalls identisch ist, so wird die Winkelsumme dieses Dreiecks durch die Vernachlässigung der Reduktionen nicht beeinflufst. Abgesehen vom Faktor $\Theta \cot z'$ ist nämlich für die 3 Winkel die Reduktion nach (5) S. 516:

$$\begin{array}{l} \sin(a'_{1.2} - A') - \sin(a'_{1.3} - A') \\ \sin(a'_{2.3} - A') - \sin(a'_{2.1} - A') \\ \sin(a'_{3.1} - A') - \sin(a'_{3.2} - A') \end{array}$$

wenn $180^0 + A'$ das allen 3 Punkten gemeinsame wirkliche Azimut des ellipsoidischen Zeniths ist. Es geht aber in der That jene Summe in null über, weil infolge der Gleichseitigkeit des Dreiecks die vertikal über einander stehenden Azimute um je 120^0 verschieden sind, sodafs jede Vertikalkolonne für sich verschwindet.*) Selbstverständlich ändert nun auch die Ausgleichung nichts an dem Einflufs, welchen diese vernachlässigten Reduktionen auf die einzelnen Winkel haben.

Eine einfache aus gleichseitigen Dreiecken bestehende Dreieckskette wird sich daher in leicht zu übersehender Weise deformieren. Wir betrachten zunächst 2 an einander stofsende Dreiecke 1.2.3 und 2.4.3 und ermitteln die Fehler in den Seiten 2.4 und 3.4, wenn 1.2 als Ausgangsseite dient.

Man hat aber

$$(2.4) = (1.2)\,\frac{\sin\binom{2.3}{1}\sin\binom{2.4}{3}}{\sin\binom{1.2}{3}\sin\binom{3.2}{4}}$$

$$(3.4) = (1.2)\,\frac{\sin\binom{2.3}{1}\sin\binom{4.3}{2}}{\sin\binom{1.2}{3}\sin\binom{3.2}{4}}$$

Die vernachlässigten Reduktionen sind, abgesehen vom Faktor $\Theta \cot z'$,

$$\text{in } \binom{1.2}{3}: \quad \sin(a'_{3.1} - A') - \sin(a'_{3.2} - A')$$

---

*) Dasselbe ergiebt sich, wenn man ungleichseitige Dreiecke betrachtet und, entsprechend gleicher Höhe der Punkte, $\cot z'$ gleich $\frac{s}{2\varrho}$ setzt (*Bessel, Abhandl.* Bd. 3, S. 32). Auch die bei der Ausgleichung auftretenden Zentralsysteme werden unter gewissen, näherungsweise oft zutreffenden Umständen in ihren Widersprüchen nicht von konstanten Lotabweichungen beeinflufst.

$$\text{in } \binom{3.2}{4}: \quad \sin(a'_{4.3} - A') - \sin(a'_{4.2} - A')$$

$$\text{in } \binom{2.3}{1}: \quad \sin(a'_{1.2} - A') - \sin(a'_{1.3} - A')$$

$$\text{in } \binom{2.4}{3}: \quad \sin(a'_{3.2} - A') - \sin(a'_{3.4} - A')$$

$$\text{in } \binom{4.3}{2}: \quad \sin(a'_{2.4} - A') - \sin(a'_{2.3} - A').$$

Mit Rücksicht auf den Parallelismus der Seiten 1.2 und 3.4, 1.3 und 2.4 kann man diese Reduktionen in sofort ersichtlicher Abkürzung auch schreiben

$$\text{für } \binom{1.2}{3}: \quad + r_2 + r_1$$

$$\text{„ } \binom{3.2}{4}: \quad - r_3 - r_2$$

$$\text{„ } \binom{2.3}{1}: \quad + r_3 + r_2$$

$$\text{„ } \binom{2.4}{3}: \quad - r_1 - r_3$$

$$\text{„ } \binom{4.3}{2}: \quad - r_2 - r_1.$$

Hiermit erhält man den Einfluſs dieser Gröſsen, wenn alle Winkel zu 60^0 angenommen werden, für $\log \frac{2.4}{1.2}$ gleich

$$\frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . (r_2 + r_3 - 2r_1) \tag{1}$$

und für $\log \frac{3.4}{1.2}$ gleich

$$\frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . (2r_3 - 2r_1), \tag{2}$$

wobei die r in Sekunden ausgedrückt gedacht sind. Setzt sich an die Seite 3.4 ein anderes Dreieckspaar und so fort, bis $2i$ Dreiecke eine geradgestreckte Kette im Azimut $a'_{1.3}$ bilden (vergl. Fig. 13 S. 198), und bezeichnen wir die Ausgangsseite 1.2 mit a sowie die ihr parallelen Anschluſsseiten 3.4 u. s. f. der Dreieckspaare mit $a', a'' \dots a^{(i)}$, dagegen die in Richtung 2.4 sich an einander setzenden Seiten mit d, $d' \dots d^{(i-1)}$, so wird der konstante Teil der Lotabweichung auf $\log \frac{a^{(i)}}{a}$ den nachstehenden Einfluſs haben:

$$\frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . (2ir_3 - 2ir_1). \tag{3}$$

Dagegen ist der Einflufs auf $\log \frac{d^{(i-1)}}{a}$ gleich

$$\frac{1}{\varrho''}(i-1) M \cot 60^0 . (2r_3 - 2r_1) + \frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . (r_2 + r_3 - 2r_1). \tag{4}$$

Berechnet man hieraus den Einflufs für $\frac{d^{(i-1)}}{a}$ selbst, sodann durch Addition aller Werte desselben für $i = 1$ bis i den Einflufs auf $\frac{[d]}{a}$, wobei $[d]$ = der Langseite des Netzes in Richtung 2.4 ist, so folgt endlich als Einflufs auf $\log \frac{[d]}{a}$:

$$\frac{1}{\varrho''} M \cos 60^0 . \{ir_3 + r_2 - (i+1) r_1\}. \tag{5}$$

Nächst diesen Einflüssen auf die Seitenverhältnisse betrachten wir noch den Einflufs auf den Horizontalwinkel zwischen der Langseite $[d]$ des Netzes in Richtung 2.4 und der Ausgangsseite 1.2. Der Fehler im Winkel $\binom{1.4}{2}$ ist aber gleich $-r_2 + r_3$ und die Fehler der gestreckten Winkel zwischen den Strecken $d, d', \ldots d^{(i-1)}$ sind der Reihe nach alle gleich $-2r_2$. Hierdurch entsteht eine Krümmung der Langseite und es wird der Gesamtfehler im bezeichneten Winkel, wie man durch Projektion auf eine Richtung quer zu 2.4 findet, gleich:

$$(-r_2 + r_3) - 2r_2 \frac{1+2+3+\ldots+(i-1)}{i}$$

d. i.

$$-ir_2 + r_3. \tag{6}$$

Dagegen ist der Fehler in der Differenz der Azimute der Seiten $a^{(i)}$ und a gleich

$$-2ir_2. \tag{7}$$

Nach diesen Formeln wird man nicht nur für das ideelle Dreiecksnetz sondern auch vielfach bei thatsächlichen einfachen Dreiecksketten den Einflufs des allen Stationen gemeinsamen Teiles der Lotabweichungen schätzen können, während ein anderer veränderlicher Teil sich mit den Messungsfehlern kombiniert. Zur Vergleichung betrachten wir nun noch die Anhäufung dieser letzteren, insoweit sie als zufällig zu betrachten sind.

§ 8. **Einflufs zufälliger Fehler.** Wir knüpfen zunächst wieder an die Seitenverhältnisse $\frac{2.4}{1.2}$ und $\frac{3.4}{1.2}$ im 1. Dreieckspaar an, die Dreiecke als gleichseitig vorausgesetzt. Ist nun μ der mittlere zufällige Fehler

eines Dreieckswinkels, so erkennt man leicht, dafs der m. F. in $\log \frac{2.4}{1.2}$ und ebenso in $\log \frac{3.4}{1.2}$ gleich wird:

$$\pm \frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . \mu \sqrt{4}, \qquad (1^*) \text{ u. } (2^*)$$

indem nämlich in diesen Seitenverhältnissen je 4 von einander unabhängige Winkelfehler auftreten. Die Existenz der Bedingungsgleichung zwischen den 3 Dreieckswinkeln ändert hieran nichts, weil sie gleich grofse Verbesserungen an den gleich genau gemessenen Winkeln erzeugt und weil bei der gleichen Gröfse der Winkel somit das Sinusverhältnis nicht beeinflufst wird.*)

Man hat nun den Einflufs auf $\log \frac{a^{(i)}}{a}$ sowie auf $\log \frac{d^{(i-1)}}{a}$, indem diese Seitenverhältnisse sich aus i von einander unabhängigen Seitenverhältnissen mit dem m. F. (1*) zusammensetzen, gleich:

$$\pm \frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . \mu \sqrt{4 i}. \qquad (3^*) \text{ u. } (4^*)$$

Komplizierter ist die Berechnung für den m. F. $\log \frac{[d]}{a}$. Wenn wir darauf Rücksicht nehmen, dafs die Seiten $d, d' \ldots$ alle gleich a sind, so wird der Ausdruck für $\frac{[d]}{a}$ im Anschlufs an Fig. 13 S. 198:

$$\frac{\sin\binom{2.3}{1}}{\sin\binom{1.2}{3}\sin\binom{3.2}{4}} \left\{ \sin\binom{2.4}{3} + \frac{\sin\binom{4.3}{2}\sin\binom{4.5}{3}}{\sin\binom{3.4}{5}\sin\binom{5.4}{6}} \left\{ \sin\binom{4.6}{5} + \frac{\sin\binom{6.5}{4}\sin\binom{6.7}{5}}{\sin\binom{5.6}{7}\sin\binom{7.6}{8}} \left\{ \sin\binom{6.8}{7} + \cdots \right\} \right\} \right\}$$

Die hier angesetzten Glieder beziehen sich auf 3 Dreieckspaare. Um nun zum mittleren Fehlerquadrat zu gelangen, hat man die Differentialquotienten nach allen vorkommenden Winkeln zu bilden, darin alle Winkel gleich 60^0 zu setzen und die Quadratsumme der genannten Quotienten mit μ^2 zu multiplizieren.

---

*) Auf den geringen bezw. verschwindenden Einflufs der Winkelgleichungen in den Dreiecken auf die Seitenverhältnisse haben wir schon in den *Studien über rationelle Vermessungen*, Abschnitt 4, Art. 49, *Zeitschrift f. Math. u. Phys.* 1868 aufmerksam gemacht. Nur die Seitengleichungen vermehren die Genauigkeit der Seitenverhältnisse wesentlich. (Vergl. das Referat über die *Dänische Gradmessung*, S. 63 in Bd. 13 der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.*). Selbstverständlich darf man nicht weiter schliefsen wollen, dafs es überflüssig sei, alle 3 Dreieckswinkel zu messen. Denn wollte man deren nur 2 messen, so würde eines der Seitenverhältnisse im Dreieck erheblich ungenauer werden.

Die Bestandteile des mittleren Fehlerquadrats werden, abgesehen vom Faktor $\frac{1}{\varrho''^2}\mu^2 \cot^2 60^0$, gleich

$$i^2 \text{ für jeden der 3 Winkel } \binom{2.3}{1}, \binom{1.2}{3}, \binom{3.2}{4},$$

$$(i-1)^2 \text{ für jeden der 4 Winkel } \binom{4.3}{2}, \binom{4.5}{3}, \binom{3.4}{5}, \binom{5.4}{6},$$

$$(i-2)^2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 4 \quad \text{"} \quad \binom{6.5}{4}, \binom{6.7}{5}, \binom{5.6}{7}, \binom{7.6}{8},$$

. . . .

$$1 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad i \quad \text{"} \quad \binom{2.4}{3}, \binom{4.6}{5}, \binom{6.8}{7}, \cdots$$

oder zusammen genommen gleich

$$-i^2 + 4(i^2 + (i-1)^2 + \cdots + 1) + i;$$

das giebt, weil die Summe der Quadrate von 1 bis i^2 gleich ist $\frac{1}{6} i(i+1)(2i+1)$, für den mittleren Fehler von $\frac{[d]}{a}$ den Betrag

$$\frac{1}{\varrho''}\mu \cot 60^0 . \sqrt{\frac{1}{6} i(8i^2 + 6i + 10)}.$$

In $\log \frac{[d]}{a}$ endlich ist demnach, weil $\frac{[d]}{a}$ gleich i ist, der mittlere Fehler gleich

$$\pm \frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . \mu \sqrt{\frac{4}{3} i + \frac{5}{3}\frac{1}{i} + 1}. \tag{5*}$$

Etwas anders gestalten sich die Ausdrücke für die Voraussetzung vollständiger (oder diesen äquivalenter) Satzbeobachtungen, jedoch bleibt in (5*) jedenfalls dasjenige gewahrt, worauf es uns besonders ankommt, nämlich Zunahme mit $\sqrt{i}$ und nicht mit i.*)

Um zu dem mittleren Fehler im Horizontalwinkel zwischen der Ausgangsseite 1.2 und der Langseite $[d]$ in Richtung 2.4 zu gelangen, bezeichnen wir die wahren Fehler der Winkel $\binom{4.1}{2}, \binom{6.2}{4}, \binom{8.4}{6}, \cdots$ mit $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6 \cdots$.

Alsdann findet man durch Projektion auf eine Richtung normal zur Seite 2.4 sofort, dafs der Fehler im genannten Horizontalwinkel ist:

*) Dafs die Änderung der Ausdrücke nicht erheblich sein kann, erkennt man daran, dafs zur successiven Berechnung der a', a'', a''' ... nur von einander wesentlich unabhängige Elemente in betracht kommen.

$$\varepsilon_2 + \frac{1}{i}\left((i-1)\,\varepsilon_4 + (i-2)\,\varepsilon_6 + \cdots + 2\varepsilon_{2(i-1)} + \varepsilon_{2i}\right).$$

Nehmen wir alle diese Winkel mit dem mittleren Fehler μ direkt beobachtet an, so folgt nun als mittleres Fehlerquadrat sofort:

$$\mu^2\left(1 + \frac{(i-1)^2 + (i-2)^2 + \cdots + 1}{i^2}\right).$$

Der mittlere Fehler im bezeichneten Horizontalwinkel wird also gleich

$$\pm\mu\sqrt{\frac{1}{3}\,i + \frac{1}{2} + \frac{1}{6i}}\,.$$

Hierbei ist auf die überschüssigen Messungen im Netze noch keine Rücksicht genommen. Diese geben aber etwa noch eine 2. Bestimmung gleicher Sicherheit durch die Langseite $[c]$ hindurch. Wir setzen daher den m. F. näherungsweise gleich

$$\pm\mu\sqrt{\frac{1}{6}\,i + \frac{1}{4} + \frac{1}{12i}}\,. \tag{6*}$$

Die Differenz der Azimute der Seiten $a^{(i)}$ und a kann man durch die beiden Langseiten $[d]$ und $[c]$ des Netzes, sowie durch den Zug der zwischen beiden liegenden Seiten a und b herstellen. Diese Bestimmungen sind im wesentlichen von einander unabhängig und die Ausgleichung vereinigt sie nach Mafsgabe ihrer Gewichte, die sich näherungsweise wie $1:1:\frac{1}{2}$ verhalten. Da nun der mittlere Fehler der Differenz der Azimute der Seiten $a^{(i)}$ und a aus einer Langseite gleich

$$\pm\mu\sqrt{i+1}$$

wird, so findet sich der mittlere Fehler für jene Differenz der Azimute mit Rücksicht auf die Ausgleichung näherungsweise gleich

$$\pm\mu\sqrt{\frac{i+1}{2,5}}\,. \tag{7*}$$

§ 9. Vergleichung, Zeitpunkt der Gesamtausgleichung u. a. Die im vorstehenden Paragraphen abgeleiteten Ausdrücke werden sich etwas verändern, wenn man die Bedingungen der Ausgleichung unter Voraussetzung vollständiger Richtungsbeobachtungen streng beachtet. Aber schon in der vorliegenden Form genügt das Gegebene zu zeigen (was hier die Veranlassung der Entwicklungen war), dafs der Einflufs der zufälligen Fehler bei einigermafsen grofsen Werten von i von den entsprechenden Einflüssen, welche nach § 7 unter gewissen Voraussetzungen aus den Reduktionsfehlern resultieren, übertroffen werden kann, selbst wenn die konstanten Werte von r_1, r_2 und r_3 nur soviel Hundertstelsekunden betragen, als μ Zehntelsekunden.

Gröfsere Dreiecksketten, welche einzeln ausgeglichen sind und auf besonderen Grundlinien beruhen, werden in ihren Anschlufsseiten wie überhaupt in den Bedingungen ihres Zusammenschlufses hiernach Widersprüche zeigen können, die, insoweit die Winkel in betracht kommen, nicht nur von den zufälligen Messungsfehlern der Winkel und dem veränderlichen Teil des Lotabweichungseinflusses, sondern auch merklich von dem konstanten Teil des Einflusses der Lotabweichungen auf die Winkel abhängen. Je gröfser die Güte der Messungen ist, um so mehr kann letzterer hervortreten. Da nun nach S. 523 auch die aus der Unkenntnis der Höhenlage des Geoids gegen das Referenzellipsoid entspringenden Reduktionsfehler der Grundlinien im allgemeinen nicht ganz unerheblich sind, so wird eine Gesamtausgleichung des Komplexes aller Dreiecksketten, die über einen Teil der Erdoberfläche ausgebreitet sind, nicht eher vorgenommen werden dürfen, bis entweder durch vorläufige Rechnungen nachgewiesen ist, dafs die betreffenden Einflüsse der Lotabweichungen und der Höhenlage des Geoids nicht wesentlich diejenigen der zufälligen Messungsfehler übersteigen, oder bis auf Grund einer vorläufigen Bestimmung wenigstens des systematischen Teiles der Lotabweichungen und der Höhenlage des Geoids eine Reduktion der Richtungen im Dreiecksnetz und der Grundlinien stattgefunden hat. Diese Richtungsreduktion würde strenggenommen sogar eine Neuausgleichung der einzelnen Ketten erfordern (und nur die Stationsausgleichungen würden nicht zu wiederholen sein). Indessen wird man wohl in der Regel bei der Berechnung der Dreiecksnetze ohne Reduktion der Richtungen wegen relativer Lotabweichungen stehen bleiben können, wenn es sich nur darum handelt, Untersuchungen über die Gestalt eines *mäfsig* ausgedehnten Teiles des Geoids anzustellen, oder wenn die Messungen eine Landesaufnahme bezwecken.

Im ersteren Falle wird man zunächst ein sich den Messungen möglichst anschmiegendes Referenzellipsoid bestimmen, sei es von gegebenen Dimensionen oder erst noch zu ermittelnden. Gegen dieses Ellipsoid relative Lotabweichungen werden in der Regel einen von Punkt zu Punkt wesentlich veränderlichen Charakter zeigen und es wird also kein vorwiegend systematischer Einflufs derselben zu befürchten sein, ebenso wenig wie der Einflufs der Höhenlage des Geoids ein erheblicher werden kann. Günstig ist noch der Umstand, dafs die Wahl der Dimensionen des Ellipsoids auf die Berechnung der Dreiecke einen ganz geringfügigen Einflufs hat, wie aus den Untersuchungen S. 405 hervorgeht. Wenn man also schliefslich die Dimensionen des Ellipsoids abändert, so braucht deshalb keine Neuberechnung zu erfolgen.

Im zweiten Falle, dem der Landesaufnahme, dürfte es stets ausreichen von denjenigen Reduktionen ganz abzusehen, welche daraus entspringen, dafs die Voraussetzung eines Ellipsoids keine ganz zutreffende ist. Genügt es hier doch für Zwecke der Detailvermessung in der Regel von dem oft verhältnismäfsig beträchtlichen Unterschied zwischen direkt auf der physischen Erdoberfläche gemessenen Entfernungen und den entsprechenden aus der Haupttriangulation ohne weitere Rücksicht auf die Höhenlage abgeleiteten Entfernungen abzusehen. Allerdings können bei Einschaltungen jene Winkelreduktionen infolge steiler Visuren gröfser als die Beobachtungsfehler werden, indes ist andrerseits durch die Einschaltung in ein festes Netz Fehleranhäufungen vorgebeugt.*)

§ 10. **Die Berechnung der Lotabweichungen** für angenommene Dimensionen des Referenzellipsoids setzt voraus, dafs man entweder für einen Punkt die Lotabweichung null setzt oder sie als unbekannte Gröfse in die Rechnung einführt. Hierbei nehmen wir natürlich an, dafs *alle Dreiecksnetze in Verbindung mit einander stehen* — oder richtiger umgedreht: Netze, die nicht mit dem gewählten Ausgangspunkt der Berechnung in Verbindung stehen, fallen ganz bei den weiter zu besprechenden Rechnungen heraus.

Im ersteren Falle, Nullsetzen einer Lotabweichung, trifft man über das Referenzellipsoid offenbar die Bestimmung, dafs es von der wirklichen Lotrichtung jenes Ortes normal getroffen wird. Wenn man nun aufserdem, um Fig. 41 und die Formeln dieses Kapitels anwenden zu können, Parallelismus seiner Axe zur Erdaxe voraussetzt, so ist seine Lage völlig bestimmt bis auf eine Verschiebungsgröfse parallel zu jener Lotrichtung, welche von der Vernachlässigung der N_m bei der Reduktion der Grundlinien abhängt. Ist nur *eine* solche vorhanden, so schneidet das Ellipsoid das Geoid unterhalb der Mitte jener Basis. Sind mehrere gemessen, so wird man ihm, so lange eben nicht bereits mit genäherten Werten von N_m reduziert ist, eine mittlere Lage (die sich genau nicht ohne weiteres angeben läfst) dergestalt zuschreiben müssen, dafs einzelne N_m positiv, andere negativ sind. (In welchem Abstand die Erdaxe von der Axe des Referenzellipsoids liegt, läfst sich auch nicht angeben, es sei denn, dafs man bereits Kenntnis von der Lage des oben erwähnten Ausgangspunktes

*) Nicht unerwähnt mag bleiben, dafs man die Zulässigkeit der *sphärischen* Berechnung der Figuren innerhalb eines kleinen Teiles des das Geoid ersetzenden Rotationsellipsoids leicht mittelst der Methode der Lothabweichungen zeigen kann. Als Lotabweichungen treten dann eben die Winkel zwischen den Ellipsoid- und Kugelnormalen auf.

zur Erdaxe hätte, welche Kenntnis sich überdies auf den üblichen geodätisch-astronomischen Wegen gar nicht erlangen läfst.)

Es ist aber nicht vorteilhaft, für einen Punkt die Lotabweichung gleich null zu setzen. Das Anschmiegen des Referenzellipsoides läfst sich weit besser erzielen, wenn man die Lotabweichung auch im Anfangspunkte der Berechnungen als *unbestimmt* annimmt.

Da dieses zugleich der allgemeinere Fall ist, so werden wir die Aufgaben: die successive Berechnung der Lotabweichungen zu zeigen, eventuell die Dimensionen des Ellipsoids zu verbessern und die Form des Geoids soweit als möglich aus den Lotabweichungen abzuleiten, an ihn anknüpfen.

Auf die Aufgabe, Lotabweichungen für ein Referenzellipsoid zu ermitteln, dessen Axe *nicht* parallel zur Erdaxe ist, werden wir nicht eingehen. Die Formeln dazu würden sich — soviel mag bemerkt werden — leicht aus Fig. 41 bestimmen lassen, wenn man darin 2 Nordpole N und N' unterscheiden würde. Nächst den Dimensionen des Ellipsoids und den Komponenten der Lotabweichung eines Anfangspunktes, also 4 Unbekannten, würden noch 2 Unbekannte, die die Lage von N gegen N' feststellen, auftreten. Da jedoch die ellipsoidischen geographischen Breiten von den wirklichen bei diesem Vorgange recht erheblich abweichen können, wird man um so mehr davon absehen, als die relativen Lotabweichungen wohl in der Regel durch örtliche rasch veränderliche Formveränderungen der Niveauflächen bedingt werden. Aufserdem komplizieren sich die Berechnungsvorschriften, wenn man die Differenz von N und N' nicht geradezu klein annimmt, recht erheblich, wie man aus *Fergolas* wiederholt erwähnter *Abhandlung* bezw. der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.*, Bd. 11, ersehen wird. Der Grund ist, dafs man nicht ohne weiteres die höheren Potenzen des Unterschieds NN' vernachlässigen darf (was *Fergola* allerdings schliefslich z. T. doch noch thut).

§ 11. Einflufs der Lotabweichungen auf die geodätisch ermittelten geographischen Koordinaten: Formeln zur Berechnung der Lotabweichungen.

Denken wir uns aus den wirklichen Werten der geographischen Breite und Länge sowie des Azimuts B'_1, L'_1 und $\alpha'_{1.2}$ in P_1 mit Hilfe der linearen Länge der Kürzesten $P_1 P_2$ unter Annahme bestimmter Dimensionen eines Referenzellipsoides Breite, Länge und Azimut in P_2 berechnet, so werden diese im allgemeinen von den wahren Werten B'_2, L'_2 und $\alpha'_{2.1}$ dieser Gröfsen abweichen.

Wir nennen die berechneten Werte B''_2, L''_2 und $\alpha''_{2.1}$.

Hätte man die Rechnung mit den ellipsoidischen Werten B_1, L_1

und $\alpha_{1.2}$ ausgeführt, so hätten sich auch die ellipsoidischen Werte B_2, L_2 und $\alpha_{2.1}$ ergeben. Um diese Werte mit jenen zu vergleichen, benutzen wir die Differentialformeln.

Nach § 3 S. 517 u. 518 ist in ausreichender Annäherung:

$$\left.\begin{aligned} B_1 - B_1' &= + \xi_1 + \cdots \\ L_1 - L_1' &= - \eta_1 \sec B_1' + \cdots \\ \alpha_{1.2} - \alpha_{1.2}' &= + \eta_1 \tan B_1' + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei in der letzten Formel ebenso wie bei der Berechnung des Dreiecksnetzes von den kleinen, in die Cotangenten der Zenithdistanzen multiplizierten Gliedern, sowie von dem Einfluſs des Abstandes des Geoids vom Ellipsoid auf die Reduktion der Richtungen wegen der Höhe der Objekte abgesehen ist — oder angenommen wird, daſs alle Richtungen, also auch $\alpha_{1.2}'$ bereits mittelst vorläufiger Werte der Lotabweichungen um diese Glieder korrigiert worden sind.

Indem wir nun die Werte $+\xi_1$, $-\eta_1 \sec B_1'$ und $+\eta_1 \tan B_1'$ als δB_1, δL_1 und $\delta \alpha_{1.2}$ in die Formeln (7) bis (9) S. 282 einführen, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_2'' = &+ \frac{W_2^3}{W_1^3}\left\{\cos \varDelta\alpha + \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \sin\alpha_{1.2} \sin\alpha_{2.1}\right\} \xi_1 \\ &- \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\frac{W_2^3}{1-e^2} \tan B_1 \sin \alpha_{2.1} \cdot \eta_1 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} L_2 - L_2'' = &- \frac{(1-e^2)W_2}{W_1^3}\left\{\sin\varDelta\alpha - \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\right\} \sec B_2 . \xi_1 \\ &- \left\{\sec B_1 + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \sec B_2 \tan B_1 \cos \alpha_{2.1}\right\} \eta_1 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2.1} - \alpha_{2.1}'' = &\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_1^3}\left\{\begin{aligned} &\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + 1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \cos\varDelta\alpha \sin\alpha_{2.1} - \frac{\sin^2\varDelta\alpha}{\sin\alpha_{1.2}} \\ &+ \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right]\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \sin^2\alpha_{2.1} \sin\alpha_{1.2} \end{aligned}\right\} \xi_1 \\ &+ \left\{\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \tan B_2 \cos \alpha_{2.1}\right\} \tan B_1 . \eta_1 + \cdots . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wenn man hierin für B_2, L_2 und $\alpha_{2.1}$ den (1) entsprechend die Substitutionen benutzt:

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= B_2' + \xi_2 + \cdots \\ L_2 &= L_2' - \eta_2 \sec B_2' + \cdots \\ \alpha_{2.1} &= \alpha_{2.1}' + \eta_2 \tan B_2' + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

so erhält man Gleichungen zwischen den Komponenten ξ und η der

Lotabweichungen beider Punkte P_1 und P_2 bezüglich des Referenzellipsoids. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} B_2'' - B_2' - \xi_2 + \frac{W_2^3}{W_1^3}\left\{\cos\varDelta\alpha + \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1}\right\}\xi_1 \\ - \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\frac{W_2^3}{1-e^2}\tan B_1\sin\alpha_{2.1}\,.\,\eta_1 + \cdots = 0 \end{aligned}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{aligned} -L_2' + \sec B_2\,.\,\eta_2 - \frac{(1-e^2)W_2}{W_1^3}\left\{\sin\varDelta\alpha - \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\right\}\sec B_2\,.\,\xi_1 \\ - \left\{1 + \frac{\mathfrak{m}}{a_0}W_2\sin B_1\sec B_2\cos\alpha_{2.1}\right\}\sec B_1\,.\,\eta_1 + \cdots = 0 \end{aligned}\right\}(7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{2.1}'' - \alpha_{2.1}' - \tan B_2\,.\,\eta_2 \\ &- \frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_1^3}\left\{\begin{aligned} &\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + 1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\cos\varDelta\alpha\sin\alpha_{2.1} - \frac{\sin^2\varDelta\alpha}{\sin\alpha_{1.2}} \\ &+ \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right]\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin^2\alpha_{2.1}\sin\alpha_{1.2} \end{aligned}\right\}\xi_1 \\ &+ \left\{\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0}W_2\tan B_2\cos\alpha_{2.1}\right\}\tan B_1\,.\,\eta_1 + \cdots = 0\,. \end{aligned}\right\}(8)$$

Über die strenge und näherungsweise Berechnung der hierin auftretenden Koefficienten vergl. § 11 S. 283.

Man kann in den Koefficienten jedenfalls die wirklichen Werte der geographischen Koordinaten und der Azimute anstatt der ellipsoidischen anwenden, die der Einfachheit halber eingeführt sind.

Wenn man nun ferner erwägt, dafs einerseits die Beobachtungsfehler in B', L' und α' schon in der 1. Decimalstelle der Sekunden auftreten, dafs andrerseits die Komponenten der Lotabweichungen im allgemeinen nur einzelne Sekunden betragen, so erscheint es überhaupt völlig genügend, die Koefficienten von ξ_1 und η_1 auf drei Decimalen anzugeben, was für $s < 0{,}1\,a_0$ und (wie immer) abgesehen von hohen Breiten auf die Vernachlässigung von $e^2 s : a_0$, d. h. auf die Anwendung der Formeln (10) S. 285 hinauskommt.

Es ergiebt sich darnach unter den ebenerwähnten Voraussetzungen:

$$\left.\begin{aligned} &B_2'' - B_2' - \xi_2 + \xi_1\cos L_{1.2} + \eta_1\sin L_{1.2}\sin B_1 + \cdots = 0 \\ &L_2'' - L_2' + \eta_2\sec B_2 + \xi_1\sin L_{1.2}\tan B_2 \\ &\qquad - \eta_1(\sec B_1 + \sin L_{1.2}\tan B_1\csc\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}) + \cdots = 0 \\ &\alpha_{2.1}'' - \alpha_{2.1}' - \eta_2\tan B_2 - \xi_1\sin L_{1.2}\sec B_2 \\ &\qquad + \eta_1\cos L_{1.2}\sin B_1\sec B_2 + \cdots = 0, \end{aligned}\right\}(9)$$

genau bis auf Glieder von der Ordnung $e^2 s : a_0$ in den Koefficienten von ξ_1 und η_1. Dabei bedeuten B_2', L_2', $\alpha_{2.1}'$ die wirklichen Werte der geographischen Breite und Länge sowie des Azimuts der geodätischen Linie in P_2; B_2'', L_2'', $\alpha_{2.1}''$ hingegen die von P_1 aus mittelst B_1', L_1', $\alpha_{1.2}'$ und s berechneten Werte. Es ist ferner in den Koefficienten $L_{1.2} = L_2 - L_1$ zu nehmen.

In dem Koefficienten von η_1 in der 2. Gleichung (9) kann man für

$$\sin L_{1.2} \tan B_1 \csc \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1}$$

auch schreiben:

$$\sin \frac{s}{a_0} \tan B_1 \sec B_2 \cos \alpha_{2.1}\,.$$

Setzt man ξ_1 und η_1 gleich null, so folgt aus (9):

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \quad B_2'' - B_2' + \cdots \\ \eta_2 &= -(L_2'' - L_2') \cos B_2 + \cdots \\ \eta_2 &= \quad (\alpha_{2.1}'' - \alpha_{2.1}') \cot B_2 + \cdots\,. \end{aligned}\right\} \qquad (9^*)$$

Man hat daher, falls sowohl geographische Längen wie Azimute vorliegen, durch die doppelte Bestimmung von η_2 die Gleichung

$$(\alpha_{2.1}'' - \alpha_{2.1}') + (L_2'' - L_2') \sin B_2 + \cdots = 0\,, \qquad (10)$$

welche Bedingungsgleichung eine Kontrolle der Genauigkeit der geodätischen und astronomischen Operationen giebt. Setzt man ξ_1 und η_1 nicht null, so ist der Ausdruck, welcher die linke Seite der Gleichung (10) bildet, gleich der Summe zweier Bruchteile von η_1, und von ξ_1, welche in Bezug auf $s : a_0$ die 1. Ordnung haben.

Die 3. Gleichung (9*) verliert übrigens in der Nähe des Äquators ihre Brauchbarkeit, weil hier die Fehler der Azimutmessung stark vergröſsert in η_2 übergehen. Die Gleichung (10) aber ist auch hier anwendbar und von Nutzen.

Sie ist schon von *Laplace* angegeben worden (vergl. den Schluſs dieses Kapitels) und wird auch als das *Theorem von Laplace* bezeichnet.

Unter der Annahme ξ_1 und η_1 gleich null für *München* berechnet *Carl von Orff* S. 55 u. ff. der Abhandlung: *Bestimmung der geographischen Breite der Königl. Sternwarte bei München*, im Supplement zum 21. Bd. der Annalen derselben Sternwarte für mehrere Punkte nördlich und südlich der Alpen Lothabweichungen und gelangt S. 57 zu 6 Kontrollgleichungen aus doppelter Bestimmung von η:

	$L''-L'=$	$\alpha''-\alpha'=$	$(L''-L')\sin B=$
Mannheim	$-\ 4{,}71''$	$+\ 2\,94''$	$-\ 3{,}58''$
Pfänder	$-19{,}98$	$+14{,}84$	$-14{,}73$
Zürich	$+\ 0{,}71$	$-\ 0{,}1$	$+\ 0{,}5$
Rigi	$-\ 2{,}16$	$-\ 2{,}31$	$-\ 1{,}6$
Bern	$+\ 6{,}14$	$+\ 0{,}4$	$+\ 4{,}5$
Mailand	$+\ 6{,}21$	$+\ 0{,}2$	$+\ 4{,}4$

	$\alpha''-\alpha'+(L''-L')\sin B=$	Länge der Ketten
Mannheim	$-\ 0{,}64''$	60 Meilen
Pfänder „ „	$+\ 0{,}11$	22 „
Zürich „ „	$+\ 0{,}4$	38 „
Rigi „ „	$-\ 3{,}9$	33 „
Bern „ „	$+\ 4{,}9$	48 „
Mailand „ „	$+\ 4{,}6$	52 „

Für die geodätische Übertragung der Breite und Länge sowie des Azimuts wurden hierbei mit Vorteil zuerst Polarkoodinaten berechnet und dann die Formeln S. 298 angewandt.

Bessel hat 1837 in den *Astronom. Nachr.* Bd. 14, S. 269 u. ff. in der Abhandlung: *Über den Einfluſs der Unregelmäſsigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten* u. s. f. (vergl. auch *Abhandl.* Bd. 3, S. 19 u. ff, insbesondere S. 36) die Ausdrücke für die Koefficienten von ξ_1 und η_1 ohne Benutzung der reduzierten Länge m entwickelt, was nur mittelst Reihenentwicklung möglich ist. Seine Angaben sind jedoch in gleicher Weise entstellt wie die andern auf S. 295 erwähnten, ohne daſs indessen dieser Umstand ebenso wie bei jenen Angaben von erheblichem Einfluſs auf die Resultate der numerischen Rechnung wird.

§ 12. Genauigkeit der berechneten relativen Lotabweichungen.

Es mögen δs, $\delta\alpha'$, $\delta B'$, $\delta L'$ Verbesserungen der beobachteten wirklichen Werte für s, α, B und L bezeichnen. Dann geben uns die Gleichungen (10) S. 285 mit Rücksicht auf (10*) ebenda sofort folgende Ausdrücke, welche den Gleichungen (6), (7) und (8) S. 536, bezw. den drei Gleichungen (9) S. 536 linker Hand beizufügen sind:

$$\cos \dot{L}_{1.2}\,\delta B'_1 - \delta B'_2 + \varrho'' \cos \alpha_{2.1} \frac{\delta s}{a_0} + \sin L_{1.2} \cos B_1\, \delta\alpha'_{1.2} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c} \delta L'_1 - \delta L'_2 + \sin L_{1.2} \tan B_2\, \delta B'_1 \\ - \varrho'' \sec B_2 \sin \alpha_{2.1} \dfrac{\delta s}{a_0} - \sin \dfrac{s}{a_0} \sec B_2 \cos \alpha_{2.1}\, \delta\alpha'_{1.2} \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{c} -\sin L_{1.2} \sec B_2\, \delta B'_1 \\ + \varrho'' \tan B_2 \sin \alpha_{2.1} \dfrac{\delta s}{a_0} + \cos L_{1.2} \cos B_1 \sec B_2\, \delta\alpha'_{1.2} - \delta\alpha'_{2.1}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Denkt man sich aus den (9) S. 536 ξ_2 und η_2 berechnet, so stellt

jetzt (1) zugleich den Einflufs der Beobachtungsfehler im Sinne einer Verbesserung für ξ_2 dar; dagegen ist $-$ (2) $\cos B_2$ und $+$ (3) $\cot B_2$ der entsprechende Einflufs für η_2. Derselbe ist also gleich

$$\left.\begin{array}{l}(\delta L'_2 - \delta L'_1)\cos B_2 - \sin L_{1.2} \sin B_2\, \delta B'_1 \\ \quad + \varrho'' \sin \alpha_{2.1} \dfrac{\delta s}{a_0} + \sin \dfrac{s}{a_0} \cos \alpha_{2.1} \delta \alpha'_{1.2}\end{array}\right\} \qquad (2^*)$$

bezw.

$$\left.\begin{array}{r} - \sin L_{1.2} \csc B_2\, \delta B'_1 \\ + \varrho'' \sin \alpha_{2.1} \dfrac{\delta s}{a_0} + \cos L_{1.2} \cos B_1 \csc B_2\, \delta \alpha'_{1.2} - \cot B_2\, \delta \alpha'_{2.1}.\end{array}\right\} (3^*)$$

Ferner ist der Einflufs auf die linke Seite der *Kontrollgleichung* (10) S. 537 gleich

$$\left.\begin{array}{r}(\delta L'_1 - \delta L'_2) \sin B_2 - \sin L_{1.2} \cos B_2 \delta B'_1 \\ + \left(\cos L_{1.2} \cos B_1 \sec B_2 - \sin \dfrac{s}{a_0} \tan B_2 \cos \alpha_{2.1}\right) \delta \alpha'_{1.2} - \delta \alpha'_{2.1}.\end{array}\right\} (4)$$

Dieses zeigt, dafs die Kontrollgleichung unabhängig vom Fehler δs ist, dafs sie ferner in der Nähe des Äquators auch frei von den $\delta L'$ wird und dafs sie endlich jedenfalls eine gute Kontrolle der Azimutübertragung durch das Dreiecksnetz giebt.

Was die Bestimmung von η_2 anbetrifft, so zeigen die Ausdrücke (2*) und (3*) vorerst natürlich wieder die Unbrauchbarkeit der Azimutmessungen am Äquator, sodann aber überhaupt eine Überlegenheit der geographischen Längenbestimmung gegenüber den Azimutmessungen, weil $\delta \alpha'_{1.2}$ in (2*) selbst im Maximum nur den Faktor $\sin \frac{s}{a_0}$ hat, während in (3*) der Faktor jeden Wert annehmen kann. Es tritt zwar in (2*) noch das Fehlerglied $(\delta L'_2 - \delta L'_1) \cos B_2$ auf, wozu (3*) nichts Analoges hat, allein dieses vermindert den Genauigkeitsgrad der Bestimmung von η_2 nicht wesentlich, wenn telegraphische Längenbestimmungen nach den besten Methoden vorausgesetzt werden. Denn der mittlere Fehler einer solchen beträgt in der That nicht mehr, wie derjenige einer Azimutmessung.*) Während

*) Nach *Albrechts* vorläufiger Ausgleichung einiger Längenbestimmungen in den *Astronom. Nachr.* Bd. 89, No. 2132 S. 305 u. ff., finden wir als m. F. der besten Längenbestimmungen $\pm$ 0,75″. Dagegen würde nach 5 Doppelazimutbestimmungen des Geodätischen Instituts (mit 2 verschiedenen Instrumenten nach 2 verschiedenen Methoden) der m. F. einer Doppelazimutbestimmung gleich $\pm$ 0,58″. Dies sind jedoch extreme Werte, die sich durch definitive Bearbeitung der Endresultate wesentlich reduzieren werden. Wir vermuten in beiden Fällen auf $\pm \frac{1}{2}$″. Dagegen folgt aus 7 Doppelbestimmungen des Geodätischen Instituts in geographischer Breite als m. F. einer solchen Doppelbestimmung $\pm$ 0,29″.

aber $(\delta L'_2 - \delta L'_1)$ dem m. F. der Längendifferenz unmittelbar entspricht, setzt sich $\delta\alpha'_{1.2}$ aus dem m. F. der Azimutmessung und den Übertragungsfehlern durch das Dreiecksnetz zusammen. Dieser Teil wächst, insofern er zufälliger Natur ist, nach S. 531 (6*) mit der Quadratwurzel aus der Entfernung, insofern er aber von konstanten Ursachen abhängt, nach S. 528 (6) direkt mit der Entfernung.

Die Ausdrücke (1), (2*) und (3*) gestatten die mittleren Fehler in der Bestimmung von ξ_2 und η_2 zu berechnen, wenn die mittleren Fehler in B', L', s und α' gegeben sind.

Setzen wir beispielsweise in der mittleren Breite von 45° eine Kette von 20 an einander hängenden Dreiecken voraus, die im Azimut 45° eine Längenerstreckung von 637^{km} hat, so ergeben sich zunächst nach (5*) S. 530 und (6*) S. 531 mit $\mu = \pm 0{,}5''$ und $i = 10$ die mittleren Beträge

$$\delta s = \pm 3{,}5^m \quad \text{und} \quad \delta w = \pm 0{,}7'',$$

wenn w den Winkel zwischen der Anfangsseite und Langseite des Netzes bezeichnet. Nehmen wir ferner als mittlere Fehler der Breiten-, Längen- und Azimutbestimmung bezw. $\pm 0{,}3''$, $\pm 0{,}5''$ und $\pm 0{,}5''$, so wird der mittlere Betrag von

$$\delta B'_1 \text{ und } \delta B'_2 = \pm 0{,}3'', \; (\delta L'_2 - \delta L'_1) = \pm 0{,}5''$$
$$\delta\alpha'_{1.2} = \pm 0{,}5'' \pm 0{,}7'' = \pm 0{,}9''$$
$$\delta\alpha'_{2.1} - \delta\alpha'_{1.2} = \pm 0{,}5'' \pm 0{,}5'' \pm 1{,}0'' = \pm 1{,}2'',$$

wobei das 3. Glied des letzten Ausdruckes nach Formel (7*) S. 531 ermittelt wurde. Die Ausdrücke (1), (2*) und (3*) geben jetzt:

$$\pm 0{,}3 \pm 0{,}3 \pm 0{,}7 . 0{,}11 \pm 0{,}07 . 0{,}9 = \pm 0{,}4'' \text{ für } \xi_2$$
$$\pm 0{,}7 . 0{,}5 \pm 0{,}07 . 0{,}3 \pm 0{,}7 . 0{,}11 \pm 0{,}07 . 0{,}9 = \pm 0{,}4'' \;\; \text{„} \;\; \eta_2$$
$$\pm 0{,}14 . 0{,}3 \pm 0{,}7 . 0{,}11 \pm 1{,}2 = \pm 1{,}2'' \;\; \text{„} \;\; \eta_2.$$

Die grofse Überlegenheit der geographischen Längenbestimmungen tritt hier deutlich hervor.

Immerhin verdienen die Azimutmessungen einige Aufmerksamkeit, denn sie lassen sich leichter als Messungen geographischer Längen anstellen. In den meisten Fällen, wo es sich um die Ermittlung der Lotabweichungen einer gröfseren Anzahl astronomischer Stationen handelt, wird man nur Breite und Azimut bestimmen können. Damit aber in den η keine Fehleranhäufung eintritt, sind für einige gröfsere

Distanzen auch geographische Längen zu ermitteln. Den Azimutmessungen fällt dann die Aufgabe zu, die η dazwischen zu *interpolieren.*

Der Anblick der obigen Fehlerausdrücke giebt noch zu der Bemerkung Veranlassung, dafs bei *sehr* beträchtlichen Ausdehnungen die Bestimmung von ξ und η aus den geographischen Breiten und Längen wegen der Fehler in s und α' eine sehr ungenaue werden kann. Dieses ist indes unvermeidlich. Der Fehler in ξ und η wird übrigens wesentlich kleiner, als obige Ausdrücke ihn angeben, wenn nur bei grofser Ausdehnung des triangulierten Gebietes stets *mehrere* Grundlinien gemessen werden und bei der Ausgleichung des Netzes hierauf, sowie auf die *Kontrollgleichungen* (10) S. 537, welche in gehöriger Anzahl zu schaffen sind, Rücksicht genommen wird.

In den *Astronom. Nachr.* Bd. 90, No. 2144 und Bd. 91, No. 2170 giebt *Sadebeck* den Einflufs der Lotabweichung auf die Horizontalwinkelmessung vom Brocken an. Es findet sich für den Brocken zur Ermittlung der Lotabweichung, wobei Seeberg bei Gotha als Ausgang dient, mit $\xi_1 = 0$ und $\eta_1 = 0$:

astron.	$B'_2 = 51^\circ 48' 10{,}59''$	$L'_{1.2} = 26{,}757^s$	$\alpha'_{2.1} = 355^\circ 18' 29{,}665''$
geodät.	$B''_2 = \quad 1{,}41$	$L''_{1.2} = 26{,}986$	$\alpha''_{2.1} = \quad 21{,}430$
Es ist also nach unserer Bezeichnungsweise	$\xi_2 = \quad -9{,}18''$	$\eta_2 \sec B_2 = -3{,}435''$	$\eta_2 \tan B_2 = \quad -8{,}235''$
		$\eta_2 = -2{,}12''$	$\eta_2 = \quad -6{,}48''$.

Der Fehler der Kontrollgleichung ist 5,5″, was auf einen groben Fehler hinweist. *Sadebeck* nimmt eine Ausgleichung vor, die jedoch verfehlt ist, indem sie 2 Bedingungsgleichungen voraussetzt, obgleich die 3 Bestimmungen für 2 Elemente der Lotabweichung doch nur einer Bedingung unterliegen können. Es ist dies eben die Kontrollgleichung. Jene 2 Gleichungen kommen dadurch zustande, dafs die Richtung der Lotabweichung nach einer 1. Rechnung in versteckter Weise als fest gegeben eingeführt wird.

Wegen des zu vermutenden groben Fehlers erscheint eine Ausgleichung unthunlich. Will man aber doch ein Mittel bilden, so genügt das einfache arithmetische Mittel $\eta_2 = -4{,}3''$ vollständig. Denn nach (2*) und (3*) S. 539 sind die wesentlichsten Teile der Fehler in den beiden Werten von η_2 gleich

$$(\delta L'_2 - \delta L'_1) \cos B_2 \quad \text{bezw.} \quad (\delta \alpha'_{1.2} - \delta \alpha'_{2.1}) \cot B_2$$

mit

$$\cos B_2 = 0{,}62 \qquad\qquad \cot B_2 = 0{,}79\,.$$

Unter der Voraussetzung gleichen mittleren Betrags von $\delta L'_2 - \delta L'_1$ und $\delta \alpha'_{1.2} - \delta \alpha'_{2.1}$ ist daher das Verhältnis der Gewichte gleich $0{,}79^2 : 0{,}62^2$. Bei der gänzlichen Ungewifsheit über die Zulässigkeit jener Voraussetzung ist aber diese Ungleichheit der Gewichte ohne Bedeutung.

Übrigens entsteht möglicherweise der grofse Widerspruch nur dadurch, dafs dem $\alpha''_{2.1}$ nicht ein auf Seeberg, sondern ein auf Inselsberg gemessenes Azimut zu grunde liegt (vergl. weiterhin S. 568). Der zweite obiger

Werte von η_2 würde alsdann sehr stark von der Lotabweichung auf Inselsberg beeinflufst sein.

§ 13. **Die Ausführung der Rechnung** wird sich in der Praxis verschieden gestalten können, je nach der Häufigkeit der astronomischen Stationen und der Vollständigkeit der Beobachtungen auf denselben. Wir wollen drei Fälle etwas detaillierter behandeln.

Im 1. Falle nehmen wir an, dafs keine überschüssigen Gleichungen zur Bestimmung der Lotabweichungen entstehen, indem auf jeder astronomischen Station (eine einzige ausgenommen) nur entweder das Azimut einer Dreiecksseite oder der Längenunterschied gegen eine andere astronomische Station gemessen ist.

Im 2. Falle setzen wir voraus, dafs auf allen astronomischen Stationen Breite und Azimut, zum Teil aber auch Längendifferenzen gemessen seien.

Im 3. Falle nehmen wir dasselbe an, zugleich aber, dafs alle geodätischen Stationen auch astronomische Stationen seien.

In allen drei Fällen setzen wir voraus, dafs die Bestimmungen der Längendifferenzen ein zusammenhängendes Netz bilden und dafs die Bedingungsgleichungen, welche sich durch überschüssige Bestimmung von Längendifferenzen ergeben, bereits durch eine Ausgleichung befriedigt worden sind und somit als definitive angesehen werden können.*) Dieser Vorgang erscheint so lange völlig zulässig, als in den Kontrollgleichungen des Netzes, S. 537 (10), die Fehler der Azimutübertragung dominieren, so dafs es ein sehr zweifelhafter Gewinn sein würde, die geographischen Längen zu verbessern. Gegenwärtig ist dieses aber wohl bei allen Gradmessungsnetzen der Fall, weil infolge der Schwierigkeit der Längenbestimmung die Anzahl der sowohl in Länge als auch in Azimut behandelten Stationen immer eine verhältnismäfsig kleine bleiben wird.

Auch die Breitenbestimmungen können eventuell mit Vorteil, wie es mehrfach geschehen ist, einer separaten Ausgleichung dahin unterworfen werden, dafs man aufser den geographischen Breiten auch die Deklinationen der Sterne (und bei α Urs. min. sowie den Polsternen überhaupt auch die Rektascensionen) als Unbekannte ansieht und alles durch eine gemeinsame Ausgleichung bestimmt.**)

---

*) Vergl. hierzu u. a. die S. 539 u. citierte Arbeit *Albrechts*.

**) In dieser Weise gingen *W. Struve* bei der Gradmessung in den russischen Ostseeprovinzen und *James* bei der englischen Gradmessung vor (vergl. das mehrfach erwähnte Hauptwerk der englischen Landesvermessung). Da in neuester Zeit mit besonderer Rücksicht auf Gradmessungszwecke sehr scharfe Sternörter abgeleitet worden sind, so kann das Verfahren vielleicht dahin modificiert werden, dafs man die Sternörter als gegeben ansieht, aber die auf der einzelnen

Man wird alsdann zunächst nur die Breitendifferenzen erhalten, aber sehr genau, und kann schliefslich mit strenger Beibehaltung derselben auch noch die geographischen Breiten selbst herstellen. Einen Vorteil wird allerdings dies Verfahren nur bieten, wenn auf benachbarten Stationen hinlänglich viel gemeinsame Sterne nach derselben Methode beobachtet sind, sodafs die Breitendifferenzen frei von den Deklinationen und Instrumentalfehlern werden. Dafs es aber nötig ist, noch immer die Genauigkeit der Breitendifferenzen (welche offenbar am meisten interessieren) zu verschärfen, zeigen die verhältnismäfsig grofsen Unterschiede der Bestimmungen derselben Breiten nach verschiedenen Methoden.

§ 14. **1. Fall praktischer Bestimmung der Lotabweichung.** Die Formeln (6) bis (8) oder (9) S. 536 gestatten die Berechnung von ξ und η für alle astronomischen Stationen, wenn diejenigen einer 1. Station P_1 unbestimmt gelassen werden. Als solche denken wir uns eine Station gewählt, die im Netz der Längenbestimmungen vorkommt, für welche aber auch die geographische Breite und ein Azimut gemessen sind.

Wir nehmen endlich noch an, dafs das Dreiecksnetz im Zusammenhange ausgeglichen und demnach ohne Widersprüche sei, dafs ferner von P_1 nach allen astronomischen Stationen Polarkoordinaten, also die Längen der Radienvektoren sowie die Winkel zwischen denselben und den anschliefsenden Dreiecksseiten in ihren Endpunkten berechnet seien. Da nun in P_1 das Azimut einer Dreiecksseite direkt beobachtet ist, kann man sofort die $\alpha'_{1.i}$ für jede Station P_i angeben. $\alpha'_{i.1}$ findet sich aus dem beobachteten Azimut einer Dreiecksseite in P_i und den berechneten Winkeln.

Alsdann kann man nach früher angegebenen Formeln aus $s_{1.i}$ und $\alpha'_{1.i}$ auf B''_i, L''_i und $\alpha''_{i.1}$ übergehen. Für jeden Punkt $P_2, P_3 \ldots P_i \ldots$, wo Breite und Länge oder Azimut gemessen sind, erhält man nach den eingangs genannten Formeln eine Gleichung für ξ_i und eine für η_i, die sich in die nachstehenden symbolischen Formen bringen lassen:

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= -\,l_i + a_i\xi_1 + b_i\eta_1 \\ \eta_i &= -\,l'_i + a'_i\xi_1 + b'_i\eta_1 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Hierin sind l_i und l'_i Sekundenwerte, a_i und b_i Koefficienten. Diese Bestimmung von ξ_i und η_i ist offenbar eine nur gerade hinreichende ohne jede Kontrolle, sodafs alle Beobachtungsfehler und die Reduktions-

Station kaum vollständig eliminierbaren Instrumentalfehler durch möglichst identischen Vorgang bei der Breitenbestimmung auf verschiedenen Stationen streng zu eliminieren sucht.

fehler der Azimute ganz in die Werte ξ_i und η_i eingehen. Ein Nutzen der Längenbestimmungen zur Verbesserung der η aus den Azimuten tritt nicht hervor, weil sich eben nirgends doppelt bestimmte η vergleichen lassen.

Um schliefslich definitive Werte der ξ und η zu erhalten, ist für ξ_1 und η_1 eine Annahme zu machen, d. h. das Referenzellipsoid ist in eine bestimmte Lage zur Lotrichtung P_1 zu bringen:

Man wird bei der Wahl von ξ_1 und η_1 am besten so verfahren, dafs die Summe der $\xi_i^2 + \eta_i^2$ ein Minimum wird in Bezug auf ξ_1 und η_1 als Unbekannte (Variable). Diese Wahl ist wenigstens dann eine sehr passende, sobald die astronomischen Stationen gleichmäfsig über einen Teil der Geoidfläche verbreitet sind.

Die Ausgleichung ist eine solche nach vermittelnden Beobachtungen und ohne alle Schwierigkeiten. Bezeichnen wir ξ_1 und η_1, insofern sie Unbekannte sind, mit x und y, so lauten für die Fehler $\xi_1, \xi_2 \ldots \eta_1, \eta_2 \ldots$ die Fehlergleichungen in symbolischer Form:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_1 = \cdot \cdot + \quad x \quad \cdot \cdot & \eta_1 = \cdot \cdot \cdot \cdot + \quad y \\ \xi_2 = - l_2 + a_2 x + b_2 y & \eta_2 = - l'_2 + a'_2 x + b'_2 y \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot , \end{array}\right\} \qquad (2)$$

die nach *Ausgleichungsrechnung* S. 115 u. ff. weiter zu behandeln sind.

Wir bemerken hierbei nur noch, dafs man beiden Fehlergleichungssystemen und allen einzelnen Gleichungen so lange unbedingt *dasselbe Gewicht* erteilen mufs, als nicht die Beobachtungs- und Reduktionsfehler nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung so anschwellen können, dafs die ξ und η von ihren wahren Werten um Beträge abweichen, die selbst von der Ordnung dieser Werte, also Beträge von mehreren Sekunden sind. Nach § 12 S. 540 wird dieses zuerst bei Azimutmessungen eintreten können.

Was die Berechnung von B''_i, L''_i und $\alpha''_{i.1}$ anlangt, wofür oben die Benutzung von Polarkoordinaten vorausgesetzt wurde, so ist noch darauf hinzuweisen, dafs dieselbe auch ohne solche erfolgen kann. Es genügt und ist unter Umständen vorteilhafter, von Punkt zu Punkt die Breite und Länge sowie das Azimut zu übertragen. Diese Übertragung kann erfolgen entweder durch die Dreiecksseiten selbst oder durch eingeschaltete Hilfslinien, die vielleicht die benachbarten astronomischen Stationen verbinden. Natürlich giebt sie dieselben Resultate, wie die andere oben vorausgesetzte Rechnung, falls sich diese durchaus auf die für P_1 erhaltenen astronomischen Beobachtungswerte und das Dreiecksnetz stützt und nirgends etwa noch ein anderes beobachtetes

Azimut zur weiteren Übertragung angewandt wird. Der Form nach besteht indes der Unterschied, dafs nicht das $\alpha''_{i.1}$ für einen Punkt P_i erhalten wird, sondern das Azimut der letzten zur Übertragung benutzten Linie, welches hier vorübergehend mit $\alpha''_{i.k}$ bezeichnet werden soll. Die Azimutbeobachtung in P_i giebt hierzu mit Benutzung der Winkel im Netze unmittelbar einen Wert $\alpha'_{i.k}$, der sofort mit $\alpha''_{i.k}$ verglichen werden kann.

In der Gleichung, welche der Azimutmessung entspricht, ist nun bei diesem Vorgange an Stelle von $\alpha''_{i.1} - \alpha'_{i.1}$ zu setzen $\alpha''_{i.k} - \alpha'_{i.k}$. Beide Werte stimmen aber mit einander überein, da die Differenzen $\alpha''_{i.1} - \alpha''_{i.k}$ und $\alpha'_{i.1} - \alpha'_{i.k}$ denselben Winkelwert bezeichnen, wie sich mit Rücksicht auf die S. 543 angegebene Berechnungsweise von $\alpha'_{i.1}$ leicht findet. (Ein Unterschied entsteht nur dann, wenn das Netz für die verschiedenen Berechnungen etwas verschiedene Orientierung hat, was auch einen Unterschied dieser Winkel bedingt. Derselbe wird aber, wie aus § 19 S. 405 zu ersehen ist, verschwindend klein, weil die den beiden Orientierungen entsprechenden Unterschiede in den geographischen Breiten der Punkte in der Regel so geringfügig ausfallen, dafs sie ohne Einflufs auf die bei Anwendung des erweiterten *Legendre*schen Theorems zu berechnenden Reduktionsglieder bleiben.)

Wendet man anstatt der Polarkoordinaten die zuletzt besprochene successive Übertragung an, so müssen für die Differentialformeln schliefslich noch die $\alpha_{1.i}$ und $\alpha_{i.1}$, sowie eventuell die $s_{1.i}$ berechnet werden, weil diese Gröfsen in denselben ohne Weitläufigkeit nicht wohl entbehrlich sind. Selbstverständlich reicht hier eine mehr oberflächliche Rechnung mit wenig Decimalen aus, die zweckmäfsig die Formeln des § 23 S. 313 u. ff. in abgekürzter Gestalt benutzen wird.

Ein Beispiel zu vorstehender Aufgabe bietet die Vermessung von Grofsbritannien und Irland, vergl. das Hauptwerk derselben: *Ordnance Trigonometrical Survey, Principal Triangulation* S. 686 u. ff. Hier sind für 35 Stationen die Breite, für 5 Stationen die Längendifferenz mit Greenwich und für 35 Stationen, von denen keine mit einer Längenstation identisch ist und die z. T. auch nicht mit den Breitenstationen zusammenfallen, die Azimute zur Verwertung gelangt. Den Rechnungen wurden *Airys* Elemente für das Erdellipsoid (vom Jahre 1830) zu grunde gelegt.

Man blieb jedoch dabei nicht stehen, sondern fügte den Gleichungen für ξ und η noch Glieder bei für einen Zuwachs von a_0 und c^2 und bestimmte nunmehr das Minimum von $\xi_i^2 + \eta_i^2$ in Bezug auf x, y und diese beiden unbekannten Zuwachse der Elemente der Meridianellipse. In Bezug auf die Gewichtsannahme sind mehrere Ausgleichungen nach verschiedenen Gesichtspunkten durchgeführt.

Diese vorzügliche und zum Studium höchst empfehlenswerte Arbeit ist auch dadurch interessant, dafs für eine gröfsere Anzahl Stationen Lotablenkungen durch benachbarte sichtbare Massenunregelmäfsigkeiten ermittelt wurden. Die Vergleichung (auf die wir im 2. Band zurückkommen) zeigt, dafs in der That zum gröfsten Teil die betreffenden Lotabweichungen gegen das wie angegeben ermittelte Referenzellipsoid durch die lokalen Ursachen erklärbar sind (S. 699; wie weit in der Herbeiziehung solcher zu gehen ist, siehe S. 700).*)

Einige der erwähnten Ausgleichungsrechnungen sind nach vorheriger Korrektion wegen lokaler Attraktion ausgeführt. Schliefslich ist (S. 710—713) ein Ellipsoid mit der Abplattung 1 : 280,4 als plausibelstes ausgewählt und der definitiven Landesvermessung, sowie den für diese beizubehaltenden geographischen Positionen zu grunde gelegt (S. 717).

Die Details lohnen die Mühe des Nachschlagens.

§ 15. **2. Fall praktischer Bestimmung der Lotabweichung.** Dieser unterscheidet sich vom vorigen dadurch, dafs die Bestimmung von η für einige Punkte eine doppelte ist, indem sie nämlich sowohl aus der Längendifferenz, als auch aus der Azimutmessung erfolgt. Wenn wir nun jene als sehr genau bestimmt und die gegenseitigen Entfernungen der ins Netz der Längenbestimmungen eingeführten Punkte nicht gerade klein voraussetzen, sodafs die Azimutdifferenzen sehr erheblich ungenauer werden als die Längendifferenzen, so erscheint es passend und zugleich bequem, η aus der Längenbestimmung definitiv beizubehalten.

Wir verzichten also im Folgenden auf eine Verbesserung der geographischen Breiten und Längen und verbessern nur die Azimute und die Stücke des geodätischen Netzes.

Der Rechnungsgang kann nun zunächst wie im 1. Falle angelegt werden. Es entsteht dann aber einige Schwierigkeit, die Kontrollen für die Azimutmessungen, welche von der an einigen Punkten stattfindenden Doppelbestimmung von η geliefert werden, auszunutzen.

Streng genommen mufs auf diese Kontrollen schon bei der Netzausgleichung Rücksicht genommen werden. Wenn das, soviel uns bekannt, noch nirgends geschehen ist, so hat dieses wohl seinen hauptsächlichsten Grund in der geringen Genauigkeit der Bestimmung geographischer Längen bis in die neueste Zeit, infolge welcher in der That die Kontrollen kaum eine Bedeutung für die Winkel des Netzes, sondern lediglich für jene Längenbestimmungen allein beanspruchen konnten.

*) Vergl. in dieser Beziehung auch das Werk: *Die bayerische Landesvermessung.*

Aufserdem nehmen die betreffenden Kontrollgleichungen eine etwas ungewöhnliche Form an, wie man erkennt, wenn man bei Ableitung der Gleichung (10) S. 537 ξ_1 und η_1 nicht null setzt, sondern als unbestimmte Gröfsen beibehält. Alsdann erscheinen in der modificierten Gleichung (10) zwei neue Glieder mit ξ_1 und η_1. Die Koefficienten dieser beiden Gröfsen sind zwar in der Regel klein, aber es ist doch unzweifelhaft notwendig, sie zu berücksichtigen, was in *der* Form zu geschehen hat, dafs alle Ergebnisse der Ausgleichungsrechnung als lineare Funktionen von ξ_1 und η_1 dargestellt werden.

Die hierbei entstehende Komplikation der Rechnung in Verbindung mit der Schwierigkeit, die relativen Genauigkeiten der Längenbestimmungen und der Azimut- und Winkelbeobachtungen richtig einzuführen, werden vielleicht auch jetzt noch als triftige Gründe gelten, die geodätische Netzausgleichung zunächst mit jenen Kontrollen nicht zu vermischen.

Sehen wir also von einer direkten strengen Behandlung ab, indem wir uns die Netzausgleichung wie üblich erfolgt denken, so bleibt die Aufgabe zu lösen, *nachträglich* jene Kontrollen zu verwerten.

Ein Näherungsverfahren ist folgendes: Da nur die astronomischen Stationen interessieren, substituieren wir an Stelle des primären Dreiecksnetzes ein ideales, welches benachbarte astronomische Stationen zu Dreiecken oder Polygonen verbindet.

In diesem idealen Netz betrachten wir nicht nur die Richtungen, d. h. die Azimute bis auf eine jeder Station eigentümliche Konstante, sondern auch die Seiten als unabhängige Beobachtungsgröfsen, deren Gewichte nach Mafsgabe der Seitenlänge geschätzt werden (§ 8 S. 528 u. ff. giebt eine Andeutung in dieser Hinsicht).

Die Wahl des idealen Netzes ist mehr oder weniger willkürlich, aber nicht gleichgültig. Um gar nichts von der Strenge zu opfern, hätte man die N_a astronomischen Punkte durch einen *offenen* Zug von $N_a - 1$ Linien zu verbinden und diese Linien, sowie die $N_a - 2$ Zwischenwinkel als Ergebnisse der geodätischen Netzausgleichung in die allgemeine Netzausgleichung einzuführen.

Hierbei wären aber die $2N_a - 3$ Stücke nicht als unabhängig anzunehmen, sondern es wäre ein System von $2N_a - 3$ Funktionen derselben zu bilden, welche dem Ergebnis der geodätischen Netzausgleichung *äquivalent* sind und die ihrerseits erst als unabhängige Gröfsen in die Gesamtausgleichung eingeführt werden dürften.

Die Bildung derartiger äquivalenter Funktionen (Beobachtungen) zeigt im allgemeinen § 27 S. 222 u. ff. unserer *Ausgleichungsrechnung*. Indessen ist es unvorteilhaft, weil zu mühsam, eine strenge Ausgleichung auf diese Art herbeiführen zu wollen. Da es sich aber um eine An-

näherung allein handelt, so hat die eben gegebene Erörterung doch den Gewinn zu zeigen, dafs darnach zu streben ist, im idealen Netz ein dem Ergebnis der geodätischen Netzausgleichung möglichst äquivalentes System von Beobachtungen zu erhalten.

Indem man im idealen Netz mehr als $2N_a - 3$ Stücke annimmt, wird es weit eher möglich werden als bei nur $2N_a - 3$ solchen, sie so zu wählen, dafs sie selbst als unabhängig zu betrachten sind. Im allgemeinen läfst sich übersehen, dafs es vorteilhaft ist, wenn die Linien des idealen Netzes das primäre Netz möglichst gleichmäfsig überziehen, und dafs sie da zu vermeiden sind, wo dieses letztere keine direkte Verbindung giebt. Indem nicht nur Winkel, sondern auch lineare Längen als fingierte Beobachtungen in das ideale Netz eingeführt werden, resultiert der Vorteil, nicht an wohlgeformte Dreiecke und an Dreiecke überhaupt gebunden zu sein, sondern auch Polygone anwenden zu können.

Für die praktische Anwendung des Vorstehenden wird es notwendig werden, an einer Reihe von Fällen die günstigste Wahl idealer Netze zu studieren. Hier würde dieses zu weit führen. Wir hoffen aber später darauf zurückkommen zu können und es sei für jetzt nur bemerkt, dafs man sich bei diesem Studium, welches an *ebenen* Figuren stattfinden darf, am besten rechtwinkliger Koordinaten bedienen wird. In ähnlicher Weise wie § 10 S. 495 u. ff. angegeben ist, hat man die Normalgleichungen für die Koordinaten der Netzpunkte herzustellen, sodann aber diejenigen der nichtastronomischen Punkte zu eliminieren. Alsdann mufs mittelst eines idealen Netzes dasselbe System näherungsweise hergeleitet werden.

Betrachten wir jetzt irgend eine Linie $P_i P_k$ des idealen Netzes und denken uns B''_k, L''_k und α''_{ki} von P_i aus mittelst s_{ik}, α'_{ik}, B'_i und L'_i berechnet. Bezeichnen wir nun mit δs_{ik}, $\delta\alpha'_{ik}$ und $\delta\alpha'_{ki}$ Verbesserungen von s_{ik}, α'_{ik} und α'_{ki}, so ergeben sich, alle Glieder auf Sekunden reduziert, folgende drei Gleichungen (vergl. § 11 und 12 S. 534 u. ff.):

$$\left.\begin{aligned}
&B''_k - B'_k - \xi_k && + p_1\xi_i + p_2\eta_i + p_3\delta s_{ik} + p_4\delta\alpha'_{ik} + \cdots && = 0\\
&L''_k - L'_k + \eta_k \sec B_k && + q_1\xi_i + q_2\eta_i + q_3\delta s_{ik} + q_4\delta\alpha'_{ik} + \cdots && = 0\\
&\alpha''_{ki} - \alpha'_{ki} - \eta_k \tan B_k && + r_1\xi_i + r_2\eta_i + r_3\delta s_{ik} + r_4\delta\alpha'_{ik} - \delta\alpha'_{ki} + \cdots && = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hierin haben die Koefficienten p, q, r nachstehende Näherungswerte:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \cos L_{ik} & q_1 &= \sin L_{ik} \tan B_k\\
p_2 &= \sin L_{ik} \sin B_i & q_2 &= -\left\{\begin{array}{l}\sec B_i\\ + \sin \dfrac{s_{ik}}{a_0} \tan B_i \sec B_k \cos \alpha_{ki}\end{array}\right\}\\
p_3 &= \frac{\varrho''}{a_0} \cos \alpha_{ki} & q_3 &= -\frac{\varrho''}{a_0} \sec B_k \sin \alpha_{ki}\\
p_4 &= -\sin \frac{s_{ik}}{a_0} \sin \alpha_{ki} & q_4 &= -\sin \frac{s_{ik}}{a_0} \sec B_k \cos \alpha_{ki}\\
&= \sin L_{ik} \cos B_i & &
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
r_1 &= -\sin L_{ik} \sec B_k \\
r_2 &= \cos L_{ik} \sin B_i \sec B_k \\
r_3 &= \frac{\varrho''}{a_0} \tan B_k \sin \alpha_{ki} \\
r_4 &= \cos \frac{s_{ik}}{a_0} + \sin \frac{s_{ik}}{a_0} \tan B_k \cos \alpha_{ki} \\
&= \cos L_{ik} \cos B_i \sec B_k\,.
\end{aligned}\right\} \text{zu } (2)$$

In strenger Form lauten dagegen diese Koefficienten nach S. 536 (6) bis (8), sowie nach S. 280 (6):

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{W_k^3}{W_i^3}\left\{\cos \Delta\alpha + \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\right] \sin \alpha_{ik} \sin \alpha_{ki}\right\} \\
q_1 &= -\frac{(1-e^2)W_k}{W_i^3}\left\{\sin \Delta\alpha - \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\right] \sin \alpha_{ik} \cos \alpha_{ki}\right\} \sec B_k \\
r_1 &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}}\frac{1-e^2}{W_i^3}\left\{\begin{aligned}&\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik} + 1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\right] \cos \Delta\alpha \sin \alpha_{ki} - \frac{\sin^2 \Delta\alpha}{\sin \alpha_{ik}} \\ &+\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik}\right]\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\right] \sin^2 \alpha_{ki} \sin \alpha_{ik}\end{aligned}\right\} \\
p_2 &= -\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\frac{W_k^3}{1-e^2} \tan B_i \sin \alpha_{ki} \\
q_2 &= -\left\{1 + \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} W_k \sin B_i \sec B_k \cos \alpha_{ki}\right\} \sec B_i \\
r_2 &= \left\{\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik} + \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} W_k \tan B_k \cos \alpha_{ki}\right\} \tan B_i \\
p_3 &= \frac{\varrho''}{a_0}\frac{W_k^3}{1-e^2} \cos \alpha_{ki} \qquad\qquad p_4 = -\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\frac{W_k^3}{1-e^2} \sin \alpha_{ki} \\
q_3 &= -\frac{\varrho''}{a_0} W_k \sec B_k \sin \alpha_{ki} \qquad q_4 = -\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} W_k \sec B_k \cos \alpha_{ki} \\
r_3 &= \frac{\varrho''}{a_0} W_k \tan B_k \sin \alpha_{ki} \qquad r_4 = \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik} + \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} W_k \tan B_k \cos \alpha_{ki}\,.
\end{aligned}\right\} (3)$$

Hierbei ist $\Delta\alpha = \alpha_{ki} - \alpha_{ik} - 180^0$ und $W_k = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_k}$; im übrigen vergleiche § 11 S. 283.

Enthält das ideale Netz Q astronomische Punkte und darunter aufser Punkt P_1 Δ Punkte mit geographischer Längenbestimmung, sind ferner R Verbindungslinien angenommen und für jede derselben die 3 Gleichungen (1) aufgestellt, so ist zunächst zu beachten, dafs als Unbekannte auftreten $2\,(Q-1)$ Lotabweichungskomponenten ξ und η, ausgenommen ξ_1 und η_1, welche unbestimmt bleiben und von der Definition des Referenzellipsoids abhängen. Unbekannt sind ferner

$Q - \varDelta - 1$ geographische Längen L', welche nur symbolisch in die betreffenden Gleichungen (1) eingeführt werden können. (Ist z. B. L_i' unbekannt, so erscheint L_k'' in der Form $L_k'' = L_i' +$ einem Zahlwert.)

Eliminiert man diese $3(Q-1) - \varDelta$ Unbekannten, so bleiben

$$3(R - Q + 1) + \varDelta \tag{4}$$

Bedingungsgleichungen zwischen den δs und $\delta\alpha$ übrig, welche nunmehr gestatten, die δs und $\delta\alpha$ als Funktionen von ξ_1 und η_1 herzuleiten.

Fehlte jede geographische Längenbestimmung (oder allgemeiner: wäre kein astronomischer Punkt gleichzeitig in Azimut und geographischer Länge bestimmt), so hätte man nur $3(R - Q + 1)$ Gleichungen, die ganz ohne Widerspruch erfüllt sein müfsten, da sie nur Stücke des bereits ausgeglichenen geodätischen Netzes mit einander kombinieren. Zu diesen *Polygongleichungen* treten aber noch $\varDelta$ Gleichungen, die der *Kontrollgleichung* (10) S. 537 entsprechen.

Die Ausgleichung erfolgt nun auf Grund dieser Bedingungsgleichungen in der Weise, dafs die für alle Linien des idealen Netzes zu bildende Summe

$$g_s \delta s^2 + g_v v^2 + g_u u^2 \tag{5}$$

ein Minimum wird, wobei die g Gewichte bedeuten und $-u$ dem Fehler der astronomischen Azimutbestimmung der einzelnen Stationen entspricht, während v nur den Fehler der geodätischen Richtungsangabe allein bezeichnet.*)

In den Gleichungen (1) ist demgemäfs $\delta\alpha' = v - u$ zu nehmen; u konstant für alle Richtungen von einer Station aus.

An Stelle von (5) setzt man für die numerische Rechnung besser

$$g\left(\frac{\varrho''}{a_0}\,\delta s\right)^2 + g'\left(\frac{\mathfrak{m}}{a_0}\,v\right)^2 + g''\left(\frac{\mathfrak{m}}{a_0}\,u\right)^2, \tag{6}$$

wo nun g, g' und g'' bezw. umgekehrt proportional den mittleren Werten der drei Quadrate

$$\left(\frac{\varrho''}{a_0}\,\delta s\right)^2 \qquad \left(\frac{\mathfrak{m}}{a_0}\,v\right)^2 \qquad \left(\frac{\mathfrak{m}}{a_0}\,u\right)^2$$

zu nehmen sind. ($\mathfrak{m}$ kann in diesen Ausdrücken ohne Schaden durch

*) Gehen von einer Station n längere Richtungen aus, deren gegenseitige Lage durch Rechnung ermittelt wurde, so besteht das Resultat in n Zahlen, deren Differenzen der gegenseitigen Lage der Richtungen entsprechen. Diese geodätischen Richtungsangaben werden zu astronomischen d. h. zu Azimuten durch die Beifügung des Orientierungsfehlers auf Grund einer Azimutbestimmung. Da diese aber keine der Richtungen direkt betrifft, erscheint es am angemessensten, $\delta\alpha'$ für *alle* Richtungen in $v - u$ zu zerspalten und nicht für eine Richtung etwa v einfach zu unterdrücken, welches letztere überdies keinesfalls zulässig ist.

s ersetzt werden.) Man hat jetzt den Vorteil, es mit Fehlergröſsen zu thun zu haben, die auf gleiche Maſseinheit reduziert sind.

Sind die δs und $\delta \alpha'$ ermittelt, so ergeben sich aus den (1) die ξ und η. Alsdann kann die weitere Behandlung wie § 14 S. 543 u. ff. vor sich gehen.

§ 16. 2. Fall, Fortsetzung: Näherungsweise Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. Sowohl im Hinblick auf die Anzahl der Gleichungen, wie auch zur Erzielung einer gröſseren Übersichtlichkeit wird sich vielfach die Anwendung der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen empfehlen.

Wir denken uns zunächst irgendwie durch scharfe Rechnung ein System zusammengehöriger Werte der B, L, s und α für alle astronomischen Stationen abgeleitet, welche Werte wir z. B. für die Linie $P_i P_k$ mit

$$\overline{B}_i \quad \overline{B}_k \quad \overline{L}_i \quad \overline{L}_k \quad \bar{s}_{ik} \quad \bar{\alpha}_{ik} \quad \bar{\alpha}_{ki}$$

bezeichnen. Mit Rücksicht auf die (1) S. 535 erhalten wir als Verbesserungen dieser Gröſsen, um sie auf die günstigsten ellipsoidischen Werte zu bringen:

$$\left.\begin{aligned}
dB_i &= B'_i + \xi_i - \overline{B}_i + \cdots \\
dL_i &= L'_i - \eta_i \sec B_i - \overline{L}_i + \cdots \\
d\alpha_{ik} &= \alpha'_{ik} + \delta\alpha'_{ik} + \eta_i \tan B_i - \bar{\alpha}_{ik} + \cdots \\
ds_{ik} &= s_{ik} + \delta s_{ik} - \bar{s}_{ik} + \cdots \\
dB_k &= B'_k + \xi_k - \overline{B}_k + \cdots \\
dL_k &= L'_k - \eta_k \sec B_k - \overline{L}_k + \cdots \\
d\alpha_{ki} &= \alpha'_{ki} + \delta\alpha'_{ki} + \eta_k \tan B_k - \bar{\alpha}_{ki} + \cdots .
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Man kann nun entweder diese dB, dL, $d\alpha$ und ds für δB, δL, $\delta \alpha$ und δs in die Gleichungen (4) S. 282 einführen, wobei nur die Indices i und k bezw. für 1 und 2 zu nehmen sind — oder, was vorzuziehen ist, man behält die dB und dL als Unbekannte (anstatt ξ und η im andern Falle) bei.

Indem wir diesen Weg einschlagen, müssen wir aus den Ausdrücken für $d\alpha$ die Gröſsen η eliminieren. Wir setzen also mit Rücksicht auf die (1)

$$\left.\begin{aligned}
d\alpha_{ik} &= \alpha'_{ik} - \bar{\alpha}_{ik} + \delta\alpha'_{ik} + (L'_i - \overline{L}_i - dL_i) \sin B_i + \cdots \\
d\alpha_{ki} &= \alpha'_{ki} - \bar{\alpha}_{ki} + \delta\alpha'_{ki} + (L'_k - \overline{L}_k - dL_k) \sin B_k + \cdots .
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wir beachten ferner, daſs zufolge der Gleichung (5) S. 275 gesetzt werden darf:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\sin B_k+\frac{\cos B_i}{W_i}\cos\alpha_{ik} &= -\frac{\cos B_k}{W_k}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik}\cos\alpha_{ki}\\
\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\sin B_i+\frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki} &= -\frac{\cos B_i}{W_i}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\cos\alpha_{ik},
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

womit sich die Koefficienten der dL wesentlich vereinfachen lassen.

Die (4) S. 282 gehen nun, dB, dL und $d\alpha'$ in Sekunden verstanden, nach einigen weiteren einfachen Transformationen über in:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varrho''}{a_0}\delta s_{ik} &= \left\{\begin{aligned}&\frac{\varrho''}{a_0}(\bar{s}_{ik}-s_{ik})+\frac{1-e^2}{W_i^3}\cos\alpha_{ik}dB_i+\frac{1-e^2}{W_k^3}\cos\alpha_{ki}dB_k\\ &+\frac{\cos B_k}{W_k}\sin\alpha_{ki}(dL_i-dL_k)+\cdots\end{aligned}\right\}\\
\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\delta\alpha'_{ik} &= \left\{\begin{aligned}&\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\left(\bar{\alpha}_{ik}-\alpha'_{ik}+(\bar{L}_i-L'_i)\sin B_i\right)\\ &-\frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\sin\alpha_{ik}dB_i-\frac{1-e^2}{W_k^3}\sin\alpha_{ki}dB_k\\ &-\frac{\cos B_i}{W_i}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\cos\alpha_{ik}dL_i-\frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki}dL_k+\cdots\end{aligned}\right\}\\
\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\delta\alpha'_{ki} &= \left\{\begin{aligned}&\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\left(\bar{\alpha}_{ki}-\alpha'_{ki}+(\bar{L}_k-L'_k)\sin B_k\right)\\ &-\frac{1-e^2}{W_i^3}\sin\alpha_{ik}dB_i-\frac{1-e^2}{W_k^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik}\sin\alpha_{ki}dB_k\\ &-\frac{\cos B_i}{W_i}\cos\alpha_{ik}dL_i-\frac{\cos B_k}{W_k}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik}\cos\alpha_{ki}dL_k+\cdots.\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Diese Gleichungen sind für jede Linie aufzustellen; sodann ist noch $\delta\alpha'$ in $v-u$ zu zerspalten und u nach rechts zu schaffen. Zu den Fehlergleichungen für δs und v tritt jetzt, um die bekannten Ausgleichungsformeln anwenden zu können, noch für jede Station die identische Gleichung

$$u=u,\tag{5}$$

u natürlich für jede Station ein anderes. Rechter Hand bedeutet u eine Unbekannte, linker Hand eine Verbesserung.

Nach Mafsgabe des Ausdrucks (6) S. 550 sind nun *Normalgleichungen* zu bilden für die Unbekannten dB und dL, ausgenommen dB_1 und dL_1, welche als unbestimmte Gröfsen in der Rechnung bleiben; ferner für die u der sämtlichen Q Stationen und endlich für die L' der $Q-A-1$ in geographischer Länge nicht bestimmten Stationen. Zusammen $4Q-A-3$ Gleichungen.

Von diesen sind aber diejenigen für die u und L' leicht zu eliminieren. Sind endlich die dB und dL bezw. die L' gefunden, so

geben die (1) mittelst derselben und der beobachteten B' und L' die ξ und η als Funktionen von ξ_1 und η_1 (bezw. dL_1) an.

§ 17. Modifikation des 2. Falles für das europäische Dreiecksnetz. Das europäische Dreiecksnetz besteht aus vielen für sich geodätisch ausgeglichenen Komplexen, welche teils eine wesentlich lineare Form als *Dreiecksketten*, teils eine flächenartige Ausbreitung als *Dreiecksnetze* haben. Während wir uns die letzteren wie im vorigen Falle durch ideale Netze ersetzt denken, welche aber aufser den astronomischen Stationen noch die Anschlufspunkte mit Nachbarkomplexen enthalten müssen, denken wir uns erstere einfach durch eine gebrochene Linie ersetzt, welche die astronomischen Stationen verbindet und an welche die Anschlufsseiten sich direkt oder mittelst einer Hilfslinie ansetzen.

Im allgemeinen ist nun, wenn nach *bedingten* Beobachtungen ausgeglichen werden soll, für jede Linie das System der 3 Gleichungen (1) S. 548 herzustellen und wie S. 550 $\delta\alpha'$ in $v - u$ zu zerspalten. Für die nicht astronomischen Stationen bleiben aber die in ξ und η multiplizierten Glieder weg, weil sie unbestimmbar sind; dagegen treten an Stelle der wirklichen Werte B', L' und α' auf diesen Stationen die unbekannten ellipsoidischen Werte B, L und α (einfach durch Wegfall des obern Index). Dafs dem so ist, zeigt unzweifelhaft die Entwicklung § 11 S. 534 u. ff.

Was die *Anschlufsseiten* anbetrifft, so ist für diese die eben angegebene Rechnung nur in den Netzen auszuführen, aber in den Ketten in der Regel nicht, weil wir voraussetzen, dafs sie sich hier in der Regel nur einseitig an einen gebrochenen Linienzug anreihen. (Die Berechnung der 3 Gleichungen ist eben nur für diejenigen Anschlufsseiten erforderlich, die sich beiderseits an Linien desselben Komplexes anreihen.)

Die einseitig anhängenden Anschlufsseiten geben dagegen im betreffenden Komplex 2 Gleichungen der Form:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Seite } pq = \text{Zahlwert} + \delta s_{pq} \\ \alpha_{pq} - \alpha_{po} = \text{Zahlwert} + v_{pq} - v_{po}, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

wobei die Anschlufsseite mit pq und die anschliefsende Seite des Linienzuges mit po bezeichnet ist. δs_{pq} bedeutet die Verbesserung der linearen Länge; ferner bedeuten v_{pq} und v_{po} die Verbesserungen der geodätischen Richtungsangaben. Selbstverständlich müssen δs_{pq} und v_{pq} im Nachbarkomplex noch einen unterscheidenden Index erhalten.

Sind alle diese Gleichungen aufgestellt, so werden wie im vorigen

Falle (S. 550) die Unbekannten eliminiert, wodurch nun die Bedingungsgleichungen zwischen den δs und $\delta\alpha' = v - u$ erhalten werden.

Als Unbekannte treten auf die ξ und η der Q astronomischen Stationen bis auf die 2 Werte ξ_1 und η_1 (einer willkürlich gewählten Station), welche als unbestimmte Werte stehen bleiben; ferner die $Q - A - 1$ geographischen Längen derjenigen astronomischen Stationen, die nur in Breite und Azimut bestimmt sind; ferner die B, L und α auf den nichtastromischen Stationen; endlich noch die Anschlufsseiten.

Für diejenigen Ketten (Netze), welche ohne Grundlinie sind, tritt aufserdem noch je eine Unbekannte in den Verbesserungen δs der linearen Längen der Linien auf, indem wegen der nur vorläufigen Berechnung dieser Dimensionen den gewöhnlichen Symbolen δs noch Glieder in der Form von Produkten einer Unbekannten in die linearen Längen beigefügt werden müssen.

Ehe nun zur weiteren Ausgleichung nach der Bedingung (5) oder (6) S. 550 verschritten werden kann, ist zu überlegen, ob die Stücke der einfachen Linienzüge, welche die Dreiecksketten ersetzen, als unabhängig aufgefafst werden sollen, oder nicht. Im ersteren Falle erlangen die Kontrollen (1) durch die Anschlufsseiten gar keinen Einflufs auf die Ketten, weil kein Zusammenhang zwischen den δs dieser Seiten und den Verbesserungen der anderen Stücke besteht.

Es leuchtet aber ein, dafs eine Veränderung in der Länge einer Anschlufsseite auch Veränderungen in der Länge und dem Azimut der anderen Linien notwendig macht und wenn nun auch für den Komplex zweier an einander hängender Ketten im ganzen genommen wegen des entgegengesetzten Vorzeichens der Verbesserungen der Anschlufsseite in beiden Ketten nicht immer eine wesentliche Längenänderung eintritt, so bleibt doch jedenfalls die Änderung im einzelnen. Auch Azimutänderungen werden erfolgen.

Eine näherungsweise Berücksichtigung des Einflusses der Anschlufsseiten würde von selbst eintreten, wenn wir auch für die Ketten die Bildung eines *geschlossenen* idealen Netzes voraussetzen wollten. Indessen halten wir es für einfacher, hier bei dem einfachen Linienzug als Regel stehen zu bleiben; wir denken uns aber ein (wenigstens näherungsweise) *äquivalentes System* von Funktionen der Verbesserungen der Stücke eingeführt, wie bereits S. 547 angedeutet ist.

An Stelle der δs und v (den Verbesserungen der geodätischen Richtungsangaben, S. 550) treten nun als lineare Funktionen derselben Gröfsen, die wir mit δl bezeichnen wollen. Die Ableitung des funktionalen Zusammenhangs zwischen den δl und δs und v

giebt auch eine Bestimmung des den $\delta\mathfrak{l}$ zukommenden mittleren Quadrats und damit eine solche ihres Gewichts $\mathfrak{g}$.

In den Bedingungsgleichungen sind dann die δs und v mittelst der $\delta\mathfrak{l}$ zu eliminieren und endlich die Ausgleichung so vorzunehmen, daſs die Summe der in ihre Gewichte multiplizierten Quadrate der $\delta\mathfrak{l}$ und der anderen noch verbliebenen, als unabhängig betrachteten Verbesserungen [vergl. S. 550 (5) bezw. (6)] ein Minimum wird.

Die detaillierte Ausführung zu Vorstehendem insbesondere die Bildung äquivalenter Systeme hoffen wir an anderer Stelle ausführlicher zu behandeln. Hier verweisen wir auf die S. 548 gegebenen Notizen und bemerken nur, daſs eine ausreichende Lösung für Ketten ziemlich leicht zu erzielen sein wird, wenn den Spezialausgleichungen immer die Berechnung der mittleren Fehler einiger Hauptergebnisse beigefügt sind und dann den gegebenen Ketten einfachere Ketten aus gleichseitigen Dreiecken mit nahezu gleicher Genauigkeit der entsprechenden Ergebnisse für den Zweck der Bildung der äquivalenten Systeme substituiert werden.

Bei der Behandlung des vorliegenden Falles nach *vermittelnden* Beobachtungen, welche sich durch Übersichtlichkeit sehr empfiehlt, ist zunächst für jedes ideale Netz (jeden Linienzug) wie § 16 S. 551 u. ff. zu verfahren, nur fallen auf den nichtastronomischen Stationen die Glieder mit ξ und η weg und es sind an Stelle der B', L' und α' in den Gleichungen einfach die ellipsoidischen Werte B, L und α zu setzen.

Diese α sind bis auf eine, allen Richtungen einer Station gemeinsame Gröſse u bekannt, sodaſs an Stelle von $\delta\alpha$ auch hier $v - u$ tritt. Aber da für diese u keine Beobachtungen existieren, so fallen also auf den nichtastronomischen für die u die Fehlergleichungen

$$u = u\,,$$

vergl. S. 552, fort. Auf den nichtastronomischen Stationen nehmen überhaupt die Fehlergleichungen (4) S. 552 für die $\delta\alpha_{ik}$ nach einiger Reduktion rechter Hand die einfachere Form (3) S. 496 an.

Als Unbekannte treten auf (vergl. S. 552 Schluſs des § 16) die ξ und η von $Q-1$ astronomischen Stationen, die $Q - \varLambda - 1$ Werte L' der nicht in geographischer Länge bestimmten astronomischen Stationen, die B und L der nichtastronomischen Stationen, endlich die u aller Stationen und die durch mangelnde Basismessung entstehenden Unbekannten.

Ehe aber zur Bildung der Normalgleichungen verschritten werden kann, müssen die Ausdrücke für die δs und v in die mit $\delta\mathfrak{l}$ am Schlusse voriger Seite bezeichneten äquivalenten Funktionen eingesetzt werden, insoweit nicht bereits diese δs und v als unabhängige Gröſsen aufgefaſst sind.

Die grofse Übersichtlichkeit des Verfahrens der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen beruht darauf, dafs man zunächst für jedes Netz (jede Kette) die Normalgleichungen gesondert aufstellen und diejenigen Unbekannten eliminieren kann, welche nur in der betreffenden Abteilung vorkommen und durch dieselbe allein schon bestimmbar sind.

Es gehen also im wesentlichen in das Hauptsystem der Normalgleichungen, welche sich für jede Unbekannte durch Addition der so modificierten entsprechenden Normalgleichungen der einzelnen Abteilungen bilden, nur die in wenigstens 2 Netzen (Ketten) auftretenden Unbekannten über. Es wird daher die kleinstmögliche Anzahl von Unbekannten zur gemeinsamen Ausgleichung herangezogen.

§ 18. **Strenge Ausgleichung des europäischen Dreiecksnetzes.** Eine solche kann, wenn überhaupt praktisch durchführbar, nur nach vermittelnden Beobachtungen erfolgen, weil die Anzahl der Bedingungsgleichungen schon für die einzelnen Netze und Ketten vielfach eine an der Grenze der Übersichtlichkeit liegende ist. Dieses wird nur wenig gebessert, wenn man etwas von der Strenge absehend mit *Andrae* den Ketten möglichst einfache fingierte Ketten unter Weglassung aller Diagonalen substituieren wollte.*)

Wir denken uns demgemäfs für jedes Partialnetz (für jede Kette) die Ausgleichung nach S. 495 u. ff. durchgeführt — wenn nicht von haus aus, so doch nachträglich nach bereits erfolgter bedingter Ausgleichung, wobei dann die Absolutglieder wegfallen, falls man von Näherungswerten ausgeht, die den Resultaten dieser Ausgleichung genügen. (Man wird sich namentlich im letzteren Falle mit wenigziffrigen Koefficienten der Unbekannten begnügen dürfen.)

Bei der Bildung der allgemeinen Normalgleichungen jedes Partialnetzes werden jetzt aber die Verbesserungen der geographischen Koordinaten keines Punktes unterdrückt (wie dort diejenigen des astronomischen Anfangspunktes), sondern es werden für alle Punkte die Normalgleichungen gebildet. Wir nehmen ferner an, dafs die Basismessungen und Azimutbestimmungen (wie alle astronomischen Bestimmungen) vorerst unberücksichtigt bleiben.

Aus diesen Normalgleichungen eliminiert man zunächst die Verbesserungen der Koordinaten derjenigen Punkte, welche astronomische Bestimmungen nicht aufweisen excl. derjenigen der Anschlufspunkte

*) Vergl. S. 244 u. ff. der *Verhandlungen der 5. allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung.* Berlin 1878.

Sobald Ketten zu Polygonen zusammentreten, läfst sich die Ausgleichung nicht mehr so einfach, wie an diesem Orte angegeben ist, ausführen. Auch sind die von uns mehrfach erwähnten Kontrollen aus geographischen Längen und Azimuten nicht berücksichtigt (überhaupt nicht erwähnt).

benachbarter Netze, sowie der Endpunkte der Basen und der Zielpunkte bei astronomischen Azimutbestimmungen.

Ist ein solcher Zielpunkt eine lokale Marke, so ist die Verbesserung für die Richtung nach derselben (entsprechend dem C S. 501) in dem Normalgleichungssystem zu konservieren.

Die Absolutglieder dieser Normalgleichungen verschwinden, sobald man sich unter den Unbekannten derselben weitere Verbesserungen denkt, die an den Ergebnissen einer separaten Ausgleichung dieses Partialnetzes anzubringen sind. (Bei dieser separaten Auflösung wären 4 der Unbekannten null zu setzen oder willkürlich anzunehmen, wenn, wie vorausgesetzt, von einer Einführung der Basis- und Azimutmessung abgesehen wird.)

Um nun die wie oben modificierten Normalgleichungen der verschiedenen Partialnetze kombinieren zu können, müssen die in ihnen erscheinenden Unbekannten, insoweit sie sich eben auf dieselbe Gröfse beziehen, Verbesserungen *derselben* Näherungswerte bezeichnen. Dieses ist leicht zu bewerkstelligen:

Bezeichnet in einem System Z einen Näherungswert einer Unbekannten, z seine als Unbekannte in der Ausgleichung auftretende Verbesserung und werden im anderen System die entsprechenden Gröfsen bezw. Z_1 und z_1 genannt, so ist

$$Z + z = Z_1 + z_1 \tag{1}$$

und man hat nun im 2. System für z_1 einfach $Z - Z_1 + z$ zu substituieren, um Z auch in diesem System als Näherungswert einzuführen.

Auf diese Art wird man in einigen Normalgleichungen wieder Absolutglieder erhalten. Nun addiert man alle Normalgleichungen, deren quadratische Koefficienten zu derselben Unbekannten gehören und erhält ein *Hauptnormalgleichungssystem*, welches offenbar den gesamten Winkelbeobachtungen des ganzen Netzkomplexes äquivalent ist. (Seine Summe ist identisch null.)

Hierzu treten zunächst die Gleichungen für die *Basismessungen*. Da wir mehrere voraussetzen, betrachten wir sie hier zunächst als Fehlergleichungen. Die Messung der Linie $P_i P_k$ giebt, wenn δs_{ik} die Verbesserung der linearen Länge, sowie dB und dL die Verbesserungen der oben für das Hauptnormalgleichungssystem der Winkelmessungen angenommenen Näherungswerte der ellipsoidischen geographischen Breiten und Längen bedeuten [vergl. S. 499 (1) od. S. 552 (4)]:

$$\frac{\varrho''}{a_0}\delta s_{ik} = \frac{\varrho''}{a_0}(\bar{s}_{ik} - s_{ik}) + \left\{ \begin{array}{c} \frac{1-e^2}{W_i^3}\cos\alpha_{ik}\, dB_i + \frac{1-e^2}{W_k^3}\cos\alpha_{ki}\, dB_k \\ + (dL_i - dL_k)\frac{\cos B_k}{W_k}\sin\alpha_{ik} \end{array} \right\} \tag{2}$$

Als Fehlergleichungen im gewöhnlichen Sinne diese Gleichungen beizubehalten, ist indes nicht passend. Denn der gröfste Teil der δs entsteht durch die mangelnde Reduktion wegen der Höhe des Geoids über dem Ellipsoid. Sobald wir eine Ausdehnung des Netzes wie diejenige des europäischen voraussetzen, können wir bei einer ganz strengen Behandlung von derselben nicht absehen. Da aber die Reduktion vorläufig unbekannt ist, lassen wir die δs für die Grundlinien als unbestimmte Gröfsen in der Rechnung.*) Auf die Messungsfehler braucht eine besondere Rücksicht nicht genommen zu werden; sie treten ganz zurück, wie schon S. 499 bemerkt wurde.

Wir denken uns nun mittelst der Basisgleichungen in jedem Partialnetz, wie S. 499 u. 500 angegeben ist, eine Unbekannte eliminiert, sodafs diese Gleichungen (2) in die Gesamtausgleichung gar nicht eingehen.

Aber es entsteht der Unterschied gegen früher, dafs jede Basis eine unbestimmte Gröfse δs in den Absolutgliedern der Normalgleichungen zurückläfst.

Die *gemessenen Azimute* geben nach S. 282 (4) und S. 551 (1) Fehlergleichungen in der nachstehenden Form, diese speziell bezogen auf α'_{ik} in P_i für P_iP_k:

$$\delta\alpha'_{ik} = \bar{\alpha}_{ik} - \alpha'_{ik} - \eta_i \tan B_i$$

$$- \frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1-e^2}{W_i^3} \left(\dfrac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} \sin \alpha_{ik}\, dB_i + \dfrac{1-e^2}{W_k^3} \sin \alpha_{ki}\, dB_k \\ + \dfrac{\cos B_k}{W_k} \cos \alpha_{ki} \, (dL_k - dL_i) \end{array} \right\} + \cdots \quad (3)$$

Man hat nun noch für jeden Punkt die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{L} + dL = L' - \eta \sec B + \cdots \\ \bar{B} + dB = B' + \xi + \cdots, \end{array}\right\} \quad (4)$$

wenn wieder dL und dB die Verbesserungen der Näherungswerte $\bar{L}$ und $\bar{B}$ bezeichnen, die schon bei dem oben erwähnten Hauptnormalgleichungssystem der Winkelmessungen auftreten.

Mittelst der (4) kann man entweder anstatt der dB und dL ξ und η einführen oder, was weit bequemer ist, η aus (3) eliminieren

---

*) Für eine Landesvermessung ist dagegen die Annahme δs = null sehr zweckmäfsig, denn man erhält dadurch in allen Teilen Dimensionen im Meeresniveau. Infolge des etwas fehlerhaften mathematischen Zusammenhanges ist nur die Übereinstimmung der Resultate etwas ungünstiger, als bei ganz strenger Behandlung.

und zwar mittelst der 1. Gleichung (4) durch dL ausdrücken. Mit Rücksicht auf die 2. Gleichung (3) S. 552 geht (3) nun über in:

$$\begin{aligned}\delta\alpha'_{ik} &= \bar{\alpha}_{ik} - \alpha'_{ik} + (\bar{L}_i - L'_i)\sin B_i \\ &- \frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}}\left\{\begin{array}{l} \frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\sin\alpha_{ik}\,dB_i + \frac{1-e^2}{W_k^3}\sin\alpha_{ki}\,dB_k \\ + \frac{\cos B_i}{W_i}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\cos\alpha_{ik}\,dL_i + \frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki}\,dL_k \end{array}\right\} + \cdots \quad (5)\end{aligned}$$

Als Fehlergleichung ist diese Gleichung aber nur da zu behandeln, wo L' beobachtet ist. Denn da jedes L' nur in *einer* Gleichung vorkommt, so mufs $\delta\alpha'$ gleich null angenommen werden, wo L' nicht beobachtet ist.

Die Gleichungen (5) stellen wir also nur für die in Azimut *und* geographischer Länge bestimmten Punkte auf und bilden dann die Beiträge dieser Gleichungen zu den Normalgleichungen der in ihnen auftretenden dL und dB mit Rücksicht auf die Gewichte.

Dient als Zielpunkt der Azimutmessung eine lokale Marke, so tritt rechter Hand in (5) an Stelle des die grofse Parenthese enthaltenden Aggregats die *eine* früher S. 501 und 557 mit C bezeichnete lokale Unbekannte $+ \sin B_i dL_i$.

Die Bestimmung der Gewichte der Azimutbeobachtungen im Verhältnis zu den geodätischen Richtungsbeobachtungen hat nach dem Satze zu erfolgen, dafs die Gewichte umgekehrt proportional den mittleren Fehlerquadraten zu setzen sind. Indem wir annehmen, dafs die Netzteile auch einzeln vollständig ausgeglichen werden oder wenigstens die Dreiecksabschlüsse gebildet sind, wird sich hieraus für die Gewichtseinheit der Richtungs- bezw. Winkelbeobachtungen das mittlere Fehlerquadrat ergeben. Mafsgebend ist immer derjenige Wert des mittleren Fehlerquadrats, den *die Widersprüche des Netzes allein* geben. Das mittlere Fehlerquadrat der Azimute kann am sichersten dadurch ermittelt werden, dafs man die doppel- und mehrfachen Bestimmungen der Azimute zu verschiedenen Zeiten und mit verschiedenen Instrumenten mit einander vergleicht.*)

In dem schliefslich aus der Addition der Beiträge der Azimutmessungen zu den entsprechenden Gleichungen des bereits gebildeten Normalgleichungssystemes erhaltenen *Gesamtnormalgleichungssystem* ist für einen Punkt P_1 dL_1 und dB_1 unbestimmt zu lassen, sodafs dafür die Normalgleichungen wegfallen und alle andern dL und dB schliefslich als Funktionen von dL_1 und dB_1 auftreten.

*) Siehe die Anm. S. 539.

Um die Auflösung der Normalgleichungen möglichst *übersichtlich* zu gestalten, ist es ratsam, zunächst *jedes Partialnetz für sich* in der oben angegebenen Weise zu behandeln. Aus den Partialnormalgleichungssystemen können dann vorerst alle Unbekannten eliminiert werden, die nur in einem derselben auftreten. Dann erst erfolgt die Addition der Gleichungen, die zu derselben Unbekannten gehören und somit die Bildung eines im Zusammenhange weiter zu behandelnden Systems.

Indem man nun mittelst der Beziehungen (4) von dL und dB zu ξ und η übergeht, erhält man alle ξ und η als Funktionen der Werte ξ_1 und η_1 und der δs der Grundlinien.

In 1. Annäherung wird man die δs = null setzen und dann über ξ_1 und η_1 disponieren, etwa wie § 14 S. 543 u. ff. Darnach wird man suchen, die Höhenlage des Geoids zu dem gewählten Referenzellipsoid mittelst der ξ und η in weiterhin anzugebender Weise zu bestimmen, um endlich im stande zu sein, Näherungswerte für die δs anzugeben und eine neue Rechnung für die ξ und η durchzuführen. Schliefslich kann man auch aus den Widersprüchen bezw. den Verbesserungen, welche die Gesamtausgleichung fordert, den mittleren Fehler der Gewichtseinheit feststellen, wozu die S. 504—511 gegebenen Vorschriften mit geringen Modifikationen ausreichen.

§ 19. 3. Fall der Bestimmung von Lotabweichungen: Jede Station des Dreiecksnetzes ist auch astronomische Station. In diesem Falle ist es möglich, direkt die kleinen von den $\cot z'$ abhängenden Einflüsse der Lotabweichungen zu berücksichtigen, ohne durch vorhergehende Näherungsrechnungen schon Näherungswerte derselben abgeleitet zu haben (S. 535 o.). Man wird also in diesem Falle beinahe ganz unabhängig von der Hypothese über die Erdgestalt. Denn es bleibt nur als Voraussetzung eine näherungsweise ellipsoidische Form und als Vernachlässigung der sehr kleine Fehler bei der Reduktion der Richtungen wegen der Höhe der Objekte über dem Referenzellipsoid (wofür man eben nicht ganz zutreffend die Meereshöhe nimmt).

Die Ausgleichung beginnt genau wie S. 495 u. ff. mit der Ausgleichung der Stationen. Bei dem Übergange zur Netzausgleichung wird aber die Bedeutung der Aggregate $ax + by + cz + \cdots$ eine andere.

Indem wir nämlich auf den Ausdruck (5) S. 517 Rücksicht nehmen, erhalten wir jetzt als die einer Azimutmessung entsprechende Fehlergleichung, vergl. S. 552 und 558:

$$\delta \alpha'_{ik} = \bar{\alpha}_{ik} - \alpha'_{ik} - \eta_i \tan B_i - \eta_i \cot z_{ik} \cos \alpha_{ik} + \xi_i \cot z_{ik} \sin \alpha_{ik}$$
$$- \frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1-e^2}{W_i^3} \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} \sin \alpha_{ik} dB_i + \frac{1-e^2}{W_k^3} \sin \alpha_{ki} dB_k \\ + \frac{\cos B_k}{W_k} \cos \alpha_{ki} (dL_k - dL_i) \end{array} \right\} + \cdots.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Beziehungen:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{L} + dL = L' - \eta \sec B + \cdots \\ \bar{B} + dB = B' + \xi + \cdots \end{array} \right\} \quad (1)$$

und unter Beachtung der 2. Gleichung (3) S. 552:

$$\left. \begin{array}{l} \delta \alpha'_{ik} = \bar{\alpha}_{ik} - \alpha'_{ik} + (\bar{B}_i - B'_i) \cot z_{ik} \sin \alpha_{ik} \\ \qquad + (\bar{L}_i - L'_i)(\sin B_i + \cot z_{ik} \cos B_i \cos \alpha_{ik}) \\ - \frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1-e^2}{W_i^3} \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} - \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} \cot z_{ik}\right] \sin \alpha_{ik} dB_i + \frac{1-e^2}{W_k^3} \sin \alpha_{ki} dB_k \\ + \left[\frac{1}{W_i} \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} - \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} \cot z_{ik}\right] \cos B_i \cos \alpha_{ik} dL_i + \frac{\cos B_k}{W_k} \cos \alpha_{ki} dL_k \end{array} \right\} + \cdots. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Insoweit es sich um die den geodätischen Richtungsbeobachtungen entsprechenden Fehlergleichungen handelt, setzen wir für $\delta \alpha'_{ik}$ wie S. 496 (3) eine Verbesserung λ_{ik} und fügen rechts für jeden Satz noch eine Unbekannte u bei. Die Vergleichung von (2) mit (3) und (4) S. 496 zeigt nun die etwas veränderte Bedeutung der Aggregate $ax + by + cz + \cdots$. Einesteils besteht sie in einer Veränderung der Koefficienten der dB und dL, andrerseits tritt da, wo L'_i nicht beobachtet ist, diese Gröfse (oder bequemer $\bar{L}_i - L'_i$) als neue Unbekannte auf.

Das weitere Verfahren zur Bildung der Netznormalgleichungen ist vorerst ganz wie S. 497 u. ff. Nur bemerken wir noch, dafs man in allen Fehlergleichungen λ_{ik} den Teil $(\bar{L}_i - L'_i) \sin B_i$ einfach weglassen darf. Denn man kann sich ihn dem Orientierungsfehler u der einzelnen Sätze, da er unabhängig von dem besonderen Objekt ist, hinzugefügt denken. Hierdurch wird der Koefficient von $(\bar{L} - L')$ wesentlich verkleinert und daher die Rechnung, insbesondere falls L'_i unbekannt ist, etwas bequemer.

Die bis jetzt erhaltenen Normalgleichungen entsprechen den geodätischen Richtungsbeobachtungen allein. Für jede Station erhält man aber noch eine Fehlergleichung der Form (2) infolge der Azimutmessung. $\delta \alpha'_{ik}$ bezeichnet darin unmittelbar die Verbesserung der

letzteren. Man hat nun die Beiträge aller dieser Gleichungen zu den Normalgleichungen der verschiedenen Unbekannten mit Rücksicht auf die Gewichte zu bilden und den betreffenden früheren Normalgleichungen zuzufügen.

So ist wenigstens der strenge Vorgang. Allein da die Bestimmung der Unbekannten L', da wo eben die geographische Längenbestimmung fehlt, wesentlich nur auf der Azimutmessung beruht, weil hier allein L' einen grofsen Koefficienten hat, so wird man in denjenigen Gleichungen (2), welche Azimutmessungen auf Stationen entsprechen, wo L' unbekannt ist, am besten einfach $\delta\alpha' =$ null setzen und die Gleichung zur Bestimmung von L' als Funktion der anderen Unbekannten benutzen.

Hiernach modificiert sich das Verfahren dahin, dafs aus den Aggregaten $ax + by + cz + \cdots$ die unbekannten L' mittelst jener Azimutgleichungen (2) vor Bildung der Normalgleichungen zu eliminieren sind.

Als Azimutfehlergleichungen bleiben nur diejenigen Gleichungen (2), für welche L'_i direkt beobachtet ist.

Diese L' nehmen wir (ebenso wie die B') *ohne* Verbesserungen aus dem schon früher angegebenen Grunde (§ 15 S. 546), dafs eine Einführung solcher nur viel Mühe ohne wesentliche Vorteile erzeugt, so lange die Stationen mit geographischen Längenbestimmungen relativ selten sind, welcher Fall praktisch allein in betracht kommt.

(Für die B' ist der Grund dafür, dafs es genügt von Verbesserungen abzusehen, der geringe Betrag der Koefficienten dieser Gröfsen in den Fehlergleichungen.)

Über die Berücksichtigung der Grundlinien, sowie hinsichtlich anderer Details vergl. den vorigen Paragraphen. Ist das Gesamtsystem aufgelöst, so führen die (1) zu den ξ und η u. s. f. wie dort.

§ 20. **Referenzellipsoid von günstigsten Dimensionen.** Bisher wurden die Elemente der Meridianellipse a_0 und e^2 als gegeben vorausgesetzt, jedoch bereits in § 14 S. 545 für einen bestimmten Fall angedeutet, wie gleichzeitig mit der günstigsten Wahl von ξ_1 und η_1 auch eine günstigste Wahl der Form des Referenzellipsoids getroffen werden könnte.

Dieselbe Methode kann auch in den anderen Fällen angewandt werden. Nachdem nämlich alle ξ und η zum Schlufs der Gesamtausgleichung als Funktionen von ξ_1 und η_1 erhalten sind, kann man wie im ersterwähnten Falle diesen Ausdrücken Glieder beifügen, die von Änderungen da_0 und de^2 der bis dahin benutzten Werte a_0 und e^2 abhängen. Man wird in allen Fällen (vergl. S. 543) Gleichungen der nachstehenden Form erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\xi_i &= -l_i + a_i\xi_1 + b_i\eta_1 + c_i\frac{da_0}{a_0} + d_i\cdot\frac{1}{2}\frac{de^2}{1-e^2}\\ \eta_i &= -l'_i + a'_i\xi_1 + b'_i\eta_1 + c'_i\frac{da_0}{a_0} + d'_i\cdot\frac{1}{2}\frac{de^2}{1-e^2}\,.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Um die Ausdrücke für die Koefficienten c und d zu bekommen, beachten wir die Gleichungen (6), (7) und (8) S. 536. Dieselben zeigen, dafs Änderungen $\delta B''_i$, $\delta L''_i$ und $\delta\alpha''_{i.1}$ in den berechneten beziehungsweisen Werten B''_i, L''_i und $\alpha''_{i.1}$ für ξ_i, η_i und η_i bezw. die Änderungen $\delta B''_i$, $-\delta L''_i\cos B_i$, $\delta\alpha''_{i.1}\cot B_i$ hervorbringen. Wie diese Änderungen $\delta B''_i$, $\delta L''_i$ und $\delta\alpha''_{i.1}$ aber von da_0 und de^2 erzeugt werden, geben die Formeln des § 16 S. 294 an. Es ist:

$$c_i = -\varrho''\frac{s_{i.1}}{a_0}\frac{W_i^3}{1-e^2}\cos\alpha_{i.1}\qquad d_i = \varrho''\frac{W_i^3}{1-e^2}\left(\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\cos\alpha_{i.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\sin\alpha_{i.1}\right),\quad(2)$$

ferner

$$c'_i = -\varrho''\frac{s_{i.1}}{a_0}W_i\sin\alpha_{i.1}\qquad d'_i = \varrho''W_i\left(\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\sin\alpha_{i.1} - \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\cos\alpha_{i.1}\right),\quad(3)$$

wenn η_i mittelst der geographischen Länge ermittelt ist; dagegen

$$c'_i = -\varrho''\frac{s_{i.1}}{a_0}W_i\sin\alpha_{i.1}\qquad d'_i = \varrho''W_i\left(\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\sin\alpha_{i.1} - \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\cos\alpha_{i.1} + \frac{1}{W_i}\mathfrak{A}\right),\quad(4)$$

wenn η mittelst des Azimuts ermittelt ist.

Die Bedeutung von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{A}$ erhellt aus S. 294, wo immer Index i an Stelle von Index 2 zu setzen ist.

Wie man sieht, stimmen die beiden Formen von d'_i nicht ganz überein; sie unterscheiden sich durch das allerdings kleine Glied mit $\mathfrak{A}$. Im Falle nun ξ und η nach den Methoden der §§ 15 bis 19 S. 546 u. ff. bestimmt sind, wird man stets den Ausdruck (3) für d'_i anwenden müssen, weil alle η den Bestimmungen der geographischen Längen thunlichst angepafst sind.

Ganz streng ist dieses Verfahren allerdings nicht, eben so wenig wie überhaupt der ganze Vorgang; denn bei Berechnung der von da_0 und de^2 abhängenden Glieder denkt man sich die geodätischen Linien von P_1 nach den verschiedenen Punkten P_i sowohl hinsichtlich ihrer linearen Länge als auch hinsichtlich ihrer Azimute unverändert, während doch durch eine Änderung in a_0 und e^2 sich das Netz etwas deformiert und also auch die linearen Längen und die Azimute Änderungen erleiden, welche für ein z. B. so beträchtlich wie das europäische Netz ausgedehntes Netz recht wohl erheblich werden können.

Ein völlig korrektes Verfahren ergiebt sich, wenn man bei den Ausgleichungen nach *vermittelnden* Beobachtungen (S. 551 u. S. 555 u. ff.) den Ausdrücken für $\delta\alpha'_{ik}$ und δs_{ik} noch nach § 14 S. 291 die von

da_0 und de^2 abhängigen Glieder beifügt. Haben wir es beispielsweise wie im vorhergehenden Paragraphen nur mit Dreiecksseiten 1. Ordnung, also kurzen Entfernungen zu thun, so erhalten wir nach den Formeln (6) S. 291 als Zuwachse rechter Hand in den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \delta\alpha'_{ik}: & \frac{1}{2}\frac{de^2}{1-e^2}\frac{\varrho''}{W^2}(2\cos^2 B \sin\alpha\cos\alpha + \cdots) \\ \text{„ } \delta s_{ik}: & \frac{da_0}{a_0}s_{ik} - \frac{1}{2}\frac{de^2}{1-e^2}\frac{s_{ik}}{W^2}(2\cos^2 B\cos^2\alpha - [1-e^2]\sin^2 B + \cdots), \\ \text{wobei} & \\ & B = \frac{B_i + B_k}{2} \qquad \alpha = \frac{\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 180^\circ}{2} \\ & W \text{ zum Argument } B \end{array}\right\}(5)$$

zu nehmen sind.

Der erstere Ausdruck ist nicht nur allen Fehlergleichungen für gemessene Azimute, sondern auch allen Fehlergleichungen für die geodätischen Richtungsbeobachtungen auf den Stationen beizufügen, er tritt also auch auf als Zuwachs der Ausdrücke $ax + by + cz + \cdots$.

Bei *bedingter* Ausgleichung im Anschlufs an die Formeln (1) S. 548 u. ff. hat man den B''_i, L''_i und α''_{ki} die durch die Formeln des § 16 S. 294 gegebenen Werte der δB_i, δL_i und $\delta\alpha_{ki}$ zuzufügen, wobei die Indices 1 und 2 durch i und k zu ersetzen sind. Die Unbekannten da_0 und de^2 müssen dann ebenso wie die anderen vorerst eliminiert werden, wenn man es nicht vorzieht, die Ausgleichung nach § 26 S. 215 unserer *Ausgleichungsrechnung* zu behandeln.

Einen eigentlichen Wert erlangt übrigens die Bestimmung von da_0 und de^2 nur dann, wenn die astronomischen Punkte über die Fläche wenigstens annähernd *gleichmäfsig* verteilt sind.

Das richtigste Prinzip zur Bestimmung von da_0 und de^2 ist das, die über die ganze Fläche zu erstreckende Summe der N^2 zu einem Minimum zu machen. Allein der Ausführung stellen sich grofse praktische Schwierigkeiten entgegen.

§ 21. **1. Annäherung zur Bestimmung des Geoids.** Wenn Lotabweichungen ξ und η gegen ein gut anschliefsendes Ellipsoid für eine so dicht liegende Anzahl Punkte bestimmt sind, dafs sie nicht mehr von Punkt zu Punkt einen regellos verlaufenden Gang, sondern einen mehr regelmäfsigen Charakter zeigen, dann kann man eine Bestimmung der Geoidfläche vornehmen, freilich nur unter der Voraussetzung, dafs die Lotlinien innerhalb ihrer Ausdehnung von den Stationen auf der physischen Erdoberfläche bis zum Geoid als Gerade angesehen werden dürfen. Wegen der thatsächlichen Krümmung

der Lotlinien bleibt eine Ungenauigkeit, deren Betrag indes, wie wir später sehen werden, gering ist, insoweit er nicht von lokalen Ursachen herrührt, welcher aber, insoweit dieses der Fall ist, der Rechnung im allgemeinen zur Zeit aus praktischen Gründen gar nicht unterworfen werden kann.

Der Fehler verschwindet überdies praktisch genommen, wenn die Stationen alle in geringer Meereshöhe, oder doch nahezu gleich hoch liegen. Im letzteren Falle kann man jedenfalls annehmen, dafs sich die Konstruktion in Strenge auf eine Niveaufläche anstatt auf die Geoidfläche selbst bezieht.

Zum Unterschied vom Geoid wollen wir die den Lotabweichungen angepafste Fläche das *Sphäroid* nennen.

Die Konstruktion kann in nachstehender Weise empirisch-graphisch vorgenommen werden, wenn stets beide Komponenten ξ und η gegeben sind.

Man vereinigt in einer Übersichtskarte die Stationen zu nahezu geradlinigen Zügen und berechnet zuerst an jedem Punkt die in die Zugrichtung fallende Komponente γ der Lotabweichung. Ist α' das Azimut, so wird nach Fig. 41 S. 515 die Komponente $\gamma = \Theta \cos (A' - \alpha')$, also wegen der (7) S. 516:

$$\gamma = \xi \cos \alpha' + \eta \sin \alpha'. \tag{1}$$

Der Sinn hiervon ist der, dafs im Azimut α' die Tangente des Sphäroids den *Depressionswinkel* γ in Bezug auf die Tangente des Referenzellipsoids hat.

Alle Werte γ trägt man in grofsem Mafsstabe auf Millimeterquadratpapier als Ordinaten auf, rechtwinklig zu Abscissen, deren Differenzen den horizontalen Entfernungen entsprechen. Durch die erhaltenen Punkte legt man eine Kurve aus freier Hand, wobei zur Abrundung der Kurve Abweichungen von den Punkten zulässig sind, die jedoch innerhalb des Betrages des Einflusses der plausiblen Beobachtungsfehler in ξ und η auf γ bleiben müssen und in der Regel abwechselnd + und − zu nehmen sind.

Man kann aber mit völlig genügender Annäherung für den Zuwachs der Erhebung $\Delta N' = N'_k - N'_i$, welche das Sphäroid in Bezug aufs Ellipsoid von P_i bis P_k besitzt, setzen:

$$\Delta N' = -\int \frac{\gamma''}{\varrho''}\, ds, \tag{2}$$

wobei die Integration über die ganze Länge der kürzesten Linie von P_i bis P_k zu erstrecken ist.

Kommen in der Zeichnung c_1 Sek. der Ordinaten und c_2 Meter der Abscissen auf 1^{mm}, so ist $c_1 \gamma^{mm} = \gamma''$ und $c_2 s^{mm} = s^m$, daher

$$\left.\begin{aligned} \varDelta N' &= -\frac{c_1 c_2}{\varrho''}\int \gamma^{mm}\, ds^{mm} \\ \text{oder} \qquad \varDelta N' &= -\frac{c_1 c_2}{\varrho''} F_{ik}{}^{qmm}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

F_{ik} bedeutet die Fläche zwischen den Ordinaten γ_i und γ_k in Quadratmillimetern. Dieselbe kann mit dem Polarplanimeter oder durch mechanische Quadratur berechnet werden.

Im letztern Falle mifst man alle Ordinaten in einem hinreichend kleinen Interwall $\varDelta s^{mm}$ der Abscissen ab, sodafs man zwischen je 2 benachbarten Ordinaten die Interpolationskurve als Gerade betrachten darf. Bei der Ungenauigkeit der ganzen Procedur wird es dann genügen, abgesehen von strengeren Formeln, zu setzen:

$$F_{ik} = \left(\sum_i^k \gamma - \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_k)\right) \varDelta s, \tag{4}$$

wobei $\Sigma\gamma$ die Summe der Ordinaten in Millimetern von γ_i bis γ_k incl. bezeichnet.

Noch bequemer wird der Ausdruck, wenn für jedes Stück $\varDelta s$ die *mittlere* Ordinate gemessen wird. Hierbei ist einfach

$$F_{ik} = \Sigma\,(\text{der mittleren Ordinaten})\,\varDelta s. \tag{5}$$

Nach diesen Formeln berechnet man die Werte $\varDelta N'$ für eine hinreichende Anzahl Punkte in Bezug auf einen derselben und kann endlich ein Verzeichnis derselben anlegen oder auch ein (natürlich behufs gröfserer Deutlichkeit verzerrtes) Profil des Sphäroids bezüglich des Ellipsoids herstellen.

In der Regel wird man einen grofsen Teil der Punktzüge in meridionaler Richtung legen, nicht nur weil es bequem ist, sondern auch weil die Anzahl der ermittelten ξ überwiegen wird. Man wird dann allerdings genötigt sein, da sich hinlänglich viele Punkte auf einem Meridian nur selten vorfinden werden, ξ für ideelle Meridianpunkte aus solchen zu beiden Seiten liegenden zu interpolieren. Als Abscissen dienen zugleich am besten direkt die geographischen Breiten.

Meridionale Züge genügen indes allein nicht, denn sie geben nur die Figur einer Anzahl Schnitte ohne Zusammenhang. Um sie zu verbinden, müssen so viele Punkte auch in η bekannt sein, dafs man entweder entlang von Parallelkreisen mit den η allein, oder in irgend welchen Azimuten (jedoch die Meridianschnitte kreuzend) verbindende Profile herstellen kann.

Lassen sich mehrfache Verbindungen herstellen, so giebt dieses Kontrollen für die Richtigkeit der Konstruktion. Man kann dieselben

durch eine *Ausgleichung* ausnutzen. Dieselbe wird gerade so geführt, wie für Nivellements und zwar am besten nach vermittelnden Beobachtungen, wobei als Unbekannte zunächst nur die Höhen der Knotenpunkte der Profile über einem beliebigen Nullpunkt eingehen und $\Delta N'$ jeder Profilstrecke zwischen 2 Knotenpunkten als Beobachtung auftritt. (Vergl. weitere Details in der *Ausgleichungsrechnung* S. 310 unten.*))

Die Gewichte dieser Beobachtungen nimmt man im allgemeinen umgekehrt proportional den Entfernungen, da unter sonst gleichen Umständen die mittleren Fehlerquadrate in den $\Delta N'$ offenbar mit der Anzahl n der Ordinaten wachsen, die zu ihrer Bildung benutzt sind. Wenn freilich die graphischen Interpolationen der Lotabweichungen sich für verschiedene Profile sehr ungleich genau herstellen lassen, mufs auch hierauf bei der Gewichtsbestimmung Rücksicht genommen werden, indem man die Gewichte umgekehrt proportional den Entfernungen mal den mittleren Fehlerquadraten der Ordinaten setzt, für welche letztere die Unsicherheit beim Zeichnen Anhaltspunkte zur Bestimmung giebt (siehe das Beispiel). Bei wenig Zwischenpunkten in einer Strecke kann sogar das Gewicht umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung mal dem mittlern Fehlerquadrat der Ordinaten werden, weil dann die Ordinatenfehler alle nach einer Seite liegen.

Sind die Höhenunterschiede der Knotenpunkte ermittelt, so werden die Verbesserungen für die Zwischenpunkte bestimmt (*Ausgleichungsrechnung* S. 311), und nun ist nur noch die Höhe eines Punktes des Sphäroids über dem Ellipsoid nötig, um das Sphäroid völlig zu bestimmen. Ist nur *eine* Grundlinie gemessen, so schneiden beide Flächen sich am Orte dieser Grundlinie; bei mehreren Grundlinien allerdings bleibt eine Unklarheit (vergl. S. 524 u. 533), und man mufs sich dann das Sphäroid etwa so gelegt denken, dafs es eine mittlere Lage zum Ellipsoid in Bezug auf die Orte der Grundlinien hat. Diese Unsicherheit ist übrigens von geringem Belang, da die Lage der Axe des Referenzellipsoids zur Erdaxe ja doch nicht näher bekannt ist (S. 533) und da, wie oben bemerkt, das Sphäroid aufserdem mehr eine Niveaufläche in der mittleren Höhe des betreffenden Gebiets der physischen Erdoberfläche als das Geoid selbst

---

*) Nur führe man die Höhen über einem unbestimmten Nullpunkt ein, sodafs die Summe der Normalgleichungen identisch null wird, was bei der hier zweckmäfsigen Auflösung durch Näherung (a. a. O. S. 133) eine gröfsere Konvergenz ergiebt.

(Kunstgriff von *Gaufs* nach *v. Freeden, die Praxis der M. d. kl. Qu.* S. 29.)

darstellt. — Schliefslich kann man durch *Kurven gleichen* $\varDelta N'$ das Sphäroid in der ebenen Zeichnung charakterisieren.

§ 22. **Zahlenbeispiel: Lotabweichungen im Harze.** Das königlich preufsische geodätische Institut hat im Harze eine Reihe Lotabweichungen ξ bestimmt, welche einen ausgesprochen regelmäfsigen Gang zeigen. Wir beschränken uns hier auf eine Reihe von Punkten, die nahe dem Meridian des Brockens liegen, Fig. 44. Nach S. 150 der *Publikation der astronomischen Arbeiten von 1875* (erschienen 1876) hat man dafür folgende Zahlen:

Station	Meereshöhe	Östl. Länge von Ferro	Polhöhe geodätisch B''	Polhöhe astronomisch B'	ξ
Heldburg	395^m	28° 24′	50° 17′ 23,57″	19,25″	+ 4,32″
Dollmar	740	28 9	37 32,45	27,35	+ 5,10
Inselsberg	916	28 8	51 8,66	11,47	— 2,81
Craula	456	28 9	51 3 30,44	28,38	+ 2,06
Mühlhausen	227	28 9	12 10,44	6,18	+ 4,26
Löwenburg	422	28 13	26 34,26	33,93	+ 0,33
Tettenborn	323	28 13	34 22,39	17,29	+ 5,10
Hohegeis	640	28 20	39 58,38	57,02	+ 1,36
Osterode	260	27 54	43 23,20	23,18	+ 0,02
Brocken	1143	28 17	48 1,41	10,59	— 9,18
Ilsenburg	249	28 21	52 24,86	35,71	— 10,85
Harzburg	217	28 13	53 25,74	39,25	— 13,51
Fallstein	167	28 18	52 1 5,91	9,34	— 3,43
Asse	203	28 19	8 20,38	20,38	0,00

Bei Berechnung der geodätischen Polhöhen ist diejenige der Sternwarte *Seeberg* bei Gotha zu Grunde gelegt. Als Azimut diente das 1869 auf dem *Inselsberge* gemessene (vergl. S. 148 a. a. O.). Die ξ beziehen sich also auf ein *Bessel*sches Ellipsoid, das für Seeberg $\xi = 0$ und für den Inselsberg $\eta = 0$ giebt.*)

*) Ganz streng ist das nicht, doch mit Rücksicht auf den geringen geographischen Längenunterschied L von Inselsberg und Seeberg genügend. Formel (9) S. 536 zeigt nämlich, dafs bei der Übertragung des ellipsoidischen Azimuts nach Seeberg von Inselsberg aus, weil hier ξ nicht genau null ist, ein kleiner dem sin L proportionaler Einflufs entsteht, der jedoch schliefslich die von Seeberg aus berechneten ξ nur in verschwindendem Mafse afficiert.

Bezüglich seiner Höhenlage zum Geoid genügt unter Hinweis auf den Schlufs von § 21 die Bemerkung, dafs beide in der Gegend des untersuchten Gebiets irgendwo sich schneiden, dafs das Sphäroid aber eher einer Niveaufläche in einigen Hundert Meter Meereshöhe als dem Geoid selbst entspricht.

Um ein nahezu meridionales Profil zu erhalten, wurden Hohegeis und Osterode einerseits, Harzburg und Ilsenburg andrerseits zu einem ideellen Punkt vereinigt:

	Länge	Polhöhe geodätisch	ξ
$\left(\frac{4}{5}\right.$ Hohegeis $+ \frac{1}{5}$ Osterode$\left.\right)$	28° 15′	51° 40′ 39″	+ 1,1″
$\left(\frac{1}{2}\right.$ Ilsenburg $+ \frac{1}{2}$ Harzburg$\left.\right)$	28 17	51 52 55	− 12,2

Für γ kann in den Formeln S. 565, da das Azimut α' des Zuges gering ist, direkt ξ gesetzt werden, oder wenn man von Süden nach Norden geht, d. h. $\alpha' = 180^0$ annimmt, $-\xi$.

In der graphischen Darstellung wurden 2 extreme Interpolationskurven gebildet. Dabei war

$$1^{mm} \text{ Ordinate} = 0{,}1''$$

und

$$1^{mm} \text{ Abscisse} = 30'' \text{ in geogr. Breite}$$

$$= 927^m,$$

mithin:

$$c_1 = 0{,}1$$

$$c_2 = 927^m$$

$$\frac{c_1 c_2}{\varrho''} = \frac{1}{2220}.$$

Fig. 45 zeigt diese graphische Darstellung in halber Gröfse.

Es wurden folgende Zahlen erhalten:

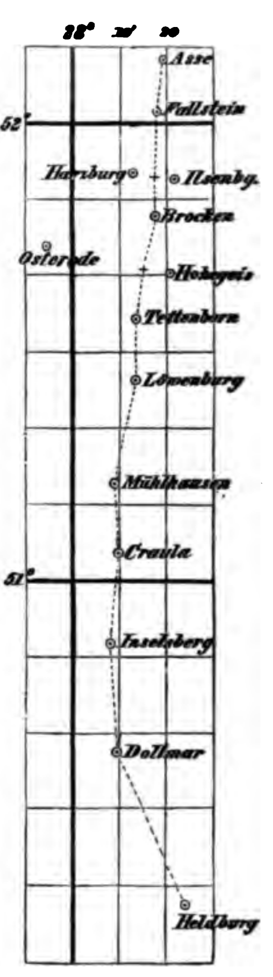


Fig. 44.

	I.		II.		Mittel
	$-F$	$\Sigma\Delta N'$	$-F$	$\Sigma\Delta N'$	
50°20′		0,00^m*)		0,00^m	0,00^m
Von 50°20′ bis 50°30′	+ 1009^{qmm}	+ 0,45	+ 1220^{qmm}	+ 0,55	0,50
„ 30 „ 40	+ 1034	+ 0,92	+ 1110	+ 1,05	0,98
„ 40 „ 50	+ 465	+ 1,12	— 45	+ 1,03	1,07
„ 50 „ 51 0	— 523	+ 0,89	— 318	+ 0,88	0,88
„ 51 0 „ 10	+ 505	+ 1,12	+ 505	+ 1,11	1,11
„ 10 „ 20	+ 650	+ 1,41	+ 850	+ 1,49	1,45
„ 20 „ 30	+ 65	+ 1,44	+ 285	+ 1,62	1,53
„ 30 „ 40	+ 800	+ 1,80	+ 760	+ 1,96	1,88
„ 40 „ 50	— 978	+ 1,36	— 1070	+ 1,48	1,42
„ 50 „ 52 0	— 1875	+ 0,52	— 1925	+ 0,62	0,57
„ 52 0 „ 10	— 305	+ 0,38	— 295	+ 0,48	0,43

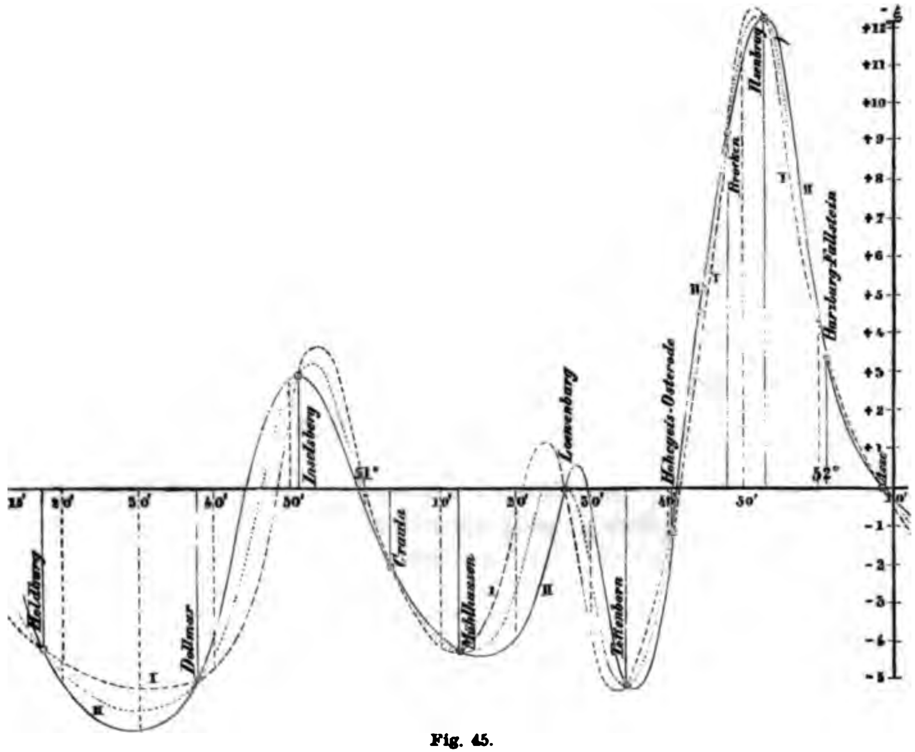


Fig. 45.

Die beiden Interpolationskurven, welche beide *genau* durch die

*) Als Nullpunkt willkürlich angenommen.

Punkte gelegt sind, geben ziemlich gut übereinstimmende Resultate. Es ist wohl möglich, dafs dieses ein Zufall ist.*) Nach Ansicht der Zeichnung kann man aber annähernd die Differenzen F nach beiden Kurven von 10′ zu 10′ in geographischer Breite als zufällige betrachten. Bildet man aus den Quadraten der 11 Differenzen der F in derselben Zeile die mittlere Differenz im Sinne eines mittleren Fehlers, so folgt als mittlerer Fehler eines $\Delta N'$ für eine Strecke von 10′ in geographischer Breite

$$\pm 0^m,10 .$$

Für den Gesamthöhenunterschied in I oder II also ist hiernach der m. F. gleich:

$$\pm 0,1 \sqrt{11}\,, \text{ d. i. } \pm 0,33^m$$

und für das Mittel beider Ergebnisse

$$\pm 0,23^m .$$

Die hierin noch nicht enthaltene Unsicherheit der ξ selbst vergröfsert diesen mittleren Fehler nur wenig. Andrerseits ist derselbe eher zu grofs als zu klein geschätzt, indem im einzelnen die beiden Interpolationskurven möglichst extreme, obgleich plausible Lagen erhalten haben. Die Fig. 45 zeigt auch die dem Mittel von I und II entsprechende Interpolationskurve.

§ 23. **Lotabweichungen in der Alpengegend.** *Carl von Orff* hat in der Schrift *Bestimmung der geographischen Breite der Königlichen Sternwarte bei München*, 1877 (Supplement zum 21. Bde. der Annalen der Sternwarte) einen sehr interessanten Anhang beigefügt, worin mittelst süddeutscher, österreichischer, schweizer und italienischer Dreiecksnetze Lotabweichungen nördlich und südlich der Alpen gewonnen werden. Auch hier ist ein Gang unverkennbar, jedoch ist trotz 31 Punkten in Breite, 8 in Länge und 14 in Azimut (aufser dem Ausgangspunkt München mit $\xi_1 = 0, \eta_1 = 0$) bei der Gröfse der Verteilungsfläche eine nur sehr unsichere Bestimmung des Sphäroids möglich. Für eine Reihe Punkte nahe dem Münchener Meridian hat man nach S. 60 a. a. O. folgende Werte:

---

*) S. 206 der *Zeitschrift für Vermessungswesen* Bd. 4 1875 giebt *Börsch* ähnliche Resultate, welche Differenzen bis zu $0,4^m$ mit den Ergebnissen I und bis zu $0,2^m$ mit den Ergebnissen II zeigen.

No.	Station	Geogr. Breite, angenähert.	ξ
9	Nürnberg	49° 27,5′	+ 4,9″
8	Wülzburg	49 1,5	— 1,8
7	Ingolstadt	48 45,8	+ 4,8
6	München	48 8,3	0,0*)
5	Holzkirchen, Peifsenberg Mittel	47 50,5	— 3,5
4	Benediktbeuren, Wendelstein, Mittenwald, Lanserkopf Mittel	47 31,5	— 12,1
3	S. Salvatore	45 51,1	+ 13,2
2	Padua, Venedig Mittel	45 24,9	+ 5,5
1	Bologna	44 29,8	— 6,6

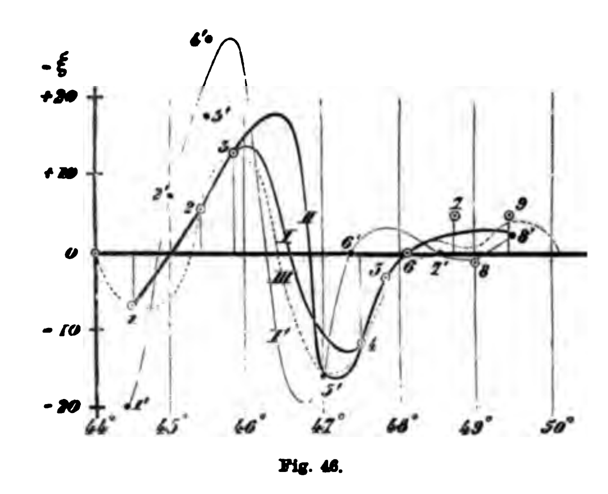


Fig. 46.

Die graphische Darstellung giebt nun für 2 zum Teil zusammenfallende, aber im allgemeinen doch extreme Ausgleichungskurven unter Ausgleichung der kleinen Schwankungen bei den 3 nördlichen Punkten:

---

*) Angenommen.

	I.		II.		Mittel	Reduziertes Mittel
	$-F$	$\Sigma N'$	$-F$	$\Sigma N'$		
44,5°		0,0^m	wie in I	0,0^m	0,0^m*)	
Von 44,5° bis 45	− 16,5^{gmm}	− 0,9		− 0,9	− 0,9	− 2,0^m
„ 45 „ 45,5	+ 17	+ 0,0		+ 0,0	+ 0,0	− 1,1
„ 45,5 „ 46	+ 52	+ 2,8		+ 2,8	+ 2,8	+ 1,4
„ 46 „ 46,5	+ 44	+ 5,2	+ 85	+ 7,4	+ 6,3	+ 5,2
„ 46,5 „ 47	− 17,5	+ 4,3	+ 14	+ 8,2	+ 6,3	+ 5,2
„ 47 „ 47,5	− 56,5	+ 1,2	− 69	+ 4,5	+ 2,8	+ 1,7
„ 47,5 „ 48	− 33	− 0,6	wie in I	+ 2,7	+ 1,1	+ 0,0*)
„ 48 „ 48,5	+ 2,5	− 0,4		+ 2,8	+ 1,2	+ 0,1
„ 48,5 „ 49	+ 12,5	+ 0,2		+ 3,5	+ 1,9	+ 0,8
„ 49 „ 49,5	+ 12,5	+ 0,9		+ 4,2	+ 2,6	+ 1,5

Hierbei war

$$c_1 = 1 \text{ und } c_2 = 11150, \quad \frac{c_1 c_2}{\varrho''} = 0{,}054.$$

Die reduzierten Mittel sind durch Subtraktion von 1,1^m entstanden. Die Unsicherheit des totalen Höhenunterschieds von 45,5 bis 49° geographischer Breite dürfte 2 bis 3^m nicht überschreiten.

Die Fig. 46 zeigt noch eine Interpolationskurve I′ für ein zweites näherungsweise meridionales Profil. Die Nummern 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′ beziehen sich dabei der Reihe nach auf die Punkte Mondovi, Turin, Mailand, Andrate, Rigi, Zürich, Strafsburg-Tübingen, Mannheim.

Der Verlauf der ξ ist hier ganz ähnlich wie in dem ersten Profil und man kann auch in den Höhen nach Mafsgabe der Flächen einen ähnlichen Gang und gleiche (vielleicht etwas gröfsere) Extreme erwarten.

§ 24. **Anwendung der Rechnung auf die Bestimmung des Sphäroids.** Um die Willkürlichkeiten des graphischen Verfahrens zu vermeiden, kann man den Weg der Rechnung betreten. Man wird allerdings sehr bald finden, dafs hier die willkürliche Wahl der Interpolationsformel auch bedenklich ist. Sie ist vielleicht sogar bedenklicher als die Willkür beim graphischen Verfahren, weil es schwieriger ist, den Grad der Willkür zu konstatieren. Nur bei sehr dicht liegenden Bestimmungen, die eine wirkliche Ausgleichung gestatten, dürfte die Rechnung vorzuziehen sein.

---

*) Angenommen.

Nimmt man an, dafs die Sphäroidfläche sich durch *eine* Gleichung darstellen läfst*), so kann man bei mäfsiger Ausdehnung eines Stückes, das in Untersuchung ist, für N' eine Reihe der Form anwenden:

$$\left.\begin{aligned} N' = N'_0 &+ \mathfrak{A}_1 \Delta B + \mathfrak{A}_2 \Delta L \\ &+ \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 \Delta B^2 + \mathfrak{B}_2 \Delta B \Delta L + \frac{1}{2}\mathfrak{B}_3 \Delta L^2 \\ &+ \frac{1}{6}\mathfrak{C}_1 \Delta B^3 + \frac{1}{2}\mathfrak{C}_2 \Delta B^2 \Delta L + \frac{1}{2}\mathfrak{C}_3 \Delta B \Delta L^2 + \frac{1}{6}\mathfrak{C}_4 \Delta L^3 + \cdots, \end{aligned}\right\} (1)$$

worin $\Delta B = B - B_0$, $\Delta L = L - L_0$ ist und N'_0 den Wert von N' im Ausgangspunkte $(B_0 L_0)$ bezeichnet. Diese Reihe kann man entweder als *Taylors* Reihe auffassen, oder als eine Interpolationsformel, die aus derjenigen von *Lagrange* für einen Meridianschnitt, also aus einer Reihe nach Potenzen von ΔB, hervorgeht, wenn die Koefficienten wieder als Potenzreihen nach ΔL entwickelt werden.

Ist nun dM ein Meridianelement und dP ein Element des Parallelkreises, dann ist $\frac{\partial N'}{\partial M} dM$ der Zuwachs von N' nach Norden für dM und $\frac{\partial N'}{\partial P} dP$ der Zuwachs von N' nach Westen für dP. Da diese Gröfsen bezw. auch gleich ξdM und $-\eta dP$ sind, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial N'}{\partial M} \quad \text{d. i.} \quad \xi = \frac{\partial N'}{\varrho_m \partial \Delta B} \\ \eta &= -\frac{\partial N'}{\partial P} \quad \text{d. i.} \quad \eta = -\frac{\partial N'}{\varrho_n \cos B \partial \Delta L}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei ϱ_m den Krümmungsradius im Meridian, ϱ_n denjenigen im Perpendikel für die geographische Breite B bezeichnet.

Führt man die Differentiation aus, so erhält man Ausdrücke für ξ und η, welche zeigen, wie aus einer Reihe gegebener ξ und η sich der Ausdruck (1) für N' bis auf die Konstante N'_0 bestimmen läfst.

Für eine Funktion i. Grades müssen $(2 + 3 + \cdots \overline{i + 1})$, d. i. $\frac{1}{2} i(i + 3)$ Komponenten der Lotabweichung vorliegen. Verteilen sich dieselben nicht gleichmäfsig auf ξ und η, so müssen doch wenigstens i der gegebenen Werte Komponenten ξ oder η sein, je nachdem die Anzahl der η oder ξ dominiert.

*) Näherungsweise wird dieses trotz der Krümmungsdiskontinuitäten des Geoids (S. 22) der Fall sein. Aber es bleibt doch jedenfalls eine grofse Schwierigkeit infolge derselben, da viele Glieder mit zu bestimmenden Koefficienten zur Darstellung erforderlich werden.

Wenn man überlegt, dafs eine Ausmittelung der Funktion N' sich nur lohnen wird, falls für eine gröfsere Anzahl Punkte ξ und η gegeben sind, so giebt es bei strenger Darstellung dieser Werte auch viele Koefficienten zu bestimmen. Eine Verminderung der Anzahl derselben verlangt eine Ausgleichung, die aber wegen der hierbei unvermeidlichen (mit der Natur der Potenzreihe verbundenen) grofsen Zahlenkoefficienten sehr mühsam, ja in der Regel wohl undurchführbar wird. Ein einfaches Zahlenbeispiel wird die Schwierigkeit weiterhin erläutern und bestätigen.

Einfacher ist natürlicherweise die Rechnung, wenn es nur gilt, einzelne Profile zu behandeln. Das erwähnte Beispiel bezieht sich in der That nur auf ein Profil; allein selbst hier wird die numerische Arbeit der Ausgleichungsrechnung schon bedeutend.

Am einfachsten ist es noch, alle Lotabweichungskomponenten für ein Profil streng darzustellen, weil man hierbei die *Lagrange*sche Interpolationsformel in der ursprünglichen Form anwenden kann, ohne eine Auflösung von Gleichungen erst vornehmen zu müssen.*) Man hat z. B. für eine meridionales Profil, wenn die Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_i \ldots \xi_n$ für n Punkte gegeben sind, welche in Bezug auf einen willkürlichen Anfangspunkt in geographischer Breite die Abstände ΔB_1, $\Delta B_2, \ldots \Delta B_i \ldots \Delta B_n$ haben, als interpolatorisch für den Punkt ΔB bestimmten Wert ξ:

$$\xi = \sum_1^n \xi_i \frac{\Delta B - \Delta B_1}{\Delta B_i - \Delta B_1} \frac{\Delta B - \Delta B_2}{\Delta B_i - \Delta B_2} \cdots \frac{\Delta B - \Delta B_{i-1}}{\Delta B_i - \Delta B_{i-1}} \frac{\Delta B - \Delta B_{i+1}}{\Delta B_i - \Delta B_{i+1}} \cdots \frac{\Delta B - \Delta B_n}{\Delta B_i - \Delta B_n}. \quad (3)$$

Die Entwicklung der n Glieder der Summe rechter Hand giebt ξ als Potenzreihe von ΔB.**) Jedoch dürfte es in der Regel bequemer sein, für eine Anzahl ΔB in gleichem Intervall ξ zu berechnen und $\Delta N'$ durch mechanische Quadratur abzuleiten.

*) Diese Interpolationsformel ist nichts anderes als die *allgemeine* Auflösung des Problems. Um sie zu gewinnen, können die Koefficienten der Potenzreihe aus dem mittelst Determinanten aufzulösenden Gleichungssystem entnommen werden, welches die streng darzustellenden Werte der Potenzreihe geben. Aufserdem ist insbesondere noch ein bekannter Satz über die Umformung eines Produktes aller Differenzen gegebener Gröfsen in eine Determinante anzuwenden.

**) Es liegt der Gedanke nahe, die allgemeine Formel für ξ auch für den Fall aufzusuchen, dafs mittelst Ausgleichungsrechnung aus n Beobachtungen eine Potenzreihe mit weniger als n Koefficienten hergeleitet werden soll. Dieses kann in der That auch mittelst der bekannten Determinantensätze geschehen, allein trotz der theoretischen Einfachheit dürfte doch die Formel für die Anwendung zu mühsam erscheinen.

Tchébychef hat sich in mehreren Abhandlungen (vergl. insbesondere die *Mémoires de l'Acad. imp. des sciences de St. Pétersbourg* von 1858 und 1859) mit

Ein anderer und zwar recht bequemer Weg zur interpolatorischen Darstellung der Lotabweichungen einzelner Profile ergiebt sich, wenn man darauf verzichtet, sämtliche gegebene Werte durch *eine* Gleichung zu befriedigen.

Das einfachste Verfahren ist, immer nur mit Rücksicht auf 2 benachbarte Lotabweichungen zu interpolieren, d. h. also für ein meridionales Profil zwischen ξ_i und ξ_k zu setzen:

$$\xi = \xi_i \frac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_i - \Delta B_k} + \xi_k \frac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_k - \Delta B_i}. \tag{4}$$

Im Profil der ξ giebt das gerade Linien zwischen je 2 Punkten, also eine Interpolation mit Unstetigkeiten, die sich aber im Profil der N' versteckt, da die Gleichheit der ξ an den Unstetigkeitsstellen des erstgenannten Profils zusammenfallende Tangenten [siehe die 1. Gleichung (2)] im Profil der N' erzeugt.

Vorzuziehen ist es in vielen Fällen, immer 3 benachbarte Lotabweichungen zu beachten, also für ein meridionales Profil

$$\xi = \left\{ \begin{array}{c} \xi_h \dfrac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_h - \Delta B_i} \dfrac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_h - \Delta B_k} + \xi_i \dfrac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_i - \Delta B_h} \dfrac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_i - \Delta B_k} \\ + \xi_k \dfrac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_k - \Delta B_h} \dfrac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_k - \Delta B_i} \end{array} \right\} \tag{5}$$

zu setzen, wobei ξ_h, ξ_i, ξ_k 3 auf einander folgende gegebene Werte sind. Als Interpolationskurve im Profil der ξ tritt jetzt die Parabel 2. Grades auf. Selbstverständlich giebt es auch hier Unstetigkeiten, aber auch nur im Profil der ξ.

Für die praktische Anwendung dürfte vielleicht als *zweckmäfsigstes Verfahren* ein Vorgang der Art anzuwenden sein, dafs man immer 4 benachbarte Lotabweichungen in eine Interpolationsformel (3) bringt, aber jedesmal *nur das mittelste Stück* der Interpolationskurve benutzt.*) Man wird auf diese Art die kleinsten Diskontinuitäten erhalten. Die Formel lautet hier, wenn ξ_h, ξ_i, ξ_k, ξ_l auf einander folgen:

---

dem Problem der Interpolation beschäftigt, u. a. auch mit der Interpolation nach der Methode der kl. Qu. (1859). Die grofsen Zahlen sind jedoch hierbei nicht vermieden, wie überhaupt eine wesentliche Vereinfachung gegen die gewöhnliche Procedur für diese Methode nicht erreicht ist und auch nicht möglich scheint.

*) Von diesem Vorgange ist man allerdings an den beiden Enden der zu interpolierenden Amplitude genötigt etwas abzuweichen, was aber gerade an den Enden ohne Belang ist.

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} \xi_h \dfrac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_h - \Delta B_i} \dfrac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_h - \Delta B_k} \dfrac{\Delta B - \Delta B_l}{\Delta B_h - \Delta B_l} + \xi_i \dfrac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_i - \Delta B_h} \dfrac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_i - \Delta B_k} \dfrac{\Delta B - \Delta B_l}{\Delta B_i - \Delta B_l} \\ + \xi_k \dfrac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_k - \Delta B_h} \dfrac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_k - \Delta B_i} \dfrac{\Delta B - \Delta B_l}{\Delta B_k - \Delta B_l} + \xi_l \dfrac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_l - \Delta B_h} \dfrac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_l - \Delta B_i} \dfrac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_l - \Delta B_k}. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Über zwei andere Interpolationsformeln vergl. das *American Journal of Mathematics pure and applied* Vol. II No. 4, 1879; dieselben sind aber im vorliegenden Falle weniger zweckmäfsig. — Zur Interpolation gegebener Werte ξ für Punkte einer Fläche giebt es auch Formeln; schon *Lambert* erwähnt solche im 3. Teil seiner *Beiträge zum Gebrauch der Mathematik* (1772), S. 68 u. ff. Hier treten immer an Stelle der Faktoren $\Delta B - \Delta B_i, \ldots$ die Faktorenpaare $(\Delta B - \Delta B_i)\,(\Delta L - \Delta L_i)$ auf. Würde man eine solche Formel auf den Harz anwenden, so gäbe ihre Integration nach B den Ausdruck für N' bis auf eine unbekannte Funktion von L, zu deren Bestimmung es einer Anzahl Werte η bedarf. Übrigens macht auch bereits *Lambert* auf die Vorteile periodischer Reihen aufmerksam.

§ 25. **Fortsetzung.** Eine im allgemeinen weit mehr als die Potenzreihe zu strenger Darstellung und zu Ausgleichungen geeignete Formel erhält man, wenn N' für einen Meridian nach *Fouriers* Reihe entwickelt gedacht wird und die Koefficienten selbst wieder als Funktionen des geographischen Längenunterschieds nach *Fourier* entwickelt werden. Wir setzen also:

$$\left. \begin{array}{ll} & N' = b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots \\ & \qquad + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots \\ \text{wobei} & \\ & b_i = b_{i.0} + b_{i.1} \cos y + b_{i.2} \cos 2y + \cdots \\ & \qquad + b'_{i.1} \sin y + b'_{i.2} \sin 2y + \cdots \\ \text{und} & \\ & a_i = a_{i.0} + a_{i.1} \cos y + a_{i.2} \cos 2y + \cdots \\ & \qquad + a'_{i.1} \sin y + a'_{i.2} \sin 2y + \cdots \end{array} \right\} \quad (1)$$

ist und x und y solche Vielfache von ΔB und ΔL bedeuten, dafs die zur Interpolation gelangenden Amplituden von x und y angemessen kleiner als 2π sind. Man mufs es nämlich vermeiden, dafs die äufsersten gegebenen Werte von N' zu Werten von x bezw. y gehören, die nahezu um 2π verschieden sind, weil der Ausdruck (1) bei Variationen von x und y um 2π dieselben Werte N' wiedergiebt. Die Nichtbeachtung dieses Umstandes erschwert offenbar die Darstellung.

Um dieselbe noch mehr zu erleichtern, ist aufserdem eine Modifikation des Ausdrucks (1) notwendig. Die Differentialquotienten von N', welche mittelst der Relationen (2) des vorigen Paragraphen zu

den Ausdrücken für ξ und η führen, besitzen nämlich bei der jetzigen Gestalt des Ausdrucks (1) kein von Cosinus oder Sinus freies Glied. Es ist daher die Summe der ξ oder η für alle Werte über eine Periode von x oder y hinweg gerade null.

Fügen wir nun in den Ausdrücken (1) rechter Hand

$$\left.\begin{array}{lll} \text{zu } N': & \text{das Glied} & a_0\, x \\ \text{„ } b_i: & \text{„ \quad „} & b'_{i.0}\, y \\ \text{„ } a_i: & \text{„ \quad „} & a'_{i.0}\, y\,, \end{array}\right\} \qquad (1^*)$$

so kommen jetzt in den Differentialquotienten auch konstante Glieder vor, sodafs die Summe der ξ oder η innerhalb einer Periode nicht mehr notwendig null sein wird, was den Anschlufs sehr erleichtert.

Die Differentialquotienten sind jetzt erst in völliger Allgemeinheit *Fourier*sche Reihen; sie bleiben es zwar auch, wenn man a_0 konstant annimmt und alle Koefficienten von y bis auf den einen Koefficienten $b'_{0.0}$ gleich null setzt; allein alsdann ändern sich die konstanten Glieder der Reihen für ξ und η nicht mehr von Meridian zu Meridian bezw. von Parallel zu Parallel, wodurch der Anschlufs wieder sehr erschwert wird. Wir behalten demnach die allgemeinen Ausdrücke bei. (Nur $a'_{0.0}$ könnte man allenfalls weglassen.)

Diese Ausdrücke eignen sich aber im Vergleich zu Potenzreihen zur Interpolation gegebener ξ und η (in Strenge oder unter Ausgleichung) deshalb sehr gut, weil die Koefficienten der Unbekannten nicht blos stark nach der Gröfse, sondern auch im Vorzeichen variieren.

§ 26. **Zahlenbeispiel.** Wir wenden die Zahlwerte des Beispiels von § 23 S. 572 auf die Potenzreihe an. Die Figur 46 zeigt, dafs ξ wenigstens vom 4. Grade angenommen werden mufs. Indem wir noch etwas weiter gehen und in dem Ausdruck (1) S. 574 ΔL gleich null setzen, sowie die Bedeutung der Koefficienten z. T. etwas abändern, erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} N' = N'_0 + \mathfrak{A}_1 \Delta B + \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 \Delta B^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{C}_1 \Delta B^3 + \frac{1}{4}\mathfrak{D}_1 \Delta B^4 \\ \qquad + \frac{1}{5}\mathfrak{E}_1 \Delta B^5 + \frac{1}{6}\mathfrak{F}_1 \Delta B^6. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Differentiation giebt, wenn ΔB in Gradmafs verstanden und ξ für $\Delta B =$ null (München) auch null genommen wird:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{\mathfrak{B}_1 \Delta B + \mathfrak{C}_1 \Delta B^2 + \mathfrak{D}_1 \Delta B^3 + \mathfrak{E}_1 \Delta B^4 + \mathfrak{F}_1 \Delta B^5\right\} \frac{\varrho^0 \varrho''}{\varrho_m} \quad (2)$$

oder in sofort ersichtlicher Abkürzung:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \mathfrak{B}'_1 \Delta B + \mathfrak{C}'_1 \Delta B^2 + \mathfrak{D}'_1 \Delta B^3 + \mathfrak{E}'_1 \Delta B^4 + \mathfrak{F}'_1 \Delta B^5. \quad (3)$$

Wir erhalten nun nachstehende *Fehlergleichungen*, indem wir uns jedem ξ eine Verbesserung λ beigefügt denken und alsdann ξ nach rechts schaffen:

	$-\xi$	$\mathfrak{B}'_1$ 1.	$\mathfrak{C}'_1$ 2.	$\mathfrak{D}'_1$ 3.	$\mathfrak{E}'_1$ 4.	$\mathfrak{F}'_1$ 5.
$\lambda_1 =$	+ 6,6″	− 3,64	13,2496	− 48,2285	175,5519	− 639,0089
$\lambda_2 =$	− 5,5	− 2,72	7,3984	− 20,1236	54,7363	− 148,8828
$\lambda_3 =$	− 13,2	− 2,29	5,2441	− 12,0090	27,5006	− 62,9763
$\lambda_4 =$	+ 12,1	− 0,61	0,3721	− 0,2269	0,1384	− 0,0844
$\lambda_5 =$	+ 3,5	− 0,30	0,0900	− 0,0270	0,0081	− 0,0024
$\lambda_7 =$	− 4,8	+ 0,63	0,3969	+ 0,2500	0,1575	+ 0,0992
$\lambda_8 =$	+ 1,8	+ 0,89	0,7921	+ 0,7050	0,6274	+ 0,5584
$\lambda_9 =$	− 4,9	+ 1,32	1,7424	+ 2,3000	3,0360	+ 4,0075
Summen:			29,2856	− 77,3600	261,7562	− 846,2897

Höhere Potenzen von ΔB zur Bildung der Normalgleichungen				
6.	7.	8.	9.	10.
2325,9924	− 8466,6125	30818,470	− 112179,230	408332,396
404,9612	− 1101,4945	2996,065	− 8149,296	22166,087
144,2158	− 330,2542	756,282	− 1731,886	3966,019
0,0515	− 0,0314	0,019	− 0,012	0,007
0,0007	− 0,0000	0,000	0,000	0,000
0,0625	+ 0,0394	0,025	+ 0,016	0,010
0,4970	+ 0,4423	0,394	+ 0,350	0,312
5,2899	+ 6,9826	9,217	+ 12,166	16,060
2881,0710	− 9890,9283	34580,472	− 122047,892	434480,891

Die *Normalgleichungen* lauten hiernach wie folgt:

	$\mathfrak{B}'_1$	$\mathfrak{C}'_1$	$\mathfrak{D}'_1$	$\mathfrak{E}'_1$	$\mathfrak{F}'_1$
1.	29,2856	− 77,3600	261,7562	− 846,2897	2881,0710
2.	− 77,3600	261,7562	− 846,2897	2881,0710	− 9890,9283
3.	261,7562	− 846,2897	2881,0710	− 9890,9283	34580,472
4.	− 846,2897	2881,0710	− 9890,9283	34580,472	− 122047,892
5.	2881,0710	− 9890,9283	34580,472	− 122047,892	434480,891

zu 1 $= -\ 4{,}843$

zu 2 $= +\ 26{,}66565$

zu 3 $= +\ 63{,}15049$

zu 4 $= -\ 481{,}78488$

zu 5 $= +\ 2587{,}45361$.

Eine Überschlagsrechnung ergab, dafs der Koefficient von $\mathfrak{F}_1$ sich ebenso wie das rechter Hand stehende Absolutglied bei der successiven Elimination von $\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{D}'_1$, und $\mathfrak{E}'_1$ in der 5. Gleichung zuletzt auf einige Einheiten in den Zehnern reduziert, sodafs es sogar zweifelhaft ist, ob die angesetzten Koefficienten auf genügend viele Decimalen berechnet sind, um die Unbekannten mit der erforderlichen Schärfe zu erhalten. Aus diesem Grunde, wodurch sich also das Verfahren als ganz unpraktisch erweist, wurde die Rechnung nicht fortgesetzt.

Unter Anwendung der geradlinigen Interpolation bezw. der Interpolation mittelst der Parabel vom 2. Grade (vergl. die Formeln (4) und (5) S. 576) erhielt S. 61 a. a. O. *von Orff* nachstehende Werte von N', wobei N' für München (Nr. 6) zu null angenommen wurde:

	N'		Geogr. Breite
	1.	2.	
1	$-\ 0{,}80^m$	$+\ 8{,}41^m$	$44{,}50^0$
2	$-\ 1{,}08$	$+\ 7{,}91$	45,42
3	$+\ 1{,}12$	$+\ 10{,}09$	45,85
4	$+\ 1{,}62$	$+\ 1{,}66$	47,53
5	$+\ 0{,}28$	$+\ 0{,}27$	47,84
6	0,00	0,00	48,14
7	$+\ 0{,}81$	$+\ 0{,}91$	48,76
8	$+\ 1{,}02$	$+\ 1{,}03$	49,03
9	$+\ 1{,}38$	$+\ 0{,}96$	49,46

§ 27. **Fortsetzung des Zahlenbeispiels.** Die Reihe (1.1*) S. 577 und 578 giebt bei der Differentiation nach x:

$$\frac{\partial N'}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{l} \quad - b_1 \sin x - 2b_2 \sin 2x - 3b_3 \sin 3x - \cdots \\ + a_0 + a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + 3a_3 \cos 3x + \cdots . \end{array} \right\} \quad (1)$$

Hierin haben die Koefficienten a und b konstante Werte, wenn die Reihe wie im vorliegenden Falle auf ein Meridianprofil Anwendung findet.

Die graphische Darstellung zeigt nun sofort, daſs es passend ist, $60\,\varDelta B = x$ zu setzen.*) Es wird somit $dx = 60\, d\varDelta B$ und daher:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \frac{60\,\varrho''}{\varrho_m} \left\{ \begin{array}{c} -\, b_1 \sin x - 2b_2 \sin 2x - 3b_3 \sin 3x - \cdots \\ +\, a_0 + a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + 3a_3 \cos 3x + \cdots \end{array} \right\} \quad (2)$$

oder abgekürzt:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{ \begin{array}{c} S_1 \sin x + S_2 \sin 2x + S_3 \sin 3x + \cdots \\ +\, T_0 + T_1 \cos x + T_2 \cos 2x + T_3 \cos 3x + \cdots. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Da für München $\xi = 0$ gesetzt wurde und zugleich $x = 0$ ist, hat man noch als Bedingung, um hier ξ in Strenge gleich null zu behalten:

$$0 = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \cdots, \quad (4)$$

daher endlich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{ \begin{array}{c} S_1 \sin x + S_2 \sin 2x + S_3 \sin 3x + \cdots \\ -\, T_1 (1 - \cos x) - T_2 (1 - \cos 2x) - T_3 (1 - \cos 3x) - \cdots. \end{array} \right\} (5)$$

Hiermit ergeben sich unter Beschränkung auf 6 Koefficienten nachstehende *Fehlergleichungen*:

$x =$			S_1	T_1	S_2
$-\,218^0\,24'$	$\lambda_1 =$	$+\ 6{,}6$	$+\ 0{,}621\, S_1$	$-\ 1{,}783\, T_1$	$-\ 0{,}974\, S_2$
$-\,163\ \ 12$	$\lambda_2 =$	$-\ 5{,}5$	$-\ 0{,}289$	$-\ 1{,}957$	$+\ 0{,}553$
$-\,137\ \ 24$	$\lambda_3 =$	$-\ 13{,}2$	$-\ 0{,}677$	$-\ 1{,}736$	$+\ 0{,}996$
$-\ \ 36\ \ 36$	$\lambda_4 =$	$+\ 12{,}1$	$-\ 0{,}596$	$-\ 0{,}197$	$-\ 0{,}957$
$-\ \ 18\ \ \ 0$	$\lambda_5 =$	$+\ 3{,}5$	$-\ 0{,}309$	$-\ 0{,}049$	$-\ 0{,}588$
$+\ \ 37\ \ 48$	$\lambda_7 =$	$-\ 4{,}8$	$+\ 0{,}613$	$-\ 0{,}210$	$+\ 0{,}969$
$+\ \ 53\ \ 24$	$\lambda_8 =$	$+\ 1{,}8$	$+\ 0{,}803$	$-\ 0{,}404$	$+\ 0{,}957$
$+\ \ 79\ \ 12$	$\lambda_9 =$	$-\ 4{,}9$	$+\ 0{,}982$	$-\ 0{,}813$	$+\ 0{,}368$*)

	T_2	S_3	T_3
zu λ_1	$-\ 0{,}772\, T_2$	$+\ 0{,}905\, S_3$	$-\ 0{,}574\, T_3$
zu λ_2	$-\ 0{,}167$	$-\ 0{,}771$	$-\ 1{,}637$
zu λ_3	$-\ 0{,}916$	$-\ 0{,}790$	$-\ 0{,}387$
zu λ_4	$-\ 0{,}711$	$-\ 0{,}941$	$-\ 1{,}339$
zu λ_5	$-\ 0{,}191$	$-\ 0{,}809$	$-\ 0{,}412$
zu λ_7	$-\ 0{,}751$	$+\ 0{,}918$	$-\ 1{,}397$
zu λ_8	$-\ 1{,}289$	$+\ 0{,}339$	$-\ 1{,}941$
zu λ_9	$-\ 1{,}928$	$-\ 0{,}844$	$-\ 1{,}536.$

*) Ein etwas kleinerer Faktor wäre noch passender gewesen.

**) Sollte genauer gleich 0,371 sein.

Die Koefficienten der *Normalgleichungen* wurden auf 4 Decimalstellen gebildet; indessen genügen eigentlich 2, sodafs der *Rechenschieber* hier ausreichen würde. Diese Gleichungen sind:

	S_1	T_1	S_2	T_2	S_3	T_3
1.	3,3631	− 0,4853	+ 1,0369	− 2,7170	+ 2,1366	− 2,6194
2.	− 0,4853	+ 10,9321	− 1,7466	+ 5,6888	+ 1,8481	+ 7,5092
3.	+ 1,0369	− 1,7466	+ 5,4983	− 2,1308	+ 0,1849	− 2,9844
4.	− 2,7170	+ 5,6888	− 2,1308	+ 7,9476	+ 1,4782	+ 8,6142
5.	+ 2,1366	+ 1,8481	+ 0,1849	+ 1,4782	+ 5,2475	+ 1,9976
6.	− 2,6194	+ 7,5092	− 2,9844	+ 8,6142	+ 1,9976	+ 13,2001

zu 1 = − 0,0226
zu 2 = − 23,6202
zu 3 = + 40,9866
zu 4 = − 9,3747
zu 5 = − 6,7633
zu 6 = − 3,4178.

Sie sind geprüft durch direkte Bildung ihrer Summengleichung, welche auch bei der successiven Elimination zu steter Kontrolle mit fortgeführt wurde (*Ausgleichungsrechnung* S. 104).

Die reduzierten Normalgleichungen lauten:

S_1	T_1	S_2	T_2	S_3	T_3	
3,3631	− 0,4853	+ 1,0369	− 2,7170	+ 2,1366	− 2,6194	1.
	10,8621	− 1,5970	+ 5,2967	+ 2,1564	+ 7,1312	2.
		4,9438	− 0,5144	− 0,1568	− 1,1283	3.
			3,1163	+ 2,1365	+ 2,9032	4.
				1,9922	+ 0,2198	5.
					3,4917	6.

zu 1 = − 0,0226
zu 2 = − 23,6235
zu 3 = + 37,5204
zu 4 = + 6,0305
zu 5 = − 5,0035
zu 6 = + 15,5709,

woraus sich nachstehende Werte der Unbekannten ergeben:

$S_1 =$ 2,1674 log = 0,33594
$T_1 = -$ 3,1793 0,50233ₙ

$$\begin{array}{ll} S_2 = +\,8{,}4951 & 0{,}92917 \\ T_2 = -\,0{,}1601 & 9{,}2044_n - 10 \\ S_3 = -\,3{,}0035 & 0{,}47763_n \\ T_3 = +\,4{,}4594 & 0{,}64927. \end{array}$$

Die übrigbleibenden Fehler, d. h. die Verbesserungen der gegebenen ξ (abgesehen von ξ für München) werden:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = +\,0{,}187'' & \lambda_5 = -\;\;1{,}385'' \\ \lambda_2 = -\,0{,}163 & \lambda_7 = -\;\;3{,}439 \\ \lambda_3 = +\,0{,}107 & \lambda_8 = +\;\;3{,}487 \\ \lambda_4 = +\,0{,}273 & \lambda_9 = -\;\;1{,}067 \end{array}\right\} [\lambda\lambda] = 27{,}190.$$

Dagegen ist nach den bekannten beiden Kontrollformeln*) im Mittel $[\lambda\lambda] = 27{,}194$. Von diesen ist namentlich diejenige, welche die Glieder der reduzierten Normalgleichungen benutzt, interessant; denn sie zeigt, wie sich $[\lambda\lambda]$ durch Mitnahme je einer weiteren Unbekannten verkleinert. Man hat:

$$[\lambda\lambda] = [\xi\xi] - \frac{0{,}0226^2}{3{,}3631} - \frac{23{,}6235^2}{10{,}8621} - \cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} = 457{,}00 - 0{,}000 - 51{,}378 - 284{,}756 \\ \quad - 11{,}670 - 12{,}566 - 69{,}437 \end{array}\right\} = 27{,}193.$$

Die Formel für ξ wird jetzt, da nach (4) $T_0 = -\,1{,}1200$ folgt:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{\begin{array}{r} +\,2{,}1674 \sin x + 8{,}4951 \sin 2x - 3{,}0035 \sin 3x \\ -\,1{,}1200 - 3{,}1793 \cos x - 0{,}1601 \cos 2x + 4{,}4594 \cos 3x \end{array}\right\}$$

oder

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{\begin{array}{c} -\,1{,}1200 + 3{,}8478 \sin (x - 55^0\,43') \\ +\,8{,}4967 \sin (2x - 1^0\,5') \\ +\,5{,}3765 \sin (3x + 123^0\,59'). \end{array}\right\}$$

Es wird ferner:

$$N' = \left\{\begin{array}{l} b_0 - 2{,}1674 \cos x - 4{,}2476 \cos 2x + 1{,}0012 \cos 3x \\ -1{,}1200x - 3{,}1793 \sin x - 0{,}0801 \sin 2x + 1{,}4865 \sin 3x \end{array}\right\} \frac{\varrho_m}{60\,\varrho''}$$

oder

$$N' = \left\{\begin{array}{c} b_0 - 1{,}1200\, x - 3{,}8478 \cos (x - 55^0\,43') \\ -\,4{,}2483 \cos (2x - 1^0\,5') \\ -\,1{,}7922 \cos (3x + 123^0\,59') \end{array}\right\} \frac{\varrho_m}{60\,\varrho''},$$

*) *Ausgleichungsrechnung* S. 106 u. 107 (6) und (9).

wobei x im 2. Glied als Arcus, oder gleich x in Graden: ϱ^0 zu verstehen ist. Ferner ist $\varrho_m : \varrho''$ für 46,5° Breite gleich 30,87; also

$$\frac{\varrho_m}{60\,\varrho''} = 0{,}5145.$$

Berechnet man noch zur Kontrolle nach der zweiten der eben für ξ gefundenen Formeln ξ für die 8 Beobachtungen, so folgt:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = +\,0{,}193'' & \lambda_6 = -\,1{,}386'' \\ \lambda_2 = -\,0{,}163 & \lambda_7 = -\,3{,}442 \\ \lambda_3 = +\,0{,}101 & \lambda_8 = +\,3{,}493 \\ \lambda_4 = +\,0{,}271 & \lambda_9 = -\,1{,}036, \end{array}$$

was völlig genügend mit den oben ermittelten Werten stimmt, wenn man beachtet, dafs die Koefficienten der Fehlergleichungen nur mit 3 Decimalen angesetzt sind. (λ_9 weicht allerdings infolge eines gröberen Versehens in einem Koefficienten um 0,03″ von dem Ergebnis der anderen Rechnung ab, doch ist auch das noch ohne Belang.)

Man findet endlich nach den Formeln für ξ und N', wenn zu allen N' noch $(5{,}42 - b_0) \,.\, 0{,}5145$ addiert wird, um N' für München gleich null zu bekommen:

B	ΔB	x	ξ	N'
44,5°	− 3,64°	− 218° 24′	− 6,41″	+ 5,3^m
45	− 3,14	− 188 24	− 5,59	+ 3,3
45,5	− 2,64	− 158 24	+ 7,55	+ 3,5
46	− 2,14	− 128 24	+ 12,78	+ 6,7
46,5	− 1,64	− 98 24	− 1,00	+ 8,6
47	− 1,14	− 68 24	− 15,32	+ 6,1
47,5	− 0,64	− 38 24	− 12,43	+ 2,0
48	− 0,14	− 8 24	− 1,89	+ 0,1
48,5	+ 0,36	+ 21 36	+ 1,61	+ 0,2
49	+ 0,86	+ 51 36	+ 1,58	+ 0,6
49,5	+ 1,36	+ 81 36	+ 4,00	+ 1,4
50	+ 1,86	+ 111 36	+ 1,68	

Die Ergebnisse für die N' weichen innerhalb 45,5° und 49° von den früher auf S. 573 auf graphischem Wege erhaltenen um 3 bis 5^m ab. Wenn man aber den Verlauf der ξ nach vorstehender Rechnung in der Zeichnung Fig. 46 betrachtet, woselbst er durch Kurve III dar-

gestellt ist, wird man sich sagen müssen, dafs dem jetzigen Resultat mindestens nicht mehr Sicherheit zukommt, als dem früher auf graphischem Wege erhaltenen.

Ein strenger Anschlufs an alle 9 Werte ξ würde wenig förderlich sein, weil derselbe die Kurve nur wesentlich in der Gegend der Punkte 7, 8 und 9, wo jetzt der Anschlufs noch schlecht ist, beeinflussen wird.*)

§ 28. **Historische Notizen zur Entwicklung der Theorie der Lotabweichungen.** Die Beziehung (10) S. 537 zwischen Lotabweichung in Länge und Azimut, d. h. also die mehrerwähnte Kontrollgleichung, gab bereits *Laplace* 1799 in der *Mécanique céleste t.* II, *l.* III p. 117 und zwar nur speziell für die Endpunkte eines Meridianbogens an.

Gaufs benutzt sie 1830 (vergl. *Gaufs' Werke*, Bd. 4 S. 376) gelegentlich einer Anzeige der *Opérations géodésiques et astronom. pour la mesure d'un arc du parallèle moyen, exécutées en Piémont et en Savoie etc. en* 1821—23, um die Güte der Messungen zu kontrollieren. Bei dieser Operation waren die geographischen Längendifferenzen noch durch Pulversignale ermittelt worden; die Kontrollen waren also dabei von weit geringerem geodätischen Wert, wie jetzt seit Einführung des elektromagnetischen Telegraphen.

Ausführlich stellt *Bessel* 1837 in seiner mehrerwähnten Abhandlung *Über den Einflufs der Unregelmäfsigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen* (*Astronom. Nachr.* Bd. 14, Nr. 329—331, S. 269 oder *Abhandlungen* Bd. 3, S. 19 u. ff.) alles Wesentliche dar, sodafs seitdem über die Berechtigung, ja Notwendigkeit, mit der Hypothese des Rotationsellipsoids zu rechnen, ebenso wenig ein Zweifel bleiben konnte, wie über die Rechnungsvorschriften, um Lotabweichungen u. s. f. aus Messungen zu ermitteln.

Ebenso behandelt das Hauptwerk der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation* 1858 das Problem, S. 609 u. ff.

Auch General *von Schubert* entwickelt 1860 in den *Astronom. Nachr.* Bd. 52, Nr. 1245—47, S. 321 die Formeln für den Einflufs einer Lotabweichung auf Azimut, Breite und Länge. Die Zenith-

*) Wir können zum Schlufs nicht unerwähnt lassen, dafs wir das Ausgleichungsverfahren auf die Zahlwerte des § 23 S. 572 nur des Beispiels halber angewandt haben. Strenggenommen ist es im vorliegenden Falle ganz und gar nicht am Platze. Die Beobachtungen ξ sind ja auch zu einer irgend sicheren Bestimmung viel zu lückenhaft.

distanz irdischer Objekte nimmt er 90°, sodaſs sie hier keinen Einfluſs hat. Doch giebt er die Formel für Horizontalwinkel an.

Nach *Puissant, Traité de Géodésie*, t. II hat übrigens schon vor *Laplace* in der Mitte des 18. Jahrhunderts *Clairaut* einen Versuch gemacht, Abweichungen von der rotationsellipsoidischen Gestalt in betracht zu ziehen.

Neuere Darstellungen sind von *Villarceau, Sadebeck* (*Astronom. Nachr.* 1877 Bd. 90 S. 113 und Bd. 91 S. 145) und *Bremiker* (mitgeteilt von *v. Morozowicz* ebenda Bd. 90 S. 353). Letztere zwei Autoren beschäftigen sich insbesondere mit dem Einfluſs auf Horizontalwinkel.

Villarceau bespricht zuerst das Theorem von *Laplace*, sein 1. Theorem, und behandelt sodann verschiedene Methoden zur Bestimmung der Erhebung N des Geoids über dem Ellipsoid; nämlich erstens diejenige durch Zenithdistanzen in Verbindung mit geometrischen Nivellements (vergl. S. 521) und zweitens diejenige durch Interpolation der Lotabweichungen, für welchen letzteren Fall er verschiedene Interpolationsformeln angiebt. Wenn er aber dabei, um zu einem Ausdruck für N zu gelangen, darauf fuſst, daſs N eine [*analytische*] Funktion von $\varDelta B$ und $\varDelta L$ ist, daſs man also unzweifelhaft

$$\frac{\partial \xi}{\partial P} = -\frac{\partial \eta}{\partial M}$$

setzen könne, weil beide Differentialquotienten nur denselben Wert $\frac{\partial^2 N}{\partial P \partial M}$ vorstellen, so ist dieses (wie früher bemerkt) nicht ganz korrekt und nur eben für eine Interpolationsformel zulässig (vergl. S. 574).

Sein 2. Theorem giebt den Einfluſs der Lotabweichung auf die Zenithdistanz, sein 3. die letztgenannte Differentialgleichung. Vergl. *Verhandlungen der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung* von 1875 (publ. 1876) S. 111 u. ff., woselbst eine Zusammenstellung seiner Arbeiten, das 1. Theorem ausgenommen, sich findet; oder *Journal de Mathém. pures et appl.* (2. Ser., t. 12. 1867); *Comptes rendus* 1868 Bd. 67 S. 1275 sowie 1871 Bd. 73 S. 808 (periodische Reihen nach *Bertrand*) und 1873 Bd. 76 S. 851 (Potenzreihen).

Bessel giebt (vergl. *Abhandlungen* Bd. 3 S. 39) in seiner obenerwähnten Abhandlung auch Formeln zur Bestimmung der speziellen Krümmungsverhältnisse in einem Punkte, womit die Bestimmung eines osculierenden Ellipsoids eng zusammenhängt. Ebenso behandelt *Laplace* 1799 in der *Méc. cél.* t. II l. III p. 124 die Aufgabe, aus Breiten- und Azimutmessungen ein an einer Stelle osculierendes Rotationsellipsoid zu ermitteln. (Vergl. auch *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 622 u. ff. und *Gauſs* im *Briefwechsel zwischen Gauſs und Schumacher* Bd. 2. S. 197.)

Da diese Fragen indes keinerlei praktischen Wert haben, so sind sie hier nicht behandelt.

---

13. Kapitel.

Bestimmung des Erdellipsoids aus Gradmessungen.

§ 1. **Vorbemerkungen.** Obwohl die allgemeinen Formeln zur Bestimmung des Rotationsellipsoids, welches sich vielen über die Erdoberfläche verteilten astronomisch-geodätischen Messungen am besten anschliefst, im wesentlichen schon § 20 S. 562 gegeben sind, ist es doch erforderlich, die Bestimmung dieses Erdellipsoids noch besonders zu behandeln, um die für gewöhnlich üblichen Methoden nicht unerwähnt zu lassen und die Bedeutung der Ergebnisse zu beleuchten.

Die Messungen denken wir uns wieder in der für Landesvermessungen angegebenen Weise nach S. 485 u. ff. reduziert, wobei irgend welche vorläufigen Elemente der Meridianellipse benutzt werden und alle Grundlinien auf das Meeresniveau zu beziehen sind. Wie schon früher hervorgehoben ist, werden die rein geodätischen Resultate von den Abweichungen des Lotes und der gewählten Elemente der Meridianellipse gegen das gesuchte Erdellipsoid weit weniger afficiert, als die astronomischen Resultate. Wir werden uns daher in 1. Annäherung immer begnügen können, die rein geodätischen Resultate bis auf einen von der Höhenlage des Geoids zum Erdellipsoid abhängenden Reduktionsfaktor der linearen Längen als richtig anzunehmen.

§ 2. **Zwei Breitengradmessungen.** Bereits S. 12 ist erwähnt, dafs bei den ältesten Messungen zur Ermittlung der Gröfse und Gestalt der Erde die Meridianbögen direkt als horizontale Strecken abgemessen wurden. Wir denken uns in dieser Weise direkt oder durch Triangulation indirekt zwei Meridianbögen in (absolut genommen) möglichst verschiedenen geographischen Breiten ermittelt und nehmen an, dafs ihre Amplituden in geographischer Breite etwa 1 bis 2^0 nicht wesentlich überschreiten.

Nach S. 52 kann man aber einen Meridianbogen von geringer Ausdehnung in Bezug auf seine Länge mit grofser Genauigkeit als einen Kreisbogen betrachten, dem der zur mittleren Breite gehörende Krümmungsradius im Meridian als Radius und die Differenz der geographischen Breiten der Endpunkte als Zentriwinkel entsprechen.

Sind nun für eine Gradmessung B_1 und B_2 die geographischen Breiten der Endpunkte und bezeichnet ϱ_m den Krümmungsradius im Meridian für die Breite $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$, so wird

$$\varrho_m = \varrho'' \frac{M}{\Delta B} + \cdots, \tag{1}$$

worin M die Länge des Meridianbogens bezeichnet und ΔB gleich dem absoluten Werte der Differenz $B_2 - B_1$ in Sekunden ist.

Aus 2 Werten ϱ_m und ϱ'_m für die mittleren Breiten B und B' bestimmt sich e^2 wie folgt. Es ist

$$\varrho_m = \frac{a_0(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}^3}, \qquad \varrho'_m = \frac{a_0(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}^3}. \tag{2}$$

Hieraus folgt durch Division und Potenzierung:

$$\frac{1-e^2\sin^2 B}{1-e^2\sin^2 B'} = \left(\frac{\varrho'_m}{\varrho_m}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Reduziert man dies auf e^2 bezw. $1 - e^2$, so ist endlich:

$$\left.\begin{array}{c} e^2 = \dfrac{q-1}{q\sin^2 B' - \sin^2 B} \quad \text{und} \quad 1 - e^2 = \left(\dfrac{b_0}{a_0}\right)^2 = \dfrac{\cos^2 B - q\cos^2 B'}{q\sin^2 B' - \sin^2 B} \\ q = \sqrt[3]{\left(\dfrac{\varrho'_m}{\varrho_m}\right)^2} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Kennt man erst e^2, so folgt a_0 aus den Gleichungen (2) für ϱ_m und ϱ'_m ohne Schwierigkeit.

Wenn man bedenkt, dafs ϱ_m und ϱ'_m verhältnismäfsig wenig von einander abweichen, so kann man unter Vernachlässigung der 2. Potenz von $(\varrho'_m - \varrho_m)$ Näherungsformeln für e^2 oder die Abplattung $\mathfrak{a}$ ableiten, welche Formeln indessen kaum einfacher sind als obige Formel, trotzdem aber früher im Gebrauch waren. Sei $\varrho'_m > \varrho_m$, so setzen wir successive:

$$\left.\begin{array}{c} q = \left(1 + \dfrac{\varrho'_m - \varrho_m}{\varrho_m}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\varrho'_m - \varrho_m}{\varrho_m} + \cdots \\ e^2 = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\varrho'_m - \varrho_m}{\sqrt[3]{\varrho'^2_m\varrho_m}\sin^2 B' - \varrho_m\sin^2 B} + \cdots \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Im 2. Glied des Nenners darf man für ϱ_m auch $\sqrt[3]{\varrho'^2_m\,\varrho_m}$ setzen, da dies im Resultat nur einen Fehler der Ordnung $\left(\frac{\varrho'_m - \varrho_m}{\varrho_m}\right)^2$ giebt, der um so geringfügiger ist, als noch der Faktor $\sin^2 B$ hinzutritt (insbesondere weil B absolut genommen die kleinere geographische Breite ist).

Multipliziert man aufserdem Zähler und Nenner mit $3600 : \varrho''$, sodafs ϱ'_m und ϱ_m in die Gradlängen G' und G übergehen, und

beachtet die Beziehung von e^2 zu $\mathfrak{a}$, sowie die Relation $\sin^2 B' - \sin^2 B = \sin(B' + B) \sin(B' - B)$, dann wird erhalten:

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{3} \frac{(G' - G) : \sqrt[3]{G'^2 G}}{\sin(B' + B) \sin(B' - B)} + \cdots. \tag{5}$$

Setzt man entsprechend der peruanischen und der revidierten älteren französischen Gradmessung*)

$$G' = 57012^t \text{ für } B' = 45^0$$
$$G = 56734 \quad „ \quad B = -1^0\,31',$$

so folgt

$$\log \frac{G'}{G} = 0{,}0021229 \qquad \log q = 0{,}0014153$$
$$q = 1{,}0032642 \qquad q - 1 = 0{,}0032642$$
$$q \sin^2 B' = 0{,}5016321 \qquad \sin^2 B = 0{,}0007005.$$

Die Formel (3) für e^2 giebt somit $e^2 = 0{,}0065163$; hieraus folgt streng:

$$\mathfrak{a} = 0{,}0032635 = 1 : 306{,}4.$$

Dagegen giebt die Formel (5) für $\mathfrak{a}$ näherungsweise

$$\mathfrak{a} = 1 : 306{,}7.$$

Nach *Todhunter, Figure of the Earth* Bd. 1 S. 70 löste *Maupertuis* die Aufgabe, die Axen des Erdellipsoids aus 2 Breitengradmessungen zu finden, in einer Abhandlung betitelt *Sur la Figure de la Terre* in den Memoiren der französischen Akademie der Wissenschaften von 1733 (publ. 1735). *Maupertuis* setzt $\mathfrak{a} = \frac{1}{3}(G' - G) : (G' \sin^2 B' - G \sin^2 B)$, während *E. Schmidt* 1829 in seinem *Lehrbuch der mathematischen Geographie* Bd. 1 S. 178 Formel (5) entwickelt, mit dem Unterschied, daſs die $\sqrt[3]{G'^2 G}$ durch G ersetzt ist. Nach *Gehlers physikalischem Wörterbuch* Art. Erde S. 861 gaben *Euler* und *Roumovsky* die oben *Maupertuis* zugeschriebene Formel.

Die Formel (5) zeigt, daſs bei denselben Werten von B und B' die Schärfe der Bestimmung von $\mathfrak{a}$ besonders von den Fehlern in $G' - G$ abhängt.

Vereinfachen und modificieren wir diese Formel für den Zweck weiterer Untersuchung nach dieser Hinsicht in

---

*) Nach *R. Wolff, Handbuch der Math., Physik, Geodäsie und Astronomie* Bd. 2 S. 130 und *E. Mayer, Gestalt und Gröſse der Erde* S. 37. Nimmt man mit *Zach* (vergl. *Mayer* a. a. O. S. 36) $G = 56732$, so folgt entsprechend der üblichen von uns S. 13 reproduzierten Angabe $\mathfrak{a} = 1 : 304$.

$$\mathfrak{a} = \left(\frac{G'}{G} - 1\right) : 3 \sin (B' + B) \sin (B' - B) + \cdots, \tag{6}$$

so sehen wir, dafs der Zähler rechter Hand für $B' = 90^0$ und $B = 0^0$ bei $\mathfrak{a} = \frac{1}{300}$ den Wert $\frac{1}{100}$, seinen Maximalwert, annimmt. In der Regel ist aber dieser Zähler weit kleiner und nun ist leicht zu erkennen, wie sehr die Abweichungen des Geoids vom Erdellipsoid die Berechnung von $\mathfrak{a}$ beeinflussen.

Für obiges Beispiel ist $\frac{G'}{G} - 1 = \frac{1}{200}$. Wenn nun für G das Geoid 1000^m über dem Ellipsoid liegt, so ist G um $\frac{1}{6370}$ seines Betrages zu verkleinern. Der Zähler in (6) wächst also um $\frac{1}{6370}$ oder $\frac{1}{32}$ seines Betrages, d. h. es wird $\mathfrak{a} = \frac{1}{297}$.

Noch beträchtlicher ist der Einflufs der Fehler in den geographischen Breiten. Ist die Amplitude für G um nur $5''$ durch Lotabweichungen oder Beobachtungsfehler irritiert, so giebt das $\frac{5}{3600}$ oder $\frac{1}{720}$ Fehler in G und also $\frac{1}{36}$ Fehler in $\mathfrak{a}$ in Bruchteilen seines Betrags. Hierdurch geht $\mathfrak{a}$ in rund $\frac{1}{420}$ oder $\frac{1}{240}$ (je nach dem Vorzeichen des Fehlers) über.

Dieses Beispiel beweist zur genüge, dafs aus 2 wenig ausgedehnten Breitengradmessungen selbst ein nur leidlich brauchbarer Wert von $\mathfrak{a}$ nicht zu erzielen ist, da Beeinflussungen der Lotrichtung schon durch Lokalanziehung recht wohl im Betrag mehrerer Sekunden vorkommen können.

§ 3. **Reduktion auf den Abstand der Parallelen.** Die Endpunkte eines zur Bestimmung von ϱ_m durch Triangulation gemessenen Bogens liegen im allgemeinen nicht genau auf demselben Meridian. Um die Krümmung im Meridian kennen zu lernen, mufs daher vorerst aus der Entfernung dieser Punkte der Meridianbogen abgeleitet werden, welcher ihren geographischen Breiten entspricht und der Abstand der Parallelen genannt wird.

Die Reduktionsformel fällt verschieden aus, je nachdem man aufser der geodätischen Linie zwischen den Punkten P_1 und P_2 als gegeben voraussetzt das Azimut in P_1 oder in P_2, oder den geographischen Längenunterschied. Mit Rücksicht darauf aber, dafs die Dimensionen des Rotationsellipsoids als zu bestimmende Gröfsen bei der Reduktion möglichst wenig Einflufs erhalten müssen, ist es vorteilhaft, mit *Bessel* anzunehmen, dafs *beide Azimute* gegeben und zwar direkt aus astronomischen Beobachtungen abgeleitet sind.

Die Formel, welche hierbei in Anwendung zu bringen ist, ist (16) auf S. 308, wobei s die gegebene geodätische Linie, dagegen M den Abstand der Parallelen bezeichnet. Der Einflufs von c^2 beträgt nun in Bruchteilen von M in der That nur

$$\frac{1}{12} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin^2\alpha \cos 2B;$$

er ist also für alle praktischen Fälle beinahe verschwindend und wir können daher im Folgenden wenigstens den Einfluſs eines Fehlers in e^2 auf die Reduktion vernachlässigen. Ebenso gestaltet sich das Verhalten der Formel in Bezug auf einen kleinen Fehler in a_0 günstig.

Weit ungünstiger ist dagegen eine Formel, welche nur eines der Azimute, etwa $\alpha_{1.2}$, als gegeben ansieht.

Die ersten Glieder einer solchen Formel lauten nämlich:

$$M = -s\left(\cos\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\frac{s}{a_0}\tan B_1 \sin^2\alpha_{1.2}\left(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2 B_1\right) + \cdots\right) \quad (1)$$

und man sieht, daſs der Einfluſs von a_0 und e^2 hier besonders deshalb ein gröſserer ist, weil s nur in der 1. Potenz als Faktor von e^2 auftritt.

Auſserdem ist offenbar die (vervollständigte) Formel (1) zur numerischen Rechnung mit Rücksicht auf die Anzahl der Reduktionsglieder auch weit unbequemer als die oben genannte Formel (16) S. 308.

Was die Genauigkeit dieser letzteren Formel bezüglich der in der Parenthese vernachlässigten Glieder (von der 6. Ordnung in Bezug auf e und $\frac{s}{a_0}$) anbetrifft, so läſst sich ohne weiteres soviel erkennen, daſs erst bei $s : a_0 = 0{,}1$ höchstens die 8. Decimalstelle von $\log M$ eine geringfügige Unsicherheit erhalten wird, eine Genauigkeit, die immer ausreicht.

Die Reduktion auf den Meridianbogen kann auch dadurch geschehen, daſs man ein Perpendikel von dem einen Endpunkt auf den Meridian des anderen fällt und die geographische Breite des Fuſspunkts, sowie die Länge des Meridianbogens bis zu demselben ermittelt. Diesen Weg schlug *Delambre* in den mehrfach erwähnten *Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien* ein (1799).

Verschiedene andere Formeln giebt das Werk *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 248 u. ff.

§ 4. **Mehrere Breitengradmessungen.** Die neueren Breitengradmessungen bestimmen die geographischen Breiten nicht nur für die äuſsersten Punkte meridionaler Dreieckskettten, sondern auch für Punkte mittlerer Lage. Es zerfällt somit schon jede einzelne Operation in mehrere Breitengradmessungen. Da nun die Gesamtzahl aller Messungen 2 weit übersteigt, so erfordert die Berechnung der Werte

für die Elemente der Meridianellipse aus allen diesen Messungen eine Ausgleichung.

Bezeichnen wir die astronomischen Punkte einer einzelnen Dreieckskette von Süden nach Norden geordnet, mit $P_0\, P_1 \ldots P_m$ und denken uns mit *Bessel*, indem auf allen diesen Stationen auch das Azimut als gemessen vorausgesetzt wird, für je 2 benachbarte Stationen den Abstand M der Parallelen nach der im vorigen Paragraphen erwähnten Formel (16) von S. 308 berechnet, so kann man durch successive Addition die Meridianbögen zwischen den Parallelen von P_0 und P_1, P_2, ... P_m bilden. Wir bezeichnen dieselben mit $M_{0.1}$, $M_{0.2}$, ... $M_{0.m}$.

Aus den M lassen sich aber nach den Formeln des § 10 S. 53 u. ff. die Differenzen der geographischen Breiten berechnen, wenn die Elemente der Meridianellipse als bekannt vorausgesetzt werden. Es ist z. B. die Formel zur Berechnung der Breitendifferenz von P_0 und P_i aus $M_{0.i}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{\text{in Sek.}}{B_i - B_0} = \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}} + 3\varrho'' n \cos 2\sigma_{0.i} \sin \varDelta\sigma_{0.i} \\
&\qquad\qquad + \frac{21}{8}\varrho'' n^2 \cos 4\sigma_{0.i} \sin 2\varDelta\sigma_{0.i} + \cdots, \\
&\text{worin} \\
&\qquad 2\sigma_{0.i} = 2\sigma_0 + \varDelta\sigma_{0.i} \\
&\qquad \underset{\text{in Sek.}}{2\sigma_0} = \underset{\text{in Sek.}}{2B_0} - 3\varrho'' n \sin 2B_0 + \cdots \\
&\text{sowie} \\
&\qquad \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}} = 3600\,\frac{M_{0.i}}{G} \\
&\text{ist und } G \text{ mit } a_0 \text{ durch die Gleichung zusammenhängt:} \\
&\qquad G = \frac{a_0}{\varrho^0}\,\frac{1 + \frac{1}{4}n^2 + \cdots}{1+n}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Glieder mit n^3, welche selbst für $M_{0.i} = 0{,}1\,a_0$ kaum $0{,}001''$ betragen, sind hierbei nicht berücksichtigt, da Beobachtungsfehler und Lotabweichungen in den Gleichungen weit gröfsere Widersprüche erzeugen, nämlich erfahrungsmäfsig im Mittel 2 bis 3 Sekunden.

Ist nun G'' ein Näherungswert von G (der mittleren Länge eines Grades) und n'' ein solcher für n (der anstatt e^2 eingeführten und nach ihrer Bedeutung S. 37 charakterisierten Hilfsgröfse), so wird man definitiv setzen können:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G''}(1 + x) \quad \text{und} \quad n = n''(1 + y). \tag{2}$$

Hierin bedeuten die x und y nur noch kleine Brüche.

Die Substitution dieser Werte in (1) führt zu nachstehender Formel:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{B_i - B_0} = \underset{\text{in Sek.}}{(B_i'' - B_0'')} + \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}''}(1 + 3n''\cos 2\sigma_i'')\,x \\ + \left(\begin{array}{c} 3\varrho''n''\cos 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' + \frac{21}{4}\varrho''n''^2\cos 4\sigma_{0.i}''\sin 2\varDelta\sigma_{0.i}'' \\ + 9\varrho''n''^2\sin 2B_0\sin 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' \end{array}\right) y + \cdots, \end{array}\right\} (3)$$

wobei das 1. Glied rechter Hand die mit den Näherungswerten berechnete Breitendifferenz bezeichnet. Es ist nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{B_i'' - B_0''} = \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}''} + 3\varrho''n''\cos 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' \\ \qquad + \frac{21}{8}\varrho''n''^2\cos 4\sigma_{0.i}''\sin 2\varDelta\sigma_{0.i}'' + \cdots \\ 2\sigma_{0.i}'' = 2\sigma_0'' + \varDelta\sigma_{0.i}'' \qquad 2\sigma_i'' = 2\sigma_0'' + 2\varDelta\sigma_{0.i}'' \\ \underset{\text{in Sek.}}{2\sigma_0''} = \underset{\text{in Sek.}}{2B_0} - 3\varrho''n''\sin 2B_0 + \cdots \\ \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}''} = 3600\,\frac{M_{0.i}}{G''}\,. \end{array}\right\} (4)$$

In Formel (3) sind die bei der Substitution der Ausdrücke (2) entstehenden in xy und y^2 multiplizierten Glieder weggelassen. Dieselben betragen für $x = 0{,}0001$ und $y = \frac{1}{30}$ höchstens einige Tausendstelsekunden. (Übrigens *mufs* man bei der späteren Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate die besprochenen Glieder weglassen; doch ist dies eben darum ganz unbedenklich, weil es ziemlich sicher ist, dafs z. B. die von *Bessel* für a_0 und n gefundenen Werte keiner Verbesserungen bedürfen, welche die angegebenen Beträge von x und y erheblich übersteigen).

Für B_0 und B_i hat man nun selbstverständlich in den Formeln (3) und (4) die Beobachtungswerte einzuführen, ebenso für $M_{0.i}$. Zeichnen wir die Beobachtungswerte aber durch einen oberen Index aus und nennen die von der Ausgleichung für B_0' und B_i' geforderten Verbesserungen λ_0 und λ_i, für $M_{0.i}'$ aber $\delta_{0.i}$, so folgt als *Fehlergleichung*, welche der Messung des Bogens $M_{0.i}$ entspricht:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{\lambda_i - \lambda_0} - 3600\,\frac{\delta_{0.i}}{G''}(1 + 3n''\cos 2\sigma_i'') + \cdots = \underset{\text{in Sek.}}{(B_i'' - B_0'')} - \underset{\text{in Sek.}}{(B_i' - B_0')} \\ + \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}''}(1 + 3n''\cos 2\sigma_i'')\,x + \left(\begin{array}{c} 3\varrho''n''\cos 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' + \frac{21}{4}\varrho''n''^2\cos 4\sigma_{0.i}''\sin 2\varDelta\sigma_{0.i}'' \\ + 9\varrho''n''^2\sin 2B_0\sin 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' \end{array}\right) y. \end{array}\right\} (5)$$

Die Beziehungen (4) bleiben bestehen, nur wird $2\sigma_0''$ mit B_0' anstatt B_0 berechnet. Das hieraus sich ergebende Fehlerglied ist, ebenso wie mehrere andere auch ganz unerhebliche, weggelassen.

Bei allen bisher ausgeführten Ausgleichungen hat man *nur die* λ, *nicht aber* die δ berücksichtigt. Die Berechtigung hierzu würde sehr zweifelhaft sein, wenn die λ nur Beobachtungsfehlern entsprächen; allein nach S. 535 (1) ist die Verbesserung der beobachteten Breite B_i' auf die ellipsoidische B_i gleich Beobachtungsfehler $+ \xi_i$, der meridionalen Komponente der Lotabweichung, und insofern diese wesentlich von lokalen Lotablenkungen abhängt, kann man sich bei den λ recht wohl auf mittlere Beträge von mehreren Sekunden gefafst machen.

Wesentlich kleiner ist nun in der That der Einflufs der δ. Erst ein δ im Betrag von 30^m würde in (5) linker Hand rund $1''$ erzeugen. Fehler in M können aber entstehen durch Beobachtungsfehler der Winkel und der Grundlinien, sowie durch Reduktionsfehler bei der Berechnung wegen mangelnder Kenntnis des Geoids und wegen mangelhafter Kenntnis von a_0 und e^2. Der Einflufs aller dieser Fehler ist schon erörtert, bis auf denjenigen für die Lotabweichung bei Reduktion der geodätischen Linien auf den Abstand der Parallelen. Nach Formel (16) S. 308 kommt besonders die Einwirkung der Lotabweichung auf α in betracht und man erhält mit Rücksicht auf deren Betrag (vergl. S. 535) für den Meridianbogen M_{ik} zwischen 2 benachbarten Punkten den Einflufs im wesentlichen gleich

$$- M_{ik} \tan \alpha \, \frac{\eta_0 \tan B_0 + \eta_i \tan B_i}{2\varrho''}. \qquad (6)$$

Für meridionale Dreiecksketten wird dieses stets geringfügig.

Der Einflufs aller Fehlerursachen überhaupt bleibt unter $1''$, solange man nicht über 1000^{km} lange Meridianbögen in Rechnung zieht. Am meisten zu fürchten scheint uns stets die Vernachlässigung der Reduktion wegen der Höhe N des Geoids über dem Ellipsoid. Sie giebt z. B. unter Annahme von $N = 200^m$ bei $M = 1000^{km}$ bereits $1''$.

Trotzdem kann man im Mittel jedenfalls annehmen, dafs die Lotablenkungen durch die λ einen weit gröfseren Einflufs äufsern, als alle in den δ vereinigten Beobachtungs- und Reduktionsfehler.

Vernachlässigt man nun in den Fehlergleichungen (5) die Glieder mit den δ, so hat das die Bedeutung, dafs man die M als genau richtig gemessene elliptische Meridianbögen ansieht, alle Fehler aber auf die Breiten wirft. Den λ liegt von da an also eine Ursache mehr zu grunde, welche offenbar in der einzelnen Gradmessungsoperation einen *systematischen* Charakter hat. Bei dem immerhin noch geringen numerischen Betrage ist dieses aber um so unbedenklicher, als die λ, insofern sie von Lotablenkungen herrühren, ja ohnedies auch systematisch verlaufende Bestandteile besitzen, die erfahrungsmäfsig jene Beträge weit überschreiten.

§ 5. **Fortsetzung: Ausgleichung.** Die Fehlergleichung (5) nimmt bei Vernachlässigung von δ die nachfolgende Form an:

$$\lambda_i - \lambda_0 = \{(B_i'' - B_0'') - (B_i' - B_0')\} + a_i x + b_i y, \tag{1}$$

wofür die Bedeutung der Koefficienten a_i und b_i durch Vergleichung mit (5) sofort erhellt.

Die geschlungene Parenthese hat die Bedeutung: *Berechnete* Breitendifferenz — *beobachtete* Breitendifferenz, kurz *Rechn.* — *Beob.*

In derselben Weise nun, wie der Bogen $M_{0.i}$ zur Herstellung der Fehlergleichung (1) dient, sind die übrigen Bögen zu verwerten. Zwischen $m + 1$ Parallelen giebt es m von einander unabhängige Bögen. Man wird dieselben am besten, wie bisher vorausgesetzt, systematisch von *einem* Anfangspunkt aus rechnen oder auch auf einander folgend nehmen. Das Resultat der Ausgleichung ist natürlich hiervon ganz unabhängig, ebenso von der Wahl des Ausgangspunktes. (Wenn etwas zweifelhaft ist, so ist dies nur die oben in § 4 gegebene Motivierung der Zulässigkeit der Abkürzung der Fehlergleichungen durch Vernachlässigung der δ.)

Wir behalten hier als Ausgangspunkt für alle Bögen M den südlichsten Punkt P_0 bei und erhalten dann für die einzelne Breitengradmessungsoperation mit m astronomischen Punkten ein Fehlergleichungssystem der Form

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_0 = -\,l_1 + a_1 x + b_1 y \\ \lambda_2 - \lambda_0 = -\,l_2 + a_2 x + b_2 y \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_m - \lambda_0 = -\,l_m + a_m x + b_m y. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Die l dienen als Abkürzung für die Differenzen *Beob.* — *Rechn.* Jede Gradmessung giebt ein solches System mit denselben Unbekannten x und y, während die λ selbstverständlich immer andere Werte haben, weil nach unserer Voraussetzung Gradmessungsoperationen, die im Zusammenhange stehen, hier als eine einzige aufgefafst werden.

Für die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist die Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ für alle verschiedenen Systeme (2) zusammengenommen zu einem Minimum zu machen, ohne dafs dabei verschiedene Gewichte einzuführen sind, was mit Rücksicht auf die wesentlichste Ursache der λ, nämlich die Lotabweichung, unmittelbar einleuchtet.

Die weitere Rechnung kann nach S. 143 u. unserer *Ausgleichungsrechnung* geschehen. Darnach wird man am bequemsten an Stelle von (2) das nachfolgende modificierte Fehlergleichungssystem setzen:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0 = -l'_0 + u + a'_0 x + b'_0 y \\ \lambda_1 = -l'_1 + u + a'_1 x + b'_1 y \\ \lambda_2 = -l'_2 + u + a'_2 x + b'_2 y \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_m = -l'_m + u + a'_m x + b'_m y, \end{array}\right\} \tag{3}$$

worin, wenn die eckige Klammer ein Summenzeichen bedeutet,

$$l'_0 = -\frac{[l]}{m+1} \qquad a'_0 = -\frac{[a]}{m+1} \qquad b'_0 = -\frac{[b]}{m+1} \tag{4}$$

gesetzt ist, und für irgend einen Index i die Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} l'_i = l_i + l'_0 \\ a'_i = a_i + a'_0 \\ b'_i = b_i + b'_0 . \end{array}\right\} \tag{5}$$

Die sämtlichen Systeme (3) werden nun in gewöhnlicher Weise zur Bildung von Normalgleichungen benutzt. Jedes System giebt eine Gleichung für die ihm eigentümliche Konstante u, die sich jedoch auf null reduziert, da die betreffende Normalgleichung lautet

$$(m + 1)\, u + [a']\, x + [b']\, y = [l']$$

und $[a']$, $[b']$, $[l']$ für jedes System einzeln null sind, wie (4) und (5) zeigen.

Aus den Systemen (3) folgen daher die Normalgleichungen für x und y nach dem Schema:

$$\left.\begin{array}{l} [a'a']\, x + [a'b']\, y = [a'l'] \\ [a'b']\, x + [b'b']\, y = [b'l'], \end{array}\right\} \tag{6}$$

worin die Summierung über alle Systeme (3) auszudehnen ist. Zu x und y ergeben sich G und n mittelst der Relationen (2) S. 592 und hierauf a_0 aus der letzten Gleichung (1) S. 592, sowie e^2 oder $\mathfrak{a}$ aus n mittelst der S. 37 angegebenen Beziehungen.

Gewichtsberechnungen für x und y lassen sich in gewöhnlicher Weise auf das System (6) stützen, mittelst dessen sich auch die Gewichte der aus x und y abgeleiteten Gröfsen nach gewöhnlichen Regeln der Methode der kleinsten Quadrate ergeben (*Ausgleichungsrechnung* S. 81 u. 137).

Mit Hilfe dieser Gewichte lassen sich ferner mittlere Fehler ableiten, nachdem der mittlere Fehler einer Gleichung der reduzierten Systeme (3) berechnet ist, wobei die Formel:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{[m] - 2}} \tag{7}$$

zur Anwendung gelangt, in welcher $[m]$ die Summe aller m, d. h. die Gesamtanzahl aller selbständigen Bögen bezeichnet, aus denen die Unbekannten x und y zu bestimmen sind. Allein da man es in den λ nicht mit den Wirkungen zufälliger Fehlerursachen ausschliefslich zu thun hat, so ist das Ergebnis von (7), wie auch bereits das der Gewichtsberechnung, jedenfalls von zweifelhaftem Wert und man mufs sich darauf gefafst machen, dafs die Unsicherheit der Ergebnisse für x und y immer weit gröfser sein wird, als die Rechnung anzeigt.

Es mufs zum Schlusse auch hervorgehoben werden, dafs man die durch die Ausgleichung geforderten λ nicht mit den Lotabweichungen ξ identificieren darf. Man darf sich in dieser Beziehung nicht durch die Ähnlichkeit der vorstehenden Aufgabe mit der des § 20 S. 562 täuschen lassen. Allerdings gehen für Meridianbögen die 1. Gleichungen (1) daselbst, indem darin die $a_i = 1$ und $b_i =$ null werden, in die Gestalt der Gleichungen (2) über, sodafs λ_i mit ξ_i identisch scheint. Aber es ist dort nur *ein* System von Gleichungen vorausgesetzt, entsprechend *einer* zusammenhängenden Operation. Jetzt handelt es sich indes um die Kombination isolierter Operationen. Die Ausgleichung setzt für jede die Summe

$$[\lambda] = 0 \tag{8}$$

und aufserdem für alle Systeme zusammen noch $[a'\lambda] = 0 = [b'\lambda]$, und man sieht sogleich, dafs die Lotabweichungen die Gleichung (8) für jede Operation einzeln ganz und gar nicht erfüllen werden.

Die λ sind also nicht die meridionalen Lotabweichungskomponenten ξ, ganz abgesehen von den oben erwähnten Einflüssen, die nebst den Lotabweichungen sich in den λ äufsern. (Vergl. S. 607.)

Dem Ausgleichungsverfahren kann man einen Vorwurf hieraus nicht machen, denn *kein* Rechnungsverfahren kann den mangelnden Zusammenhang der Operationen ersetzen (und diesen auch vorausgesetzt, ist es offenbar noch ein weiter Schritt von dem nunmehr bestimmbaren Referenzellipsoid bis zu einem dem ganzen Geoid entsprechenden Erdellipsoid).

Den ersten Versuch, aus mehreren Gradmessungen günstigste Werte der Erddimensionen abzuleiten, scheint *Boscovich* gemacht zu haben. *Boscovich* und *Maire*, zwei Jesuiten, mafsen (nach *Todhunter, Figure of the Earth* Bd. 1 S. 332) seit 1750 im Kirchenstaate und beschrieben 1755 ihre Arbeiten in dem Werke: *De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem;* die hiervon 1770 erschienene französische Übersetzung: *Voyage astronomique et géographique dans l'Etat de l'Eglise* giebt in einem Anhang auch einen Bericht über die Ausgleichungsmethode von *Boscovich*, wendet sie aber auf 9 Meridianbögen an, während *Boscovich* nur 5 behandelt.

Derselbe setzt die Summen der positiven und negativen λ einander gleich und macht beide möglichst klein. Die geometrische Entwicklung

ersetzt *Laplace* in einer Abhandlung in den Memoiren der französischen Akademie von 1789 (publ. 1793) durch eine interessante analytische. Von den drei Ausgleichungsverfahren, die er in der *Mécanique céleste* auf das Problem anwandte, ist diese Methode die dritte und zwar diejenige, deren Resultaten *Laplace* damals das meiste Zutrauen schenkt (tome II, livre III p. 135 etc.). In der That sind auch die beiden anderen Methoden weniger frei von Willkürlichkeiten.

Die erste derselben (ebenda S. 126 u. ff.) wandte *Laplace* bereits in einer Abhandlung in den genannten Memoiren von 1783 (publ. 1786) auf Breitengradmessungen [und Pendelbeobachtungen] an, später nochmals, aber vereinfacht, in den Memoiren von 1789. Es wird bei dieser Methode der gröfste Fehler möglichst klein gemacht.

Aus 7 Breitengradmessungen findet *Laplace* in der *Méc. cél.* p. 139 nach der 2. und 3. Methode als Abplattung $\frac{1}{277}$ und $\frac{1}{312}$. Dieser grofse Unterschied der Resultate erklärt sich durch die grofsen Abweichungen der einzelnen Messungen, infolge deren aus paarweisen Kombinationen derselben sehr verschiedene Dimensionen resultieren und also auch aus der etwas verschiedenen Kombination von 7 Messungen noch erheblich verschiedene Werte entstehen müssen.

In *Gehlers physikalischem Wörterbuch,* Artikel *Erde* S. 872 findet man die Abplattung nach 18 verschiedenen paarweisen Kombinationen aufgeführt, mit $\frac{1}{307{,}7}$ Abplattung im Mittel (1827).

Die Methode der kleinsten Quadrate wandte wohl zuerst 1819 *Walbeck* an und zwar auf 6 Gradmessungen, wobei er indes allein die Polhöhen der äufsersten Punkte berücksichtigte und auch nur die 1. Potenz der Abplattung in den Formeln beibehielt. Auf Veranlassung von *Gaufs* zog *Ed. Schmidt* auch die mittleren Polhöhen in mehreren von 1827 bis 1830 unternommenen Rechnungen bei.

Schmidt hat seine Methode 1829 im 1. Bd. seiner *Mathematischen Geographie* S. 190 u. ff. auseinandergesetzt. Wesentlich dieselbe Methode hat später *Bessel* angewandt, *Astronom. Nachr.* vom Jahre 1837 Bd. 14 No. 333 S. 333 (*Abhandlungen* Bd. 3 S. 41 u. ff.). Auch unsere Darstellung gleicht wesentlich dem von *Schmidt* gegebenen Vorbild. Die Unterschiede bestehen nur in der Ableitung der Fehlergleichungen (2) aus den Meridianbögen, worin wir auch *Bessel* nicht gefolgt sind, der von Formel (4) S. 49 ausgeht. *Schmidt* nahm die Formel einfacher und benutzte [illegible] anstatt n.

Bessel übte eine sehr scharfe Kritik des Beobachtungsmaterials und deckte namentlich einen Fehler in der französischen Gradmessung auf. Wie sich neuerdings herausgestellt hat, sind indes mehrere der von ihm benutzten Messungen in den Meridianbögen (wo man es am wenigsten hätte erwarten sollen) mit erheblichen Fehlern behaftet. Der dänische Bogen Lauenburg-Lysabbel ist 83^t zu klein, wie *Andraes* Revision gezeigt hat (*Dänische Gradmessung* Bd. 2 S. 489, auch *Vierteljahrsschr. der Astronom. Ges.* Bd. 12 S. 187) und der hannoverische Bogen, welcher auf der Braacker Basis beruht, wird um circa 4^t zu verlängern sein (nämlich $\frac{1}{30000}$ der Länge, nicht $\frac{1}{10000}$ wie infolge Druckfehlers am letztgenannten Orte angegeben ist.) Nach *Ph. Fischer*, *Gestalt der Erde,* sind in der 3. Ausgabe von *Puissant, Traité de Géodésie,* an einigen Bögen der französischen Gradmessung Änderungen bis zu $33{,}6^t$ angebracht (im Vergleiche zu *Bessels*

letzter Annahme von 1841?) und am südlichen Teile der ostindischen Gradmessung sind auch erhebliche Änderungen zu erwarten (*Vierteljahrsschr. der Astronom. Ges.* Bd. 8 S. 18).

§ 6. **Längengradmessungen.** Für die astronomischen Stationen einer ostwestlichen Dreieckskette denken wir uns aufser den geographischen Längendifferenzen noch geographische Breite und Azimut ermittelt, sodafs für zwei benachbarte Stationen P_i und P_k zur Aufstellung einer Gleichung für die Elemente der Meridianellipse unmittelbar Formel (13) S. 311 dienen kann. Zufolge Formel (3) S. 313 kann man aber in jener Formel das Produkt aus s sin α in die geschlungene Parenthese bezeichnen mit P_{ik}, dem Parallelbogen in der geographischen Breite $B = \frac{1}{2}(B_i + B_k)$, welcher zu dem geographischen Längenunterschied L_{ik} gehört. Sie nimmt alsdann die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{L_{ik}} &= \frac{\varrho''}{a_0} P_{ik} W \sec B \\ W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

P_{ik} ist mit Näherungswerten von a_0 und e^2 zu berechnen und (ebenso wie M nach der Reduktionsformel (16) S. 308) in nur sehr geringem Mafse von Fehlern dieser Werte abhängig. Im Folgenden sehen wir daher wie früher bei den M von diesen geringen Fehlern ab.

Der Einflufs der Lotabweichungen auf P_{ik} ist im wesentlichen durch den Ausdruck

$$P_{ik} \cot \alpha \frac{\eta_i \tan B_i + \eta_k \tan B_k}{2\varrho''} \tag{2}$$

gegeben (vergl. (6) S. 594). Für ostwestliche Ketten ist das stets geringfügig.

Was die Genauigkeit der Formel (13) S. 311 anbetrifft, reduziert auf P_{ik}, so mag bemerkt werden, dafs die in der geschlungenen Parenthese vernachlässigten Glieder 6. Ordnung erst für $s \sec B = 0{,}1\, a_0$ die 8. Decimale des Logarithmus ein wenig beeinflussen können.

Als Unbekannte treten nun in Gleichung (1), an welche das Weitere anzuknüpfen ist, $\frac{1}{a_0}$ und e^2 auf; um indessen dieselben Unbekannten wie bei Breitengradmessungen zu haben, was aus leicht ersichtlichen Gründen wünschenswert ist, führen wir wie dort G und n als solche ein. Es ist aber

$$\frac{1}{G} = \frac{\varrho''}{a_0} \frac{1 + n}{1 + \frac{1}{4} n^2 + \cdots} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{4n}{(1 + n)^2}. \tag{3}$$

Hiermit ergiebt sich durch eine einfache Rechnung:

$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{a_0} = \frac{1+\frac{1}{4}n^2+\cdots}{\varrho^0 G\,(1+n)^2}\sqrt{1+n^2+2n\cos 2B}$$

$$= \frac{1}{\varrho^0 G}\left\{\begin{matrix} 1-n\,(2-\cos 2B) \\ +\,n^2\left(\frac{15}{4}-2\cos 2B-\frac{1}{2}\cos^2 2B\right)+Gl_6 \end{matrix}\right\}.$$

Wenn wir dieses in (1) einsetzen, haben wir zu beachten, dafs $\varrho'' = 3600\,\varrho^0$ ist. Es wird dann erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{L_{ik}} &= p_{ik}\left\{\begin{matrix} 1-n\,(2-\cos 2B) \\ +\,n^2\left(\frac{15}{4}-2\cos 2B-\frac{1}{2}\cos^2 2B\right)+Gl_6 \end{matrix}\right\} \\ p_{ik} &= 3600\,\frac{P_{ik}}{G}\sec B. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wir wenden nun wieder die Näherungswerte G'' und n'' an, indem wir setzen:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G''}(1+x) \qquad n = n''(1+y). \quad (5)$$

Es ergiebt sich hiermit aus (4) die Gleichung:

$$L_{ik} = L''_{ik} + a_{ik}x + b_{ik}y, \quad (6)$$

wobei die rechter Hand auftretenden abkürzenden Symbole nach den folgenden Formeln zu berechnen sind:

$$\left.\begin{aligned} L''_{ik} &= p''_{ik}\left\{\begin{matrix} 1-n''(2-\cos 2B) \\ +\,n''^2\left(\frac{15}{4}-2\cos 2B-\frac{1}{2}\cos^2 2B\right)+Gl_6 \end{matrix}\right\} \\ p''_{ik} &= 3600\,\frac{P_{ik}}{G''}\sec B \qquad a_{ik} = L''_{ik} \\ b_{ik} &= p''_{ik}\left\{\begin{matrix} -\,n''(2-\cos 2B) \\ +\,2n''^2\left(\frac{15}{4}-2\cos 2B-\frac{1}{2}\cos^2 2B\right)+\cdots \end{matrix}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Wir führen endlich noch die astronomisch beobachteten Werte L'_{ik} und $B' = \frac{1}{2}(B'_i + B'_k)$ ein. Dieselben sind wegen Lotabweichung und Beobachtungsfehlern zu verbessern. Die Verbesserungen seien beziehungsweise $\lambda'_k - \lambda'_i$ und $\frac{1}{2}(\xi_i + \xi_k)$, letzteres der Einfachheit

halber ohne besondere Hervorhebung der Beobachtungsfehler. Für λ'_i ist nach S. 535 (1) der von Lotabweichung herrührende Bestandteil $-\eta_i \sec B'_i$ und entsprechend für λ'_k. Bezeichnen wir endlich noch die Verbesserung von P_{ik} mit δ'_{ik}, so geht (6) über in die der Messung der geographischen Längendifferenz L_{ik} entsprechende *Fehlergleichung*:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_k - \lambda'_i - \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2\varrho''} \tan B' + \frac{\delta'_{ik}}{P_{ik}}\right) L''_{ik} + \cdots \\ = L''_{ik} - L'_{ik} + a_{ik}x + b_{ik}y, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

wobei vorausgesetzt ist, dafs in (7) für B der oben angegebene Mittelwert der astronomisch beobachteten Breiten gesetzt wird. Es ist ferner von verschiedenen unerheblichen Fehlergliedern abgesehen.

Wenn wir nun linker Hand nur die Differenz $\lambda'_k - \lambda'_i$ beibehalten, d. h. alle Fehler auf die geographischen Längen werfen, so ist das insofern eine brauchbare Annäherung, als wenigstens für mäfsig grofse L_{ik} das die Parenthese enthaltende Glied linker Hand im Mittel kleiner als jene Differenz sein wird. (Hinsichtlich δ'_{ik} vergl. die auch jetzt passenden Bemerkungen S. 594.)

Wenden wir jetzt Formel (8) auf die Indices 0 bis m und zwar immer gemäfs je 2 benachbarten Punkten an, so ergiebt sich das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_1 - \lambda'_0 &= L''_{0.1} - L'_{0.1} + a_{0.1} \cdot x + b_{0.1} \cdot y \\ \lambda'_2 - \lambda'_1 &= L''_{1.2} - L'_{1.2} + a_{1.2} \cdot x + b_{1.2} \cdot y \\ \lambda'_3 - \lambda'_2 &= L''_{2.3} - L'_{2.3} + a_{2.3} \cdot x + b_{2.3} \cdot y \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda'_m - \lambda'_{m-1} &= L''_{m-1.m} - L'_{m-1.m} + a_{m-1.m}x + b_{m-1.m}y. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Indem man hierin successive addiert die 1. und 2. Gleichung, dazu die 3., dann die 4., u. s. f., so wird ein bequemeres System erhalten, welches linker Hand dem System (2) S. 595 gleicht und symbolisch auch rechter Hand wie jenes geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_1 - \lambda'_0 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y \\ \lambda'_2 - \lambda'_0 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda'_m - \lambda'_0 &= -l_m + a_m x + b_m y. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Hieran schliefst sich dieselbe Umformung wie S. 596 und es können die Gleichungen (3) bis (7) hierher übertragen werden, mit der Modifikation jedoch, dafs noch auf die *Gewichte* Rücksicht zu nehmen ist.

Geben wir den Fehlergleichungen der Breitengradmessungen S. 596 (3) das Gewicht 1, so wird mit Rücksicht auf den dominierenden Einflufs der Lotabweichungen über den der Messungsfehler (abgesehen von älteren Längengradmessungen) und weil in λ'_i seitens der Lotabweichungen der Betrag $\eta_i \sec B_i$ eingeht, das Gewicht einer der Fehlergleichungen (3) S. 596, wenn diese sich auf eine Längengradmessung beziehen, gleich $\cos^2 B_i$ zu setzen sein, worin B_i die geographische Breite desjenigen Punktes ist, auf den sich der Index der Verbesserung λ'_i linker Hand in der Fehlergleichung bezieht.

Diese modificierten Fehlergleichungen mit ihren Gewichten lauten sonach in den Bezeichnungen von S. 596:

$$\left.\begin{array}{lll}
\lambda'_0 = -l'_0 + u + a'_0 x + b'_0 y & \text{Gew.} & \cos^2 B_0 \\
\lambda'_1 = -l'_1 + u + a'_1 x + b'_1 y & \text{,,} & \cos^2 B_1 \\
\lambda'_2 = -l'_2 + u + a'_2 x + b'_2 y & \text{,,} & \cos^2 B_2 \\
\dots\dots\dots & & \\
\lambda'_m = -l'_m + u + a'_m x + b'_m y & \text{,,} & \cos^2 B_m,
\end{array}\right\} \quad (11)$$

und die Gröfsen rechter Hand bestimmen sich (*Ausgleichungsrechnung* S. 145) nach den Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll}
l'_0 = -\frac{[l \cos^2 B]}{[\cos^2 B]} & l'_i = l_i + l'_0 \\
a'_0 = -\frac{[a \cos^2 B]}{[\cos^2 B]} & a'_i = a_i + a'_0 \\
b'_0 = -\frac{[b \cos^2 B]}{[\cos^2 B]} & b'_i = b_i + b'_0.
\end{array}\right\} \quad (12)$$

Die Bildung der Normalgleichung für u zeigt nun, dafs diese Gröfse null wird; dagegen ergeben sich für x und y die Normalgleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
[a'a' \cos^2 B]\, x + [a'b' \cos^2 B]\, y = [a'l' \cos^2 B] \\
[a'b' \cos^2 B]\, x + [b'b' \cos^2 B]\, y = [b'l' \cos^2 B],
\end{array}\right\} \quad (13)$$

welche durch Addition mit den entsprechenden Normalgleichungen anderer Längengradmessungsoperationen und eventuell denen der Breitengradmessungen zu vereinigen sind.

Im übrigen ist der Schlufs des § 5 S. 596 u. 597 zu vergleichen.

§ 7. **Azimutmessungen.** Bezeichnen wir in Formel (5) S. 312 das Produkt von $s \sin \alpha$ in die geschlungene Parenthese mit $\mathfrak{P}_{ik}$, wenn es sich um zwei Punkte P_i und P_k handelt, so giebt die Differenz der gemessenen Azimute die nachstehende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek}}{\Delta\alpha} &= -\frac{\varrho''}{a_0}\mathfrak{P}_{ik}\,W\tan B \\ \Delta\alpha &= \alpha_{ki} - \alpha_{ik} - 180^0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die Gleichung (1) zeigt nun eine grofse Ähnlichkeit mit der einem beobachteten geographischen Längenunterschied entsprechenden Gleichung (1) S. 599; denn abgesehen von den kleinen Verschiedenheiten der in P_{ik} und $\mathfrak{P}_{ik}$ auftretenden geschlungenen Parenthesen sind diese Ausdrücke und demnach die rechten Seiten der erwähnten Gleichungen identisch bis auf die Faktoren $-\tan B$ bezw. $\sec B$. Aus diesem Grunde wird die Gleichung für x und y, welche sich aus der Differenz der Azimute ableiten läfst, nicht wesentlich von derjenigen verschieden, welche aus der geographischen Längendifferenz resultiert, da eben die Koefficienten von x und y in beiden Gleichungen in demselben Verhältnis stehen.

Die weitere Behandlung der Formeln ist wie bei den Längenbestimmungen, nur ist schliefslich, abgesehen von Beobachtungsfehlern, das Gewicht der Fehlergleichungen (11) S. 602 nicht $\cos^2 B$, sondern $\cot^2 B$, da auf das einzelne Azimut die Lotabweichung mit $\eta \tan B$ einwirkt.

Man sieht sogleich, dafs diese Gewichtsbestimmung für die Nähe des Äquators jedenfalls unzulässig wird, weil hier $\eta \tan B$ gegen die Beobachtungsfehler ganz zurücktritt. Dann ist Gleichung (1) überhaupt nur mehr ein Mafs für die Beobachtungsfehler, aber wegen des kleinen Faktors $\tan B$ kein Mittel zur Bestimmung der Elemente der Meridianellipse.

Die Beobachtungsfehler kommen übrigens bei Azimutgleichungen auch aus anderem Grunde weit mehr in betracht als bei den Gleichungen für geographische Längen, wenn wir hier, wie immer bisher, die Anwendung des elektromagnetischen Telegraphen voraussetzen. Denn die Beobachtungsfehler werden im letztern Falle für die Längendifferenz $L_{0.m}$ nicht wesentlich gröfser als für irgend ein $L_{i.k}$, sobald nur (wie es immer der Fall sein wird) die entferntesten Punkte P_0 und P_m direkt mit einander verbunden sind.

Anders bei den Azimutgleichungen. Hier ist es selbstverständlich, dafs in den letzten Gleichungen des Systems (10) S. 601 die Beobachtungsfehler eine weit gröfsere Bedeutung haben, als in den ersten. Das angegebene Ausgleichungsverfahren kann daher nur dann als zulässig angesehen werden, wenn die Ausdehnung der ganzen Operation nicht so beträchtlich ist, dafs die Einflüsse der Beobachtungsfehler denjenigen der Lotabweichungen im Mittel gleich zu achten sind — oder wenn eine Kontrolle durch Beobachtung geographischer Längen geschaffen wird.

In der That, wenn sowohl die geographische Längendifferenz als die Azimutdifferenz vorliegt, ergiebt sich wie bekannt eine Kontrolle hinsichtlich des Einflusses der Beobachtungsfehler. Es sollten dann nach obigen Bemerkungen offenbar die mit sin B multiplizierten Absolutglieder der Fehlergleichungen aus den Längendifferenzen übereinstimmen mit denen aus den Azimutmessungen. Auf die Ausnutzung dieser Kontrollen gehen wir aber nicht weiter ein, da wir es beim Vorhandensein solcher für angezeigt halten, für die einzelne Operation die Formeln des § 15 S. 546 u. ff. auf den offenen Zug der geodätischen Linien P_0P_1, $P_1P_2, \ldots P_{m-1.m}$ anzuwenden, unter Beifügung der Glieder für δa_0 und δc^2 nach § 20 S. 562, eventuell mit Umwandlung für die oben benutzten Unbekannten x und y (G und n).

Andrerseits wird man die aus den Azimutmessungen folgenden Gleichungen bei Längengradmessungen mit sehr weit abstehenden benachbarten astronomischen Stationen gegen die aus den geographischen Längendifferenzen folgenden ohne weiteres der geringen Sicherheit halber ganz vernachlässigen können.

Es mag noch erwähnt werden, dafs in den Fehlergleichungen, welche Azimutmessungen entsprechen, sich die Lotabweichungen ξ weit ungünstiger äufsern, als bei denjenigen der Längendifferenzen; vergl. (8) S. 601. Das entsprechende Glied linker Hand wird nämlich gleich

$$+\frac{\xi_i + \xi_k}{\varrho'' \sin 2B'}\,\Delta\alpha''. \tag{2}$$

Reduziert man es auf gleiches Gewicht mit demjenigen in (8) S. 601, so zeigt es sich $\csc^2 B'$ mal so grofs als dieses. Der Einflufs des Gliedes (2) ist überhaupt nur für nicht kleine geographische Breiten unerheblich; in der Nähe des Äquators kann er stark anwachsen. Hier sind aber, wie oben erwähnt, Azimutgleichungen überhaupt zur Bestimmung der Elemente der Meridianellipse wertlos.

Die Bedeutung der Azimutmessungen in nicht zu kleinen Breiten erkannte bereits *Euler* sowie später *Laplace* (nach *Soldner*, *Bayerische Landesvermessung* S. 533). Nur *Legendre* leugnet sie infolge eines Übersehens auf S. 15 der mehrfach erwähnten Schrift *Delambre*, *Méthodes analytiques etc.*

§ 8. **Gradmessung schief zum Meridian.** Eine mäfsig ausgedehnte Gradmessung nahe im Meridian oder nahe im Parallel giebt wesentlich nur *eine* Gleichung für die unbekannten Elemente der Meridianellipse. Um deren wenigstens *zwei* zu erhalten, sind von derartigen Operationen 2 Breitengradmessungen oder 2 Längengradmessungen in (dem absoluten Werte nach) wesentlich verschiedenen

geographischen Breiten erforderlich. Mit Messungen in gleichen geographischen Breiten kommt man nur dann zu einer Lösung, wenn die eine der Operationen Breitengradmessung, die andere derselben Längengradmessung ist, und durch eine einzige Triangulation läſst sich daher beides zugleich nur bei Werten des Azimuts inmitten zwischen null und 90⁰ erreichen.

Denken wir uns also an beiden Enden einer geodätischen Linie $P_1 P_2$ die geographischen Breiten und Azimute gemessen, so kann man zunächst den Abstand M der Parallelen und die dem Parallelbogen in der mittleren Breite $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ sehr nahe kommende Hilfsgröſse $\mathfrak{P}$ berechnen [vergl. S. 308 (16) und S. 312 (5) bezw. S. 603 (1)]. Es folgt dann weiter [vergl. S. 588 (1) und (2)]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_0(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}^3} &= \varrho_m = \varrho''\frac{M}{\varDelta B} + \cdots \\ \frac{a_0}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} &= \varrho_n = -\varrho''\frac{\mathfrak{P}}{\varDelta \alpha}\tan B, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

worin ϱ_m und ϱ_n die Krümmungsradien im Meridian und Perpendikel für die mittlere Breite B, $\varDelta B$ und $\varDelta \alpha$ aber die Differenzen der geographischen Breiten und Azimute der Punkte P_1 und P_2 nach Maſsgabe bekannter Formeln bezeichnen.

Die (1) geben nun leicht successive unter Einführung einer Abkürzung q':

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m} = \frac{1-e^2\sin^2 B}{1-e^2} = q' \tag{2}$$

$$e^2 = \frac{q'-1}{q'-\sin^2 B}, \tag{3}$$

und für die Abplattung:

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}(q'-1)\sec^2 B + \cdots. \tag{4}$$

Ist erst e^2 bekannt, so geben die (1) auch noch a_0 ohne Schwierigkeit. Die Bestimmung wird aber überhaupt ganz unzuverlässig für die Nähe des Äquators, weil hier $\varDelta\alpha$ der null zustrebt und die Beobachtungsfehler also mehr und mehr dominierenden Einfluſs auf ϱ_n erlangen, wie die Differentiation von $\log \varrho_n$ sofort zeigt.

In dieser und auch in anderer Beziehung ist die Bestimmung von ϱ_n aus der geographischen Längendifferenz vorteilhafter. Wir haben damit [S. 599 (1)]:

$$\varrho_n = \varrho''\frac{P}{L}\sec B, \tag{5}$$

wo jetzt P den Parallelbogen in der mittleren Breite B bezeichnet.

Da nun P und $\mathfrak{P}$ für dieselbe geodätische Linie nahezu gleich sind, so zeigt die Vergleichung von (5) mit der 2. Gleichung (1), dafs L absolut genommen $> \varDelta\alpha$ ist. Gleich grofse Beobachtungsfehler sind daher bei der Bestimmung von ϱ_n aus (5) immer von geringerem Einflusse als bei derjenigen aus der 2. Gleichung (1), doch nimmt der Unterschied mit wachsender Breite ab.

Dagegen ist der Einflufs der Lotabweichung für beide Bestimmungen immer gleich. Er beträgt in $\varDelta\alpha$ sehr nahe $(\eta_2 - \eta_1)\tan B$ und in L sehr nahe $(\eta_1 - \eta_2)\sec B$, für ϱ_n in Bruchteilen seines Wertes daher in beiden Fällen sehr nahe

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\varrho''} \frac{a_0}{s \sin\alpha}, \tag{6}$$

wenn für $\mathfrak{P}$ und P kurz $s \sin\alpha$ gesetzt wird.

Für ϱ_m hat man ganz ebenso als Einflufs der Lotabweichung:

$$\frac{\xi_2 - \xi_1}{\varrho''} \frac{a_0}{s \cos\alpha}. \tag{7}$$

Am geringsten wird nun der Einflufs dieser Gröfsen auf $\mathfrak{a}$ für den Äquator, weil hier $q' - 1$ am gröfsten ist, nämlich rund $\frac{1}{150}$. Giebt man der Linie s dabei behufs einer Vergleichung mit S. 589 dieselbe Ausdehnung wie für 2 Breitengradmessungen zusammen, so wird unter sonst gleichen Umständen $\mathfrak{a}$ nur halb so stark von Lotabweichungen wie im Beispiel daselbst beeinflufst.

Dagegen ist für höhere Breiten wegen beschleunigter Abnahme von $q' - 1$ die Bestimmung von $\mathfrak{a}$ nach der Methode dieses Paragraphen eine wachsend ungünstigere. Es findet sich, dafs überhaupt hinsichtlich der Einflüsse (6) und (7) zwei Breitengradmessungen, deren mittlere Breiten absolut genommen um rund 45° differieren, vorteilhafter sind, als eine Gradmessung in 45° Azimut, welche ebenso ausgedehnt ist, wie jene zusammen, sobald für dieselbe die mittlere Breite absolut genommen $> 45°$ wird.

Bessel legte seinerzeit die ostpreufsische Gradmessung schief zur meridionalen Richtung, um durch sie allein schon 2 Gleichungen zu erhalten, die zur Bestimmung der Meridianellipse genügt haben würden, wenn eben Lotabweichungen und Beobachtungsfehler nicht existierten. Um letztere für $\varDelta\alpha$ möglichst herabzudrücken, suchte er thunlichst lange Seiten zur Azimutübertragung zu gewinnen.

Die Bedeutung derartiger Gradmessungen erkannte übrigens, wie auch *Bessel* erwähnt (*Abhandlungen* Bd. 3 S. 63) bereits im vorigen Jahrhundert *Tobias Mayer* der Ältere, 1723—1762), dessen hinterlassenes, sehr interessantes Manuskript über diesen Gegenstand Bd. 13 der *Astronom. Nachr.* Nr. 310 S. 354 (1836) bringt. *Mayer* denkt sich an den Endpunkten einer geodätischen Linie Breite und Azimut gemessen und zeigt, dafs man das Verhältnis $a_0 : b_0$ ohne Kenntnis der linearen Länge der Linie ermitteln kann.

§ 9. **Berechnung des Erdellipsoids aus Gradmessungen im allgemeinen.** Die in den §§ 4 bis 7 angewandte Methode der Aufstellung der Fehlergleichungen, welche den astronomisch geodätischen Messungen entsprechen, ist nicht streng, da immer nur gewisse Einflüsse der Lotabweichungen als wesentlich vorausgesetzt werden. Die Vernachlässigung ist allerdings um so geringer, je mehr die Dreiecksketten den Richtungen der Meridiane oder Parallelen folgen. Doch fand sich schon für letzeren Fall der Hinweis auf eine strengere Ausgleichung nötig (vergl. S. 604).

Sobald nun geodätische Linien in beliebigen Azimuten vorkommen, ist eine strengere Behandlung besonders durch den Einflufs der Lotabweichungen auf M und P bezw. $\mathfrak{P}$ gefordert [S. 594 (6) und 599 (2)].

Wollte man eine strengere Rechnung nach der Methode jener Paragraphen ausführen, so müfste man alle die einzelnen Glieder beibehalten, welche die Lotabweichungen successive ergeben und auch noch die Fehlerglieder aufführen, die von Beobachtungsfehlern in Länge, Breite, Azimut und s abhängen. Indessen ist die entstehende Form der Gleichungen für eine strenge Rechnung unbequem.

Bei strenger Rechnung verfährt man bequemer nach den Vorschriften des vorigen Kapitels (in der Regel kommt § 15 S. 546 u. ff. in frage, jedenfalls aufserdem § 20 S. 562). Man sucht für jede zusammenhängende Operation wie dort die Normalgleichungen für ξ_1, η_1, δa_0 und δe^2 auf. Die Lotabweichungen ξ_1 und η_1 des willkürlichen und für jede isolierte Operation besonderen Anfangspunktes werden dann mittelst ihrer Normalgleichungen eliminiert und endlich werden alle Normalgleichungen für δa_0 sowie alle für δe^2, welche die verschiedenen Systeme ergeben, addiert. Die beiden so entstehenden Gleichungen für δa_0 und δe^2 sind die Endnormalgleichungen, welche nunmehr nach den genannten beiden Unbekannten aufgelöst werden müssen.

Der Sinn dieser Rechnung ist, dafs die Dimensionen der Referenzellipsoide der einzelnen Ausgleichungssysteme bei zur Erdaxe parallelen Rotationsaxen identisch genommen werden, während es unentschieden bleibt, inwieweit die Drehaxen und Mittelpunkte der einzelnen Ellipsoide unter sich und mit der Erdaxe und dem Erdschwerpunkt zusammenfallen.

Erst in dem allerdings nur idealen Falle, dafs alle Gradmessungen in eine zusammenhängende Operation verschmolzen worden wären, würden alle Referenzellipsoide in ein einziges übergehen, welches nun aber immer noch auf keine Weise durch die Gradmessungen allein in Bezug zum Erdschwerpunkt gebracht werden könnte.

In diesem Falle liefsen sich aber bei angemessen dichter Lage

der astronomischen Stationen die Erhebungen des Geoids über dem Ellipsoid berücksichtigen, indem man z. B. bei Anwendung der Vorschriften des § 15 S. 546 den δs in den Gleichungen (1) Glieder von der Form $- s \frac{N'}{a_0}$ beifügte, wobei N' die Erhebung für die betreffende Grundlinie bezeichnet.*) Den bisherigen Gleichungen würden nun noch Gleichungen zuzufügen sein, welche die Differenz der N' benachbarter Grundlinien als lineare Funktionen der Lotabweichungen der astronomischen Zwischenpunkte darstellen. Solcher Gleichungen würde man in überschüssiger Zahl (vielleicht für die N' aller benachbarten astronomischen Stationen) aufstellen und gleichzeitig mit den anderen Gleichungen (den Systemen (1) S. 548) zur Ausgleichung verwenden.

Für das günstigste Referenzellipsoid würde übrigens auf diese Art kaum ein erheblich besseres Resultat erzielt werden, da die Fehler, welche durch mangelnde Reduktion der Linien s wegen der N' entstehen, im Endresultat sich voraussichtlich nicht anhäufen, sondern im wesentlichen kompensieren werden.

§ 10. **Unzulänglichkeit der Gradmessungen für die genaue Bestimmung des Erdellipsoids.** Bereits im vorigen Paragraphen ist angedeutet worden, dafs sich das Resultat der Ausgleichung der Fehlergleichungen mehrerer isolierter Gradmessungssysteme auf ebenso viele Referenzellipsoide bezieht, die alle gleiche Dimensionen und zur Erdaxe parallele Rotationsaxen haben, die aber im allgemeinen nicht unter sich zusammenfallen, sondern einzeln mit der Geoidfläche im Bezirke des betreffenden Gradmessungssystems annähernd koincidieren. Irgend ein Mittel, um dasjenige Ellipsoid abzuleiten, welches sich den Messungen am besten anschmiegt und dabei mit seiner kleinen Axe in die Erdaxe und mit seinem Schwerpunkt in den Erdschwerpunkt fällt, hat man aus Gradmessungen allein nicht.

Dieselben bieten ein solches auch noch nicht in dem idealen Falle, dafs sich die *ganze* Erde mit einem Dreiecksnetze umspannen liefse, dessen sämtliche Punkte astronomische Stationen wären, da eben ein *geometrischer* Zusammenhang zwischen Schwerpunktslage und Lotablenkungen nicht besteht, sondern nur ein *dynamischer*. Ohne hier der Sache von diesem Gesichtspunkte aus näher zu treten, läfst sich doch soviel erkennen, dafs man immerhin diesem Erdellipsoid, namentlich bezüglich der Dimensionen, durch zahlreiche Gradmessungen näher kommen wird, als durch wenige. Der letzte Fall ist allerdings gegenwärtig der thatsächliche und wird es bis zu gewissem Grade

*) Es ist N mit dem oberen Index versehen, da nicht in Strenge das Geoid in frage kommt, sondern das S. 565 definitive Sphäroid.

immer bleiben, da nur $\frac{3}{11}$ der Erdoberfläche mit Festland bedeckt und Gradmessungen zugänglich sind.

Es ist nun von Interesse, eine Vorstellung von der Genauigkeit der Ergebnisse für die Elemente der Meridianellipse, wie der gegenwärtige Stand der Gradmessungen sie liefert, zu gewinnen zu suchen. Dazu gehen wir im folgenden Paragraphen über; wir müssen dabei freilich auch wieder die Schätzungen der absoluten Lotablenkungen und Höhen N des Geoids über dem Erdellipsoid anticipieren, wie Betrachtungen der Mechanik sie liefern.

§ 11. **Genauigkeitsgrad.** Die Dimensionen des Ellipsoids sind wiederholt berechnet worden mit Zunahme der Anzahl und Ausdehnung insbesondere der Breitengradmessungen. Dabei hat man das von *Ed. Schmidt* und *Bessel* angegebene und oben mitgeteilte Verfahren, namentlich also auch die Methode der kleinsten Quadrate angewandt. *Ph. Fischer* hat (vergl. seine *Untersuchungen über die Gestalt der Erde*) hierin einen grofsen Mangel zu erblicken geglaubt und überhaupt die formelle Behandlung angegriffen. Seine Ausführungen sind indes in dieser Hinsicht nicht stichhaltig.*) Ein Vorwurf kann nur insoweit erhoben werden, als man Gewichte und mittlere Fehler der Endresultate berechnet hat, als wären die übrigbleibenden Fehler die Folge zufälliger Beobachtungsfehler und zufälliger Abweichungen des Lotes, infolge dessen aber sie für weit genauer hielt, als sie sind (S. 597 o.). Denn da die absoluten Lotablenkungen innerhalb einer isolierten Operation oft einen wesentlich systematischen Charakter haben, so kann es sich treffen (*Ausgleichungsrechnung* S. 257), dafs die übrigbleibenden Fehler trotz bedeutender Gröfse der Lotablenkungen klein sind und doch der systematische Bestandteil der letzteren einen sehr beträchtlichen Einflufs auf die Resultate ausübt.

Dieser Fall tritt in der That für die ostindische Gradmessung ein, für welche *Pratt* grofse Lotablenkungen auf Grund der äufseren Terraingestalt wahrscheinlich machte. Da nun bei allen Rechnungen diese Messung die einzige von grofser Ausdehnung unter kleinen Breiten war und also ohne erhebliche Kontrolle blieb, weil die

---

*) Der begründete Teil der Vorwürfe *Ph. Fischers* in Bezug auf die Auffassung des Problems dürfte überhaupt weniger die Rechner treffen, als diejenigen, welche deren Arbeiten einfach acceptierten, ohne sie nach ihrer ganzen Entstehung zu kennen. Was die Rechner anlangt, so sei u. a. erwähnt, dafs *Paucker*, dessen ausführliche Rechnungen S. 17 besprochen sind, nicht nur über den Charakter der übrigbleibenden Fehler der Ausgleichung, insbesondere ihr Verhältnis zu absoluten Lotablenkungen, völlig im Klaren war, sondern auch den ungünstigen Einflufs systematischer Lotablenkungen auf die Güte der Rechnungsergebnisse richtig erkannte.

europäischen Messungen, mit denen sie sich kombinierte, hauptsächlich nur unter sich kontrollierend wirken, so mufste ein gewisser systematischer Teil der Lotablenkungen unerkannt bleiben. Es ist dieses, wie man sofort bemerkt, aufser einem absolut konstanten unschädlichen Teil, ein Teil, der mit der Meridianbogenlänge wächst und gerade so wirkt, wie ein konstanter Fehler der Grundlinien bezw. der Mafseinheit — oder wie ein Fehler in der Reduktion der Grundlinien wegen der Höhe N des Geoids über dem Ellipsoid.

Unter den verschiedenen interessanten Rechnungen, welche das wiederholt erwähnte Hauptwerk der englischen Vermessung *Ordnance Survey*, *Principal Triangulation* bietet, findet sich aber S. 775 auch eine Angabe der Einflüsse der Änderungen der Mafseinheiten auf die Halbaxen $a_0 b_0$ der Meridianellipse und die Hilfsgröfse $\frac{1}{2}\frac{a_0+b_0}{a_0-b_0}$, d. i. $\frac{1}{2n}$. Wir benutzen hier nur die Angabe in Bezug auf letztere Gröfse.

Es wird aus 9 isolierten Breitengradmessungsoperationen abgeleitet:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2n} = 293{,}76 + 0{,}1139\,\Theta'_0 + 0{,}0144\,\Theta'_1 - 0{,}3589\,\Theta'_2 + 0{,}2222\,\Theta'_3 \\ + 0{,}0018\,\Theta'_4 - 0{,}0004\,\Theta'_5 + 0{,}0076\,\Theta'_6 - 0{,}0004\,\Theta'_7 - 0{,}0003\,\Theta'_8.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Hierbei sind die linearen Längen, welche den Ergebnissen der Gradmessungen entsprechen, noch mit $1 + \frac{\Theta_i}{100000}$ multipliziert, wenn der Index i nach folgender Übersicht den einzelnen Operationen angehört:

Index								
Index 0	Englische	Gradmessung	von	49,9°	bis	60,8°	nördl.	Br.
„ 1	Französische	„	„	38,7	„	51,0	„	„
„ 2	Russische	„	„	45,3	„	70,7	„	„
„ 3	Indische	„	„	8,1	„	29,5	„	„
„ 4	Ältere indische	„	„	11,7	„	13,3	„	„
„ 5	Ostpreufsische	„	„	54,2	„	55,7	„	„
„ 6	Peruanische	„	„	0,0	„	3,1	südl.	„
„ 7	Hannoverische	„	„	51,5	„	53,5	nördl.	„
„ 8	Dänische	„	„	53,4	„	54,9	„	„

Die Formel giebt nun ein sehr gutes Mittel, den Genauigkeitsgrad der Bestimmung von $\frac{1}{2n} = 293{,}76$ zu schätzen.

Sie zeigt u. a., dafs $\Theta'_3 = -30$ in $\frac{1}{2n}$ bereits 7 Einheiten

Änderung hervorbringen würden. Ein solcher Betrag von Θ_3' kann allerdings kaum noch als Einfluſs der Höhe N des Geoids über dem Ellipsoid vermutet werden, denn er erfordert einen Wert N im Betrage von $a_0 \cdot \frac{3}{10000}$, d. i. ca. $1{,}9^{km}$. Zu seiner Erklärung genügt aber auch die sehr plausible Differenz der Lotablenkungen von 24″ für die Endpunkte des $21{,}4^0$ langen groſsen indischen Bogens, falls sich diese 24″ gleichmäſsig über denselben verteilen und eine Verflachung bedeuten.*) Einer solchen entspricht dann eine Verkürzung des Bogens um $\frac{24}{21{,}4 \, . \, 60 \, . \, 60}$ seines Betrages, also ein $\Theta_3' = -31$.

Die begründeten Vorwürfe *Ph. Fischers* werden einigermaſsen (so gut es die Verhältnisse zulassen) beseitigt sein, wenn die Gradmessungen eine gleichmäſsigere Ausdehnung und Verteilung erlangt haben werden als gegenwärtig, und wenn zur Bestimmung des Erdellipsoids, solange als die Gradmessungen noch nicht zahlreich sind, diejenigen ausgeschlossen werden, für welche starke Unregelmäſsigkeiten nach der äuſseren Figur der Erde zu erwarten sind. In Bezug auf die Würdigung der indischen Gradmessung aber darf man nie vergessen, daſs sie zunächst unternommen wurde, um die Figur des Geoids in Indien zu studieren (vergl. unser Referat in der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* Bd. 8, S. 14).

Wir gedenken hier auch des Versuches, den General *v. Schubert* und andere durchgeführt haben, die geographischen Breiten der Gradmessungsstationen von den lokalen Unregelmäſsigkeiten der Lotrichtung durch Berechnung der Massenanziehung zu befreien (*Astronom. Nachr.*, Bd. 52, No. 1245—47; vergl. auch S. 546). Mit Rücksicht auf unterirdische Massenunregelmäſsigkeiten ist es aber erfahrungsmäſsig weit besser, lokale Anomalieen mittelst dicht benachbarter astronomischer Stationen zu studieren und zu beseitigen.

§ 12. Beweiskraft der Gradmessungen für die Existenz der näherungsweise rotationsellipsoidischen Gestalt des Geoids.

Bisher ist die Frage noch nicht erörtert worden, ob aus der Thatsache, daſs die Gradmessungen bis auf kleine Abweichungen einer Rotationsfläche, insbesondere einem abgeplatteten Rotationsellipsoid entsprechen, auch notwendig folgt, daſs das Geoid bis auf kleine Abweichungen eine Rotationsfläche, insbesondere ein abgeplattetes Rotationsellipsoid sei. Wir haben nämlich nur nach dem abgeplatteten Rotationsellipsoid gefragt, welches entweder *einem*

*) Vergl. *Pratt, A Treatise on Attractions etc. and the Figure of the Earth,* Cambridge 1860 S. 56.

Komplex zusammenhängender Messungen am besten entspricht (dem Referenzellipsoid), oder *mehreren* solchen Komplexen, die unter sich nicht zusammenhängen. Für letzteren Fall ist dann in den letzten vorhergehenden Paragraphen untersucht, inwieweit die Ergebnisse dem Erdellipsoid entsprechen, dessen Existenz durch Betrachtungen und Messungen nicht-geometrischer Natur als erwiesen vorausgesetzt wurde. Wenn es aber auch ganz zweifellos ist, dafs man die Frage der Bestimmung eines dem Geoid im ganzen möglichst entsprechenden Rotationsellipsoids nicht vom rein geometrischen Standpunkt aus allein behandeln darf, um zu den begründetsten Resultaten zu gelangen, so hat es doch auch ein Interesse, sich mit *der* Frage zu beschäftigen, ob die geometrischen Messungen allein schon imstande sind, die näherungsweise rotationsellipsoidische Gestalt des Geoids zu *beweisen*. Denn wenn wir etwas weniger genau astronomisch zu messen imstande wären, als es wirklich der Fall ist, so würden ja die Gradmessungen innerhalb der Beobachtungsfehler einem Rotationsellipsoid vollständig anzupassen sein.

Nehmen wir also einmal an, die Gradmessungen genügten mathematisch streng einem abgeplatteteten Rotationsellipsoid, so ist immer noch zu zeigen, dafs umgekehrt auch wirklich das Geoid gerade diese Gestalt hat und keine andere.

Die Aufgabe wird sich verschieden gestalten, je nach der Annahme über das Ergebnis der Gradmessungen. Am vollständigsten würde dieses sein, wenn es für hinreichend viele Orte die Krümmung in allen Azimuten feststellte. Entspricht aber die Krümmung allenthalben der Kugel oder dem Ellipsoid, so hat dann das Geoid sicher diese Form, weil man unter der Voraussetzung, dafs das Geoid eine stetig gebogene Fläche ist, aus gegebenen Krümmungsradien nur *eine* Fläche konstruieren kann.*)

---

*) In der Abhandlung: *Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben* (Journal für reine und angewandte Mathematik von *Crelle* Bd. 64 S. 193) hat *Christoffel* 1864 gezeigt, wie schon allein die Messung der Summe der beiden Hauptkrümmungsradien in hinreichend vielen Punkten der Fläche unter Voraussetzung einer stetig gebogenen, allenthalben gewölbten Form zur Kenntnis derselben führen kann, und wie insbesondere der Thatsache, dafs jene Summe dem bekannten Ausdruck fürs Rotationsellipsoid entspräche, Beweiskraft für die Existenz dieser Form innewohnen würde. Da aber die Messungen von den Geodäten anders angeordnet werden und das von *Christoffel* vorausgesetzte Studium lokaler Terrains sehr schwierig ist, so schien es uns angemessen, den Nachweis zu liefern, dafs auch die übliche Procedur der meridionalen Breitengradmessungen Material an die Hand giebt, rein geometrisch ohne eigentliche Hypothesen die Existenz einer Rotationsgestalt zu prüfen.

Im grofsen und ganzen genommen hat nun das Geoid sicher Kugelgestalt. Dieses folgt schon allein aus den Umfahrungen der Erde zu Wasser und Land, welche eben konstatieren, dafs die Krümmungsverhältnisse stets der Kugelgestalt im allgemeinen entsprechen. Zur genaueren Untersuchung fehlt es aber an Material. Die Gradmessungen sind in der Mehrzahl nur als Breitengradmessungen ausgeführt, weil sie sich in dieser Form am leichtesten bewerkstelligen lassen. Es fehlt also die Untersuchung der Krümmung in allen Azimuten;

Um die *Christoffel*sche Methode hier einigermafsen zu erläutern, denken wir uns dieselbe auf die Bestimmung einer ebenen, geschlossenen, nach aufsen allenthalben konvexen Kurve (etwa der Meridiankurve eines Rotationskörpers) angewandt. Sei B der Winkel der nach innen gerichteten Normale im Punkte (x, y) mit der x-Axe und ϱ der Krümmungsradius, so hat man

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\,ds\,.\,\sin B \\ dy &= +\,ds\,.\,\cos B \end{aligned}\right\} \quad ds = \varrho\, dB$$

und hieraus

$$x = -\int \varrho \sin B\, dB\,, \qquad y = +\int \varrho \cos B\, dB\,.$$

Zum Zwecke der Integration mufs ϱ als Funktion von B aus den Messungen hergestellt werden, wozu die interpolatorische Darstellung in Form einer periodischen Reihe dient.

Man kann hier die Bemerkung machen, dafs es einfacher und auch genauer ist, ϱ gar nicht abzuleiten, sondern bei den unmittelbaren Ergebnissen der Messungen, den Bögen s und den zugehörigen B der Endpunkte stehen zu bleiben, und demgemäfs s interpolatorisch als periodische Funktion von B darzustellen. Dann folgt

$$x = -\int \sin B\, ds\,, \qquad y = +\int \cos B\, ds\,.$$

Für Kurvenbestimmungen möchten wir dieses Verfahren, welches sich auch völlig dem üblichen Vorgange bei Breitengradmessungen anschliefst, vorziehen. Ebenso möchten wir für Flächenbestimmungen aus praktischen Gründen dem entsprechenden Verfahren des 12. Kapitels d. h. der Zugrundelegung einer einfachen Fläche mit Einführung von Lotabweichungen u. s. f. den Vorzug geben.

[Wir erwähnen beiläufig, dafs bei Benutzung der Entwicklungen in der genannten Abhandlung zu anderen Zwecken, als denen des Verfassers (also etwa zur Bestimmung der Gestalt aus Krümmungsmessungen in bestimmten Azimuten), die Formeln auf der 5. Seite unten nicht anwendbar sind, was nicht daselbst hervorgehoben ist. Sie gelten nur, wenn es sich, wie in der Abhandlung, um die Hauptkrümmungen handelt, also um die Krümmung in Ebenen, die die Normalen unendlich benachbarter Punkte der Fläche vollständig enthalten; sie gelten aber nicht für die Krümmung in beliebigen Ebenen. In der That darf man in jenen Formeln nicht $d\varrho$ oder $d\varphi$ gleich null setzen, denn es folgt allemal $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ = null, was den Voraussetzungen widerspricht.]

es fehlt aber überhaupt noch sehr an Krümmungsmessungen, so dafs wir nicht einmal mit einiger Sicherheit behaupten können, es sei eine allgemeine Eigenschaft des Geoids, gleichlange Gradlängen auf den geographischen Meridianen unter verschiedenen geographischen Längen zu besitzen. Zur Prüfung der Zulässigkeit einer solchen Behauptung würden in der That sehr viele Breitengradmessungen gehören.

Günstiger gestaltet sich die Sache in Rücksicht auf die Azimutmessungen, die immer gelegentlich der Breitengradmessungen angestellt werden. Unter gewissen Voraussetzungen können diese dazu dienen, das Zusammenfallen der geographischen Meridiane (d. h. der Linien gleicher geographischer Länge) mit den astronomischen Meridianebenen zu konstatieren, woraus, wie wir sehen werden, auch der Rotationscharakter resultiert. Da hierbei jedes Paar gegenseitiger Azimutmessungen einen Beitrag zur Untersuchung jener Eigenschaft bietet, so geben offenbar derartige Messungen in Azimut viel mehr beweiskräftiges Material als gleichviele Messungen in Breite.

Im Folgenden wollen wir nun zunächst einen *idealen* Fall diskutieren, der denjenigen Messungen sehr nahe entspricht, die aus praktischen Gründen am häufigsten ausgeführt werden, nämlich den meridionalen Breitengradmessungen mit mehreren Azimutbestimmungen, und zwar denken wir uns im einzelnen Falle immer zwei Punkte der Fläche, für welche direkt durch astronomische Messungen konstatiert wird, dafs sie gegenseitig im Azimut null liegen und daher eine gemeinsame Meridianebene, sowie die geographische Längendifferenz null haben. Solcher Punktpaare soll eine hinreichende Anzahl vorhanden sein und zwar so viele, wie bei Voraussetzung eines stetigen Verlaufs der Fläche nötig sind, um es als eine allgemeine Eigenschaft der letzteren erscheinen zu lassen,. dafs die Meridianebene irgend eines Punktes auch Meridianebene aller benachbarten Punkte der Fläche ist, durch welche sie hindurchgeht.

Ohne vorläufig auf die Krümmungsmessungen selbst Rücksicht zu nehmen, wollen wir zuerst untersuchen, welchen Beitrag die Konstatierung der eben erwähnten Eigenschaft der Fläche zu ihrer Charakterisierung liefert.

Verfolgt man aber die Durchschnittspunkte der Meridianebene eines Punktes mit der Fläche der Reihe nach, so sieht man, dafs alle Meridianebenen dieser Durchschnittspunkte zusammenfallen werden, dafs also die geographischen Meridiane ebene Kurven sein müssen, deren Ebenen mit den astronomischen Meridianebenen ihrer Punkte identisch sind.

Nunmehr liegt bereits die Vermutung nahe, die gesuchte Fläche

müsse eine Rotationsfläche sein. Dieses läfst sich in der That wie folgt zeigen.

Wir beziehen die Fläche auf drei rechtwinklige Koordinatenaxen und nehmen die z-Axe parallel zur Umdrehungsaxe der Erde, daher die xy-Ebene parallel zur Äquatorebene. Die zx-Ebene diene zum Ausgang der Zählung geographischer Längen L. Sind nun im Punkte P die geographische Breite gleich B und die Länge gleich L, und bezeichnet man die Neigungswinkel der Normalen in P zu den drei Axen mit λ, μ, ν, so ist

$$\cos\lambda = \cos B \cos L \quad \cos\mu = \cos B \sin L \quad \cos\nu = \sin B, \quad (1)$$

wie man unmittelbar durch Betrachtung der Linienverhältnisse eines rechtwinkligen Parallelepipeds findet, dessen eine Diagonale parallel zur Normale in P und dessen Kanten parallel zu den drei Axen sind. Andrerseits findet man in ähnlicher Weise, dafs die Cosinus der Neigungswinkel eines Linienelements ds der Fläche zu den drei Axen der Reihe nach sind:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Geht aber dieses Element von P aus, so steht es zur Normale senkrecht und man hat daher nach einem bekannten Satze:

$$\frac{dx}{ds}\cos\lambda + \frac{dy}{ds}\cos\mu + \frac{dz}{ds}\cos\nu = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (1) und unter Weglassung des gemeinsamen Nenners ds:

$$dx \cos B \cos L + dy \cos B \sin L + dz \sin B = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung ist die Bedingungsgleichung dafür, dafs der Übergang von P zu einem unendlich nahen Punkte der Fläche stattfindet. Bewegen wir uns aber in der Meridianebene von P um ds, so bleiben die Meridianebene und L konstant, d. h. es verschiebt sich die Projektion von P auf die xy-Ebene, wo die Meridianebene als Linie im Neigungswinkel L gegen die x-Axe auftritt, in dieser Linie selbst und man hat daher:

$$dx : dy = \cos L : \sin L.$$

Um auszudrücken, dafs für dx und dy L konstant, also nur B veränderlich ist, schreiben wir besser nach gemeinsamer Division mit dB und unter Anwendung des Zeichens partieller Differentiation:

$$\frac{\partial x}{\partial B} : \frac{\partial y}{\partial B} = \cos L : \sin L. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist mit (2) zu kombinieren, wobei es sehr passend erscheint, x, y und z als Funktionen von B und L aufzufassen und ganz von einer Gleichung zwischen x, y und z abzusehen. In Gleichung (2) hat man nun im allgemeinen zu setzen:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL,$$

u. s. f.

sie giebt daher, je nachdem man nur B oder nur L variiert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} \cos B \cos L + \frac{\partial y}{\partial B} \cos B \sin L + \frac{\partial z}{\partial B} \sin B = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial L} \cos B \cos L + \frac{\partial y}{\partial L} \cos B \sin L + \frac{\partial z}{\partial L} \sin B = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Insofern man sich aber x, y und z als Funktionen von B und L denkt, sind diese Gleichungen Indentitäten, weil zwischen B und L keine Gleichung besteht. Differenzieren wir nun links nach B oder L, so entstehen wieder verschwindende Ausdrücke. Wir benutzen indes nur die Differentiation der 1. Gleichung nach L und die der 2. Gleichung nach B, weil nur für diesen Fall in beiden Gleichungen dieselben höheren Differentialquotienten auftreten. Es wird erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial B \partial L} \cos B \cos L + \frac{\partial^2 y}{\partial B \partial L} \cos B \sin L + \frac{\partial^2 z}{\partial B \partial L} \sin B \\ &- \frac{\partial x}{\partial B} \cos B \sin L + \frac{\partial y}{\partial B} \cos B \cos L \end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial L \partial B} \cos B \cos L + \frac{\partial^2 y}{\partial L \partial B} \cos B \sin L + \frac{\partial^2 z}{\partial L \partial B} \sin B \\ &- \frac{\partial x}{\partial L} \sin B \cos L - \frac{\partial y}{\partial L} \sin B \sin L + \frac{\partial z}{\partial L} \cos B \end{aligned}\right\} = 0.$$

Wenn wir nun voraussetzen, daſs wir es mit einer Fläche zu thun haben, deren Krümmung sich stetig ändert, so wird

$$\frac{\partial^2 x}{\partial B \partial L} = \frac{\partial^2 x}{\partial L \partial B}, \tag{5}$$

u. s. f.

Es giebt alsdann die Subtraktion beider vorhergehenden Gleichungen:

$$- \frac{\partial x}{\partial B} \cos B \sin L + \frac{\partial y}{\partial B} \cos B \cos L$$

$$= - \frac{\partial x}{\partial L} \sin B \cos L - \frac{\partial y}{\partial L} \sin B \sin L + \frac{\partial z}{\partial L} \cos B.$$

Fügt man zur rechten Seite dieser Gleichung die linke Seite der 2. Gleichung (4) nach vorheriger Multiplikation mit $\tan B$, so findet sich leicht:

$$\frac{\partial z}{\partial L} = -\frac{\partial x}{\partial B}\cos^2 B \sin L + \frac{\partial y}{\partial B}\cos^2 B \cos L. \tag{6}$$

Die drei Gleichungen (4) und (6) gelten allgemein; durch Einführung der speziellen Bedingung (3) aber nehmen sie die folgende Form an:

$$\frac{\partial z}{\partial B}\sin B = -\frac{\partial x}{\partial B}\cos B \sec L, \tag{7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial L}\sin B = -\frac{\partial x}{\partial L}\cos B \cos L - \frac{\partial y}{\partial L}\cos B \sin L, \tag{8}$$

$$\frac{\partial z}{\partial L} = 0. \tag{9}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dafs zufolge der Bedingung (3)

$$z \textit{ eine Funktion von } B \textit{ allein} \tag{10}$$

ist. Die Meridianschnitte sind hiernach (ebene) *kongruente* Kurven; ferner sind die Parallelen (d. h. die Linien gleicher Breite B) *ebene* Kurven, deren Ebenen normal zur Umdrehungsaxe stehen. Man erkennt ferner auch, dafs in jedem Punkte das Linienelement des Parallels rechtwinklig zu der Meridianebene liegt, denn es liegt in der Oberfläche und in der Ebene des Parallels, und beide stehen in P normal zur Meridianebene.

Nennen wir R den Krümmungsradius des Parallels in P, so hat man jetzt für das Bogenelement ds desselben mit Rücksicht auf das soeben Gesagte die Gleichung:

$$ds = R\,dL,$$

und hieraus, da für ds die Breite B konstant ist:

$$R = \frac{\partial s}{\partial L}. \tag{11}$$

Nun ist aber für das Element ds die Neigung zur x-Axe gleich $L + 90^0$, daher $ds = dx \cos(L + 90^0) + dy \sin(L + 90^0)$ oder besser:

$$\frac{\partial s}{\partial L} = -\frac{\partial x}{\partial L}\sin L + \frac{\partial y}{\partial L}\cos L. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt eine Beziehung von R zu $\frac{\partial x}{\partial L}$ und $\frac{\partial y}{\partial L}$,

welche letztere beiden nach Maſsgabe von (8) und (9) von einander abhängen. Man hat darnach:

$$\left.\begin{aligned} R &= -\frac{\partial x}{\partial L}\sin L + \frac{\partial y}{\partial L}\cos L \\ 0 &= \frac{\partial x}{\partial L}\cos L + \frac{\partial y}{\partial L}\sin L\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Eliminiert man $\frac{\partial y}{\partial L}$ aus beiden, so wird erhalten:

$$R = -\frac{\partial x}{\partial L}\csc L \tag{14}$$

und es ist:

$$\frac{\partial R}{\partial B} = -\frac{\partial^2 x}{\partial B\,\partial L}\csc L\,.$$

Die Differentiation der mit $\cos L$ multiplizierten Gleichung (7) nach L giebt aber, da wegen (9)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial B\,\partial L} = 0$$

ist:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial B\,\partial L}\csc L = \frac{\partial z}{\partial B}\tan B$$

und man hat somit:

$$\frac{\partial R}{\partial B} = -\frac{\partial z}{\partial B}\tan B\,. \tag{15}$$

Diese Gleichung zeigt, in Verbindung mit (10), daſs $\frac{\partial R}{\partial B}$ eine Funktion von B allein ist, daſs daher sein muſs

$$R = f(B) + \varphi(L), \tag{16}$$

worin f und φ Funktionszeichen bedeuten.

Soll die Fläche eine Rotationsfläche sein, so muſs $\varphi(L)$ verschwinden oder konstant sein.

Dieses erfordert ein Unbestimmtwerden von L mindestens in *einem* Punkte der Fläche; wenn nämlich $\varphi(L)$ für unbestimmte Werte von L dasselbe giebt, ist es keine Funktion von L mehr.

Unsere Fläche hat nun mindestens 2 solche Punkte, denn das Geoid ist zweifellos (s. o.) kugelartig geschlossen. Denken wir uns aber die zur z-Axe normale Ebene der Parallelen in Bewegung und etwa von auſsen her an die Fläche herantretend, so ist leicht zu sehen, daſs die angegebene Art des Geschlossenseins ein Zusammenschrumpfen des Parallels auf null an zwei Orten fordert, daſs ferner um diese Punkte herum unendlich kleine Parallelen liegen und also durch diese Punkte unendlich viele Meridiane gehen müssen.

Die *Messungen des Azimuts* gelegentlich der Breitengradmessungen genügen somit allein schon die Frage zu entscheiden, ob die Messungen auf einer *Rotationsfläche* erfolgen oder nicht, ohne weitere *Voraussetzung* als die, *dafs die Fläche stetig gebogen und gekrümmt, sowie kugelartig geschlossen sei.* Nach allgemeinen Sätzen der Potentialtheorie ist aber (abgesehen von lokalen Krümmungsunstetigkeiten) im grofsen und ganzen ein stetiger Verlauf in Bezug auf Biegung und Krümmung vorhanden und die Fläche geschlossen, ohne sich selbst zu schneiden. Der kugelartige Charakter (der einfache Zusammenhang) folgt, wie schon bemerkt, aus den rohen Krümmungsmessungen in allen Azimuten durch die Bereisungen der Fläche (abgesehen von naheliegenden Beweismitteln anderer Art, wie z. B. der Form des Erdschattens).*)

Die Krümmungsmessungen im Meridian geben, nachdem der Rotationscharakter nachgewiesen ist, die Form der Meridiankurve ganz unzweideutig, falls in den Polen die Breite 90° beträgt, was durch die stetige Biegung gefordert wird.

Die praktischen Verhältnisse erheischen allerdings *die* Abweichung von unserem Idealfalle, dafs die Azimutmessungen nicht genau gegenseitig für Punkte desselben geographischen Meridians erfolgen können. Um die Azimute zu vergleichen, ist daher die Einführung von Näherungswerten für die Krümmungsverhältnisse notwendig. Allein dieses ist ganz unbedenklich, wenn die zu vergleichenden astronomischen Stationen immer nur einen kleinen geographischen Längenunterschied besitzen und wenn angenommen werden darf, dafs die nördlicher gelegene von zweien benachbarten ebenso oft östlich wie westlich fällt. Ein Fehler jener Werte wird dann ebenso wie die lokalen Unregelmäfsigkeiten Abweichungen von zufälligem Charakter erzeugen.

Diese lokalen Unregelmäfsigkeiten bedingen nun auch in Verbindung mit der Existenz der unvermeidlichen Beobachtungsfehler eine Ausdehnung der Azimutmessungen auf möglichst viele Teile der Fläche, ebenso wie der Breitengradmessungen überhaupt auf viele Meridiane. Was sich zeigende geringe systematische Abweichungen anlangt, so weisen diese auf geringe Abweichungen von der Rotationsgestalt hin, man braucht aber nicht zu fürchten, dafs dieselben diesen Gesamtcharakter der Fläche ganz verwischen.

*) Könnte die Erde Ringform haben, so würden Azimutmessungen allein nicht genügen, die Rotationsgestalt zu erweisen, denn L wird für Ringe an keiner Stelle unbestimmt, weil die Parallelen nirgends auf null zusammenschrumpfen.

§ 13. **Fortsetzung: Breitengradmessungen.** Wir behandeln jetzt noch den bereits oben berührten, aber als von geringer praktischer Bedeutung erklärten idealen Fall, daſs durch zahlreiche Breitengradmessungen es als eine allgemeine Eigenschaft des Geoids erkannt worden sei, auf allen geographischen Meridianen gleichlange Bögen zwischen je zwei Parallelen zu besitzen. Mathematisch präzisiert heiſst dies: es ist

$$\frac{\partial s}{\partial B} \text{ eine Funktion von } B \text{ allein.} \tag{1}$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{\partial s}{\partial B}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial B}\right)^2. \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung eliminieren wir x und y mittelst der ersten Gleichung (4) und der Gleichung (6) des vorigen Paragraphen, welche ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= -\frac{\partial z}{\partial B}\tan B\cos L - \frac{\partial z}{\partial L}\sec^2 B\sin L \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -\frac{\partial z}{\partial B}\tan B\sin L + \frac{\partial z}{\partial L}\sec^2 B\cos L. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hiermit folgt aus (2) und (1), wenn F eine beliebige Funktion andeutet und anstatt B die Poldistanz $P = 90^0 - B$ eingeführt wird:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial P}\right)^2 \sin^2 P + \left(\frac{\partial z}{\partial L}\right)^2 = F(P). \tag{4}$$

Um diese Gleichung sogleich mit Rücksicht auf die Bedingung zu integrieren, daſs unsere Fläche wenigstens zwei Punkte hat, wo P gleich null ist, beschränken wir uns vorläufig darauf, ein um einen dieser Punkte herum liegendes so kleines Gebiet zu betrachten, daſs für dasselbe eine konvergente Entwicklung von z nach Potenzen von P möglich ist. Dabei verschieben wir den Koordinatenanfang in diesen Punkt und setzen demgemäſs

$$z = P^2 L_2 + P^3 L_3 + P^4 L_4 + \cdots, \tag{5}$$

worin $L_2, L_3, L_4 \cdots$ Funktionen von L allein sind. Das Glied mit der 1. Potenz von P ist weggelassen, da $\frac{\partial z}{\partial P}$ für $P = 0$ nach unseren Voraussetzungen über die Fläche gleich null werden muſs. Diese Voraussetzungen bedingen auch, daſs L_2 für alle Werte von L entweder nur positiv oder nur negativ ist. Denn sonst würde es keine zur z-Axe normale Ebene geben, welche unendlich nahe am ausgewählten Punkt die Fläche nicht schneidet und es würde also der

Punkt nicht zu jenen zwei notwendig vorhandenen Punkten gehören, von denen einer Koordinatenanfang werden sollte.

Wir bilden nun die nachstehenden Ausdrücke:

$$\frac{\partial z}{\partial P} = 2PL_2 + 3P^2L_3 + 4P^3L_4 \cdots$$

$$\sin P = P - \frac{1}{6}P^3 + \cdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial P}\sin P = 2P^2L_2 + 3P^3L_3 + \left(4L_4 - \frac{1}{3}L_2\right)P^4 + \cdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial L} = P^2L_2' + P^3L_3' + P^4L_4' + \cdots.$$

In der letzten Reihe bezeichnet der Strich oben an L_2, $L_3 \cdots$ die erste Derivation nach L. Führen wir vorstehende Formeln in (4) ein, so folgt:

$$\left.\begin{array}{l}(4L_2^2 + L_2'^2)P^4 + (12L_2L_3 + 2L_2'L_3')P^5 \\ + \left(-\frac{4}{3}L_2^2 + 16L_2L_4 + 9L_3^2 + 2L_2'L_4' + L_3'^2\right)P^6 + \cdots = F(P).\end{array}\right\}(6)$$

Dieser Gleichung wird nur genügt, wenn die Koefficienten von P^4, P^5, $P^6 \ldots$ einzeln konstant sind. Zunächst mufs sein:

$$4L_2^2 + L_2'^2 = k^2, \tag{7}$$

k konstant. Hieraus folgt entweder $L_2 = Constans$ oder

$$dL = \frac{\pm dL_2}{\sqrt{k^2 - 4L_2^2}}, \quad L_2 = \pm\frac{k}{2}\sin 2L. \tag{8}$$

Von diesen beiden Lösungen ist nur die erste brauchbar, denn die zweite widerspricht bei $k \gtrless$ null (abgesehen von der Annahme $L_2 = \pm$ val abs $\frac{k}{2}\sin 2L$, nach welcher die Fläche Kanten haben würde) der Bedingung, dafs L_2 nur positiv oder nur negativ sein darf; bei $k =$ null aber würde der Krümmungsradius im Koordinatenanfange gleich null werden und somit die Richtung der Normale daselbst eine Unbestimmtheit erlangen.

Somit bleibt nur die Möglichkeit, $L_2 = Constans$ zu setzen. Da aber der Koefficient von P^5 in (6) auch konstant sein mufs, wird jetzt notwendig auch L_3 konstant. Und so zeigt jeder folgende Koefficient die Konstanz eines folgenden Wertes in der Reihe $L_4, L_5, \ldots$ Demnach ergiebt sich, dafs z am Koordinatenanfang nur eine Funktion von P und damit nur eine Funktion der geographischen Breite B allein sein kann.

Unsere Fläche ist sonach in der Nähe der kritischen zwei Punkte eine Rotationsfläche; sie ist es aber überhaupt, da sie stetig sein soll und in jedem beliebig kleinen, jedoch endlichen Teil einer solchen Fläche bereits alle Eigenschaften zum Ausdruck gelangen. Man kann nämlich nahe der Grenze des Gebiets, wo (5) zu konvergieren aufhört, einen neuen Ausgangspunkt einer *Taylor*schen Entwicklung annehmen, die zum Teil im ersten Gebiet, zum Teil noch aufserhalb konvergiert. Auch hier kann nun z nur eine Funktion von B allein sein. In dieser Weise aber läfst sich nach und nach die ganze Fläche umfassen.

Die Voraussetzungen bei vorstehender Lösung der Aufgabe waren wesentlich dieselben, als bei der vorigen Aufgabe. Nur fordert die Entwicklung (5) Stetigkeit und Endlichkeit nicht nur für den ersten und zweiten Differentialquotienten (d. h. in Biegung und Krümmung), sondern auch für alle höheren Differentialquotienten. Für das Geoid aber kann man, abgesehen von lokalen Abweichungen, diese Bedingung aus denselben Gründen für die höheren Differentialquotienten als erfüllt betrachten, wie für die beiden ersten allein.

Tafel

für

$$\log W - \log \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B},$$

die geographische Breite B von 47° bis 57°;
$\log e^2 = 7{,}8244104.15 - 10$

Anm.: Die 11. Decimalstelle ist nur beigesetzt, um auch für das Dreifache und Vierfache von log W die 10. Stelle höchstens 1 Einheit unsicher zu erhalten. Sie selbst kann im Maximum wohl bis zu 3 Einheiten irrig sein.

B	log W	1. Diff.	2. Diff.	B	log W	1. Diff.	2. Diff.
47° 0′	9,9992234.024$_3$	21.101$_4$	4	49°30′	9,9991603.561$_3$	20.895$_9$	9
5	2212.922$_9$	21.097$_2$	4	35	1582.665$_4$	20.886$_4$	10
10	2191.825$_7$	21.092$_7$	5	40	1561.779$_0$	20.876$_5$	10
15	2170.733$_0$	21.088$_1$	5	45	1540.902$_5$	20.866$_6$	10
20	2149.644$_9$	21.083$_3$	5	50	1520.035$_9$	20.856$_5$	10
25	2128.561$_6$	21.078$_4$	5	55	1499.179$_4$	20.846$_1$	10
47°30′	9,9992107.483$_2$	21.073$_2$	5	50° 0′	9,9991478.333$_3$	20.835$_7$	10
35	2086.410$_0$	21.067$_8$	5	5	1457.497$_6$	20.825$_1$	11
40	2065.342$_2$	21.062$_2$	6	10	1436.672$_5$	20.814$_2$	11
45	2044.280$_0$	21.056$_7$	6	15	1415.858$_3$	20.803$_1$	11
50	2023.223$_3$	21.050$_8$	6	20	1395.055$_2$	20.791$_9$	11
55	2002.172$_5$	21.044$_7$	6	25	1374.263$_3$	20.780$_5$	11
48° 0′	9,9991981.127$_8$	21.038$_4$	6	50°30′	9,9991353.482$_8$	20.768$_8$	12
5	1960.089$_4$	21.032$_0$	6	35	1332.714$_0$	20.757$_2$	12
10	1939.057$_4$	21.025$_5$	7	40	1311.956$_8$	20.745$_3$	12
15	1918.031$_9$	21.018$_8$	7	45	1291.211$_5$	20.733$_4$	12
20	1897.013$_1$	21.011$_8$	7	50	1270.478$_1$	20.721$_3$	12
25	1876.001$_3$	21.004$_7$	7	55	1249.756$_8$	20.708$_7$	13
48°30′	9,9991854.996$_6$	20.997$_1$	7	51° 0′	9,9991229.048$_1$	20.696$_0$	13
35	1833.999$_2$	20.989$_8$	8	5	1208.352$_1$	20.683$_2$	13
40	1813.009$_4$	20.982$_3$	8	10	1187.668$_9$	20.670$_2$	13
45	1792.027$_1$	20.974$_5$	8	15	1166.998$_7$	20.657$_1$	13
50	1771.052$_6$	20.966$_3$	8	20	1146.341$_6$	20.643$_7$	13
55	1750.086$_3$	20.958$_1$	8	25	1125.697$_9$	20.630$_3$	13
49° 0′	9,9991729.128$_2$	20.949$_7$	8	51°30′	9,9991105.067$_6$	20.616$_7$	14
5	1708.178$_5$	20.941$_3$	8	35	1084.450$_9$	20.603$_0$	14
10	1687.237$_2$	20.932$_6$	9	40	1063.847$_9$	20.589$_0$	14
15	1666.304$_6$	20.923$_6$	9	45	1043.258$_9$	20.574$_8$	14
20	1645.381$_0$	20.914$_4$	9	50	1022.684$_1$	20.560$_3$	15
25	1624.466$_6$	20.905$_3$	9	55	1002.123$_8$	20.545$_8$	15
49°30′	9,9991603.561$_3$		9	52° 0′	9,9990981.578$_0$		15

B	log *W*	1. Diff.	2. Diff.	*B*	log *W*	1. Diff.	2. Diff.
52° 0′	9,9990981.578$_0$	20.531$_0$	15	54°30′	9,9990372.818$_6$	20.009$_7$	20
5	0961.047$_0$	20.516$_1$	15	35	0352.808$_9$	19.989$_7$	20
10	0940.530$_9$	20.501$_1$	15	40	0332.819$_2$	19.969$_5$	20
15	0920.029$_8$	20.486$_0$	15	45	0312.849$_7$	19.949$_1$	20
20	0899.543$_8$	20.470$_6$	15	50	0292.900$_6$	19.928$_4$	21
25	0879.073$_2$	20.455$_0$	16	55	0272.972$_2$	19.907$_7$	21
52°30′	9,9990858.618$_2$	20.439$_4$	16	55° 0′	9,9990253.064$_5$	19.887$_0$	21
35	0838.178$_8$	20.423$_5$	16	5	0233.177$_5$	19.866$_0$	21
40	0817.755$_3$	20.407$_1$	16	10	0213.311$_5$	19.844$_7$	21
45	0797.348$_2$	20.390$_9$	16	15	0193.466$_8$	19.823$_3$	21
50	0776.957$_3$	20.374$_5$	16	20	0173.643$_5$	19.801$_8$	22
55	0756.582$_8$	20.358$_0$	17	25	0153.841$_7$	19.780$_0$	22
53° 0′	9,9990736.224$_8$	20.341$_3$	17	55°30′	9,9990134.061$_7$	19.757$_9$	22
5	0715.883$_5$	20.324$_2$	17	35	0114.303$_8$	19.735$_8$	22
10	0695.559$_3$	20.307$_0$	17	40	0094.568$_0$	19.713$_8$	22
15	0675.252$_3$	20.289$_6$	17	45	0074.854$_2$	19.691$_4$	22
20	0654.962$_7$	20.272$_3$	17	50	0055.162$_8$	19.668$_9$	23
25	0634.690$_4$	20.254$_7$	18	55	0035.493$_9$	19.646$_2$	23
53°30′	9,9990614.435$_7$	20.236$_9$	18	56° 0′	9,9990015.847$_7$	19.623$_1$	23
35	0594.198$_8$	20.218$_9$	18	5	9,9989996.224$_6$	19.600$_1$	23
40	0573.979$_9$	20.200$_8$	18	10	9976.624$_5$	19.577$_0$	23
45	0553.779$_1$	20.182$_4$	18	15	9957.047$_5$	19.553$_5$	24
50	0533.596$_7$	20.163$_8$	19	20	9937.494$_0$	19.529$_9$	24
55	0513.432$_9$	20.145$_0$	19	25	9917.964$_1$	19.506$_2$	24
54° 0′	9,9990493.287$_9$	20.126$_3$	19	56°30′	9,9989898.457$_9$	19.482$_3$	24
5	0473.161$_6$	20.107$_5$	19	35	9878.975$_6$	19.458$_2$	24
10	0453.054$_1$	20.088$_2$	19	40	9859.517$_4$	19.434$_0$	24
15	0432.965$_9$	20.068$_7$	20	45	9840.083$_4$	19.409$_6$	24
20	0412.897$_2$	20.049$_1$	20	50	9820.673$_8$	19.385$_2$	24
25	0392.848$_1$	20.029$_5$	20	55	9801.288$_6$	19.360$_3$	25
54°30′	9,9990372.818$_6$		20	57° 0′	9,9989781.928$_3$		25

Tafel

für

$$\log W = \log \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \text{ und } \log w = \log \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta},$$

die geographische Breite B und die reduzierte Breite β von 0 bis 90°;
$\log e^2 = 7{,}8244104.15 - 10.$

B	log W			B	log W		
0° 0′	0,0000000.0	0.1	90° 0′	5° 0′	9,9999889.9	7.4	85° 0′
10	9,9999999.9	0.4	50	10	9882.5	7.7	50
20	9999.5	0.6	40	20	9874.8	7.9	40
30	9998.9	0.9	30	30	9866.9	8.2	30
40	9998.0	1.1	20	40	9858.7	8.4	20
50	9996.9	1.3	10	50	9850.3	8.7	10
1° 0′	9,9999995.6	1.6	89° 0′	6° 0′	9,9999841.6	8.8	84° 0′
10	9994.0	1.9	50	10	9832.8	9.2	50
20	9992.1	2.1	40	20	9823.6	9.3	40
30	9990.0	2.3	30	30	9814.3	9.6	30
40	9987.7	2.5	20	40	9804.7	9.9	20
50	9985.2	2.9	10	50	9794.8	10.1	10
2° 0′	9,9999982.3	3.0	88° 0	7° 0′	9,9999784.7	10.3	83° 0′
10	9979.3	3.3	50	10	9774.4	10.5	50
20	9976.0	3.6	40	20	9763.9	10.8	40
30	9972.4	3.8	30	30	9753.1	11.1	30
40	9968.6	4.0	20	40	9742.0	11.2	20
50	9964.6	4.3	10	50	9730.8	11.5	10
3° 0′	9,9999960.3	4.5	87° 0′	8° 0′	9,9999719.3	11.8	82° 0′
10	9955.8	4.8	50	10	9707.5	12.0	50
20	9951.0	5.0	40	20	9695.5	12.2	40
30	9946.0	5.3	30	30	9683.3	12.4	30
40	9940.7	5.5	20	40	9670.9	12.7	20
50	9935.2	5.7	10	50	9658.2	12.9	10
4° 0′	9,9999929.5	6.0	86° 0′	9° 0′	9,9999645.3	13.2	81° 0′
10	9923.5	6.2	50	10	9632.1	13.3	50
20	9917.3	6.5	40	20	9618.8	13.6	40
30	9910.8	6.7	30	30	9605.2	13.9	30
40	9904.1	7.0	20	40	9591.3	14.1	20
50	9897.1	7.2	10	50	9577.2	14.3	10
5° 0′	9,9999889.9		85° 0′	10° 0′	9,9999562.9		80° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
10° 0′	9,9999562.9	14.5	80° 0′	17° 0′	9,9998760.8	23.7	73° 0′
10	9548.4	14.8	50	10	8737.1	23.9	50
20	9533.6	15.0	40	20	8713.2	24.1	40
30	9518.6	15.2	30	30	8689.1	24.3	30
40	9503.4	15.5	20	40	8664.8	24.5	20
50	9487.9	15.6	10	50	8640.3	24.7	10
11° 0′	9,9999472.3	15.9	79° 0′	18° 0′	9,9998615.6	24.9	72° 0′
10	9456.4	16.2	50	10	8590.7	25.1	50
20	9440.2	16.3	40	20	8565.6	25.3	40
30	9423.9	16.6	30	30	8540.3	25.5	30
40	9407.3	16.8	20	40	8514.8	25.7	20
50	9390.5	17.1	10	50	8489.1	25.8	10
12° 0′	9,9999373.4	17.3	78° 0′	19° 0′	9,9998463.3	26.1	71° 0′
10	9356.1	17.4	50	10	8437.2	26.3	50
20	9338.7	17.8	40	20	8410.9	26.4	40
30	9320.9	17.9	30	30	8384.5	26.7	30
40	9303.0	18.1	20	40	8357.8	26.8	20
50	9284.9	18.4	10	50	8331.0	27.0	10
13° 0′	9,9999266.5	18.6	77° 0′	20° 0′	9,9998304.0	27.3	70° 0′
10	9247.9	18.8	50	10	8276.7	27.4	50
20	9229.1	19.1	40	20	8249.3	27.6	40
30	9210.0	19.2	30	30	8221.7	27.7	30
40	9190.8	19.5	20	40	8194.0	28.0	20
50	9171.3	19.7	10	50	8166.0	28.1	10
14° 0′	9,9999151.6	19.9	76° 0	21° 0′	9,9998137.9	28.4	69° 0′
10	9131.7	20.1	50	10	8109.5	28.5	50
20	9111.6	20.4	40	20	8081.0	28.6	40
30	9091.2	20.5	30	30	8052.4	28.9	30
40	9070.7	20.8	20	40	8023.5	29.0	20
50	9049.9	21.0	10	50	7994.5	29.3	10
15° 0′	9,9999028.9	21.2	75° 0′	22° 0′	9,9997965.2	29.4	68° 0′
10	9007.7	21.4	50	10	7935.8	29.6	50
20	8986.3	21.6	40	20	7906.2	29.7	40
30	8964.7	21.8	30	30	7876.5	29.9	30
40	8942.9	22.1	20	40	7846.6	30.1	20
50	8920.8	22.2	10	50	7816.5	30.3	10
16° 0′	9,9998898.6	22.5	74° 0′	23° 0′	9,9997786.2	30.5	67° 0′
10	8876.1	22.6	50	10	7755.7	30.6	50
20	8853.5	22.9	40	20	7725.1	30.8	40
30	8830.6	23.1	30	30	7694.3	30.9	30
40	8807.5	23.3	20	40	7663.4	31.1	20
50	8784.2	23.4	10	50	7632.3	31.3	10
17° 0′	9,9998760.8		73° 0′	24° 0′	9,9997601.0		66° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
24° 0′	9,9997601.0	31.5	66° 0′	31° 0′	9,9996152.1	37.4	59° 0′
10	7569.5	31.6	50	10	6114.7	37.4	50
20	7537.9	31.7	40	20	6077.3	37.6	40
30	7506.2	32.0	30	30	6039.7	37.7	30
40	7474.2	32.1	20	40	6002.0	37.8	20
50	7442.1	32.2	10	50	5964.2	37.9	10
25° 0′	9,9997409.9	32.4	65° 0′	32° 0′	9,9995926.3	38.0	58° 0′
10	7377.5	32.6	50	10	5888.3	38.2	50
20	7344.9	32.7	40	20	5850.1	38.2	40
30	7312.2	32.9	30	30	5811.9	38.3	30
40	7279.3	33.0	20	40	5773.6	38.5	20
50	7246.3	33.2	10	50	5735.1	38.5	10
26° 0′	9,9997213.1	33.4	64° 0′	33° 0′	9,9995696.6	38.6	57° 0′
10	7179.7	33.5	50	10	5658.0	38.8	50
20	7146.2	33.6	40	20	5619.2	38.8	40
30	7112.6	33.8	30	30	5580.4	39.0	30
40	7078.8	33.9	20	40	5541.4	39.0	20
50	7044.9	34.1	10	50	5502.4	39.1	10
27° 0′	9,9997010.8	34.2	63° 0′	34° 0′	9,9995463.3	39.2	56° 0′
10	6976.6	34.4	50	10	5424.1	39.3	50
20	6942.2	34.5	40	20	5384.8	39.4	40
30	6907.7	34.7	30	30	5345.4	39.5	30
40	6873.0	34.8	20	40	5305.9	39.6	20
50	6838.2	34.9	10	50	5266.3	39.7	10
28° 0′	9,9996803.3	35.1	62° 0′	35° 0′	9,9995226.6	39.7	55° 0′
10	6768.2	35.2	50	10	5186.9	39.8	50
20	6733.0	35.3	40	20	5147.1	40.0	40
30	6697.7	35.5	30	30	5107.1	39.9	30
40	6662.2	35.6	20	40	5067.2	40.1	20
50	6626.6	35.8	10	50	5027.1	40.2	10
29° 0′	9,9996590.8	35.8	61° 0′	36° 0′	9,9994986.9	40.2	54° 0′
10	6555.0	36.0	50	10	4946.7	40.3	50
20	6519.0	36.2	40	20	4906.4	40.4	40
30	6482.8	36.2	30	30	4866.0	40.4	30
40	6446.6	36.4	20	40	4825.6	40.5	20
50	6410.2	36.5	10	50	4785.1	40.6	10
30° 0′	9,9996373.7	36.7	60° 0′	37° 0′	9,9994744.5	40.7	53° 0′
10	6337.0	36.7	50	10	4703.8	40.7	50
20	6300.3	36.9	40	20	4663.1	40.8	40
30	6263.4	37.0	30	30	4622.3	40.9	30
40	6226.4	37.1	20	40	4581.4	40.9	20
50	6189.3	37.2	10	50	4540.5	41.0	10
31° 0′	9,9996152.1		59° 0′	38° 0′	9,9994499.5		52° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
38° 0′	9,9994499.5	41.0	52° 0′	45° 0′	9,9992741.3	42.3	45° 0′
10	4458.5	41.1	50	10	2699.0	42.3	50
20	4417.4	41.2	40	20	2656.7	42.3	40
30	4376.2	41.2	30	30	2614.4	42.3	30
40	4335.0	41.2	20	40	2572.1	42.3	20
50	4293.8	41.4	10	50	2529.8	42.3	10
39° 0′	9,9994252.4	41.3	51° 0′	46° 0′	9,9992487.5	42.3	44° 0′
10	4211.1	41.4	50	10	2445.2	42.2	50
20	4169.7	41.5	40	20	2403.0	42.3	40
30	4128.2	41.5	30	30	2360.7	42.2	30
40	4086.7	41.6	20	40	2318.5	42.3	20
50	4045.1	41.6	10	50	2276.2	42.2	10
40° 0′	9,9994003.5	41.7	50° 0′	47° 0′	9,9992234.0	42.2	43° 0′
10	3961.8	41.7	50	10	2191.8	42.2	50
20	3920.1	41.7	40	20	2149.6	42.1	40
30	3878.4	41.8	30	30	2107.5	42.2	30
40	3836.6	41.8	20	40	2065.3	42.1	20
50	3794.8	41.9	10	50	2023.2	42.1	10
41° 0′	9,9993752.9	41.8	49° 0′	48° 0′	9,9991981.1	42.0	42° 0′
10	3711.1	42.0	50	10	1939.1	42.1	50
20	3669.1	41.9	40	20	1897.0	42.0	40
30	3627.2	42.0	30	30	1855.0	42.0	30
40	3585.2	42.0	20	40	1813.0	41.9	20
50	3543.2	42.0	10	50	1771.1	42.0	10
42° 0′	9,9993501.2	42.1	48° 0′	49° 0′	9,9991729.1	41.9	41° 0′
10	3459.1	42.1	50	10	1687.2	41.8	50
20	3417.0	42.1	40	20	1645.4	41.8	40
30	3374.9	42.2	30	30	1603.6	41.8	30
40	3332.7	42.1	20	40	1561.8	41.8	20
50	3290.6	42.2	10	50	1520.0	41.7	10
43° 0′	9,9993248.4	42.2	47° 0′	50° 0′	9,9991478.3	41.6	40° 0′
10	3206.2	42.2	50	10	1436.7	41.6	50
20	3164.0	42.2	40	20	1395.1	41.6	40
30	3121.8	42.3	30	30	1353.5	41.5	30
40	3079.5	42.2	20	40	1312.0	41.5	20
50	3037.3	42.3	10	50	1270.5	41.5	10
44° 0′	9,9992995.0	42.3	46° 0′	51° 0′	9,9991229.0	41.3	39° 0′
10	2952.7	42.2	50	10	1187.7	41.4	50
20	2910.5	42.3	40	20	1146.3	41.2	40
30	2868.2	42.3	30	30	1105.1	41.3	30
40	2825.9	42.3	20	40	1063.8	41.1	20
50	2783.6	42.3	10	50	1022.7	41.1	10
45° 0′	9,9992741.3		45° 0′	52° 0′	9,9990981.6		38° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
52° 0′	9,9990981.6	41.1	38° 0′	59° 0′	9,9989325.1	37.3	31° 0′
10	0940.5	41.0	50	10	9287.8	37.3	50
20	0899.5	40.9	40	20	9250.5	37.1	40
30	0858.6	40.8	30	30	9213.4	37.0	30
40	0817.8	40.8	20	40	9176.4	36.9	20
50	0777.0	40.8	10	50	9139.5	36.7	10
53° 0′	9,9990736.2	40.6	37° 0′	60° 0′	9,9989102.8	36.6	30° 0′
10	0695.6	40.6	50	10	9066.2	36.6	50
20	0655.0	40.6	40	20	9029.6	36.3	40
30	0614.4	40.4	30	30	8993.3	36.3	30
40	0574.0	40.4	20	40	8957.0	36.1	20
50	0533.6	40.3	10	50	8920.9	36.0	10
54° 0′	9,9990493.3	40.2	36° 0′	61° 0′	9,9988884.9	35.9	29° 0′
10	0453.1	40.2	50	10	8849.0	35.7	50
20	0412.9	40.1	40	20	8813.3	35.6	40
30	0372.8	40.0	30	30	8777.7	35.5	30
40	0332.8	39.9	20	40	8742.2	35.4	20
50	0292.9	39.8	10	50	8706.8	35.2	10
55° 0′	9,9990253.1	39.8	35° 0′	62° 0′	9,9988671.6	35.0	28° 0′
10	0213.3	39.7	50	10	8636.6	34.9	50
20	0173.6	39.5	40	20	8601.7	34.8	40
30	0134.1	39.5	30	30	8566.9	34.7	30
40	0094.6	39.4	20	40	8532.2	34.5	20
50	0055.2	39.4	10	50	8497.7	34.3	10
56° 0′	9,9990015.8	39.2	34° 0′	63° 0′	9,9988463.4	34.3	27° 0′
10	9,9989976.6	39.1	50	10	8429.1	34.0	50
20	9937.5	39.0	40	20	8395.1	34.0	40
30	9898.5	39.0	30	30	8361.1	33.7	30
40	9859.5	38.8	20	40	8327.4	33.7	20
50	9820.7	38.8	10	50	8293.7	33.4	10
57° 0′	9,9989781.9	38.6	33° 0′	64° 0′	9,9988260.3	33.4	26° 0′
10	9743.3	38.6	50	10	8226.9	33.1	50
20	9704.7	38.4	40	20	8193.8	33.1	40
30	9666.3	38.3	30	30	8160.7	32.8	30
40	9628.0	38.3	20	40	8127.9	32.7	20
50	9589.7	38.1	10	50	8095.2	32.6	10
58° 0′	9,9989551.6	38.0	32° 0′	65° 0′	9,9988062.6	32.4	25° 0′
10	9513.6	37.9	50	10	8030.2	32.2	50
20	9475.7	37.8	40	20	7998.0	32.1	40
30	9437.9	37.7	30	30	7965.9	31.9	30
40	9400.2	37.6	20	40	7934.0	31.8	20
50	9362.6	37.5	10	50	7902.2	31.5	10
59° 0′	9,9989325.1		31° 0′	66° 0′	9,9987870.7		24° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
66° 0′	9,9987870.7	31.5	24° 0′	73° 0′	9,9986705.1	23.7	17° 0′
10	7839.2	31.2	50	10	6681.4	23.4	50
20	7808.0	31.1	40	20	6658.0	23.2	40
30	7776.9	30.9	30	30	6634.8	23.0	30
40	7746.0	30.8	20	40	6611.8	22.8	20
50	7715.2	30.6	10	50	6589.0	22.5	10
67° 0′	9,9987684.6	30.4	23° 0′	74° 0′	9,9986566.5	22.4	16° 0′
10	7654.2	30.2	50	10	6544.1	22.2	50
20	7624.0	30.1	40	20	6521.9	21.9	40
30	7593.9	29.9	30	30	6500.0	21.8	30
40	7564.0	29.7	20	40	6478.2	21.5	20
50	7534.3	29.6	10	50	6456.7	21.3	10
68° 0′	9,9987504.7	29.3	22° 0′	75° 0′	9,9986435.4	21.2	15° 0′
10	7475.4	29.2	50	10	6414.2	20.9	50
20	7446.2	29.0	40	20	6393.3	20.6	40
30	7417.2	28.9	30	30	6372.7	20.5	30
40	7388.3	28.6	20	40	6352.2	20.2	20
50	7359.7	28.5	10	50	6332.0	20.0	10
69° 0′	9,9987331.2	28.3	21° 0′	76° 0′	9,9986312.0	19.8	14° 0′
10	7302.9	28.1	50	10	6292.2	19.6	50
20	7274.8	27.9	40	20	6272.6	19.4	40
30	7246.9	27.7	30	30	6253.2	19.2	30
40	7219.2	27.5	20	40	6234.0	18.9	20
50	7191.7	27.4	10	50	6215.1	18.7	10
70° 0′	9,9987164.3	27.2	20° 0′	77° 0′	9,9986196.4	18.5	13° 0′
10	7137.1	26.9	50	10	6177.9	18.3	50
20	7110.2	26.8	40	20	6159.6	18.0	40
30	7083.4	26.6	30	30	6141.6	17.8	30
40	7056.8	26.4	20	40	6123.8	17.6	20
50	7030.4	26.2	10	50	6106.2	17.4	10
71° 0′	9,9987004.2	26.0	19° 0′	78° 0′	9,9986088.8	17.1	12° 0′
10	6978.2	25.9	50	10	6071.7	16.9	50
20	6952.3	25.6	40	20	6054.8	16.7	40
30	6926.7	25.4	30	30	6038.1	16.5	30
40	6901.3	25.2	20	40	6021.6	16.2	20
50	6876.1	25.1	10	50	6005.4	16.0	10
72° 0′	9,9986851.0	24.8	18° 0′	79° 0′	9,9985989.4	15.8	11° 0′
10	6826.2	24.6	50	10	5973.6	15.6	50
20	6801.6	24.5	40	20	5958.0	15.3	40
30	6777.1	24.2	30	30	5942.7	15.1	30
40	6752.9	24.0	20	40	5927.6	14.9	20
50	6728.9	23.8	10	50	5912.7	14.6	10
73° 0′	9,9986705.1		17° 0′	80° 0′	9,9985898.1		10° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
80° 0′	9,9985898.1		10° 0′	85° 0′	9,9985569.0		5° 0′
10	5883.7	14.4	50	10	5561.8	7.2	50
20	5869.6	14.1	40	20	5554.8	7.0	40
30	5855.6	14.0	30	30	5548.0	6.8	30
40	5841.9	13.7	20	40	5541.5	6.5	20
50	5828.5	13.4	10	50	5535.2	6.3	10
81° 0′	9,9985815.2	13.3	9° 0′	86° 0′	9,9985529.2	6.0	4° 0′
10	5802.2	13.0	50	10	5523.4	5.8	50
20	5789.5	12.7	40	20	5517.9	5.5	40
30	5776.9	12.6	30	30	5512.6	5.3	30
40	5764.7	12.2	20	40	5507.5	5.1	20
50	5752.6	12.1	10	50	5502.7	4.8	10
82° 0′	9,9985740.8	11.8	8° 0′	87° 0′	9,9985498.2	4.5	3° 0′
10	5729.2	11.6	50	10	5493.9	4.3	50
20	5717.9	11.3	40	20	5489.8	4.1	40
30	5706.8	11.1	30	30	5486.0	3.8	30
40	5695.9	10.9	20	40	5482.4	3.6	20
50	5685.3	10.6	10	50	5479.1	3.3	10
83° 0′	9,9985674.9	10.4	7° 0′	88° 0′	9,9985476.0	3.1	2° 0′
10	5664.7	10.2	50	10	5473.1	2.9	50
20	5654.8	9.9	40	20	5470.5	2.6	40
30	5645.2	9.6	30	30	5468.2	2.3	30
40	5635.7	9.5	20	40	5466.1	2.1	20
50	5626.6	9.1	10	50	5464.2	1.9	10
84° 0′	9,9985617.6	9.0	6° 0′	89° 0′	9,9985462.6	1.6	1° 0′
10	5608.9	8.7	50	10	5461.3	1.3	50
20	5600.5	8.4	40	20	5460.2	1.1	40
30	5592.2	8.3	30	30	5459.3	0.9	30
40	5584.3	7.9	20	40	5458.7	0.6	20
50	5576.5	7.8	10	50	5458.3	0.4	10
85° 0′	9,9985569.0	7.5	5° 0′	90° 0′	9,9985458.2	0.1	0° 0′
	log w		β		log w		β



